FÍSICA TEÓRICA

TEORÍA CUÁNTICA RELATIVISTA

BERESTETSKIĬ
LIFSHITZ y PITAEVSKIĬ

PARTE I

VOLÚMEN 4

SEGUNDA EDICIÓN

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 4

Parte I

L. D. LANDAU E. M. LIFSHITZ
Academia de Ciencias, U.R.S.S.

V. B. BERESTETSKIĬ E. M. LIFSHITZ L. P. PITAEVSKIĬ
Academia de Ciencias, U. R. S. S.

TEORÍA CUÁNTICA RELATIVISTA

Volumen 4

Parte I

del

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Editorial Reverté, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Título de la obra original

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Editada por

MEZHDUNARODNAYA KNIGA, Moscou

Versión española directamente del ruso por el

Prof. Dr. Ramón Ortiz Fornaguera

Jefe de la División de Física Teórica de la Junta de Energía Nuclear - Madrid

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A. ***Encarnación, 86 Barcelona (12)***

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español

© ***EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1971 1975***

Impreso en España Printed in Spain

RIEUSSET,S.A.BARCELONA

D.L.B.: 39.225-75

ISBN.84-291-4084-0

NOTA

Esta primera edición española es traducción de la primera edición rusa, que apareció en julio de 1968 (Relia͡tivistskaia͡ kvantovaia͡ teoriia͡, chast'I, Izdatel'stvo «Nauka», Moskva, 1968). Sin embargo, y aparte la corrección de algunas erratas, la edición española difiere de la rusa en el contenido de algunos párrafos, que han sido más o menos modificados de acuerdo con las indicaciones del Profesor Lifshitz. En particular, se ha completado considerablemente el § 93 en lo que concierne a la radiación de frenado.

R. ORTIZ FORNAGUERA

PRÓLOGO

Conforme al plan general de este curso, el presente volumen está dedicado a la teoría cuántica relativista en el amplio sentido de esta palabra: a la teoría de todos los fenómenos ligados con el carácter finito de la velocidad de la luz, en particular a la teoría de la radiación.

Como es sabido, esta parte de la física teórica se encuentra todavía lejos, hoy por hoy, de haber alcanzado una forma acabada, ni aun en lo que concierne a los principios físicos que se encuentran en su base. Esto vale, en particular, para la teoría de las interacciones fuertes y débiles. Pero incluso la electrodinámica cuántica, a pesar de los brillantes éxitos logrados en ella durante los últimos 20 años, no es todavía satisfactoria por lo que toca a su estructura lógica.

Al seleccionar el material para este libro nos hemos limitado a aquellos resultados que, con un grado razonable de certeza, parecen establecidos con bastante solidez. Es natural que, abordadas así las cosas, la mayor parte del libro la ocupe la electrodinámica cuántica. Hicimos todo lo posible por desarrollar la exposición desde un punto de vista realista, subrayando las hipótesis físicas hechas en la teoría, pero sin entrar en los fundamentos que, de todas maneras, dado el estado actual de la teoría, tienen un carácter puramente formal.

En el estudio de las aplicaciones concretas de la teoría no consideramos como objetivo nuestro el abarcar el número enorme de efectos involucrados y nos hemos limitado solamente a los que son fundamentales, si bien, para completar, se dan referencias a trabajos originales que contienen una investigación más detallada. Al efectuar los cálculos, que a menudo se caracterizan aquí por ser notablemente pesados, frecuentemente hemos omitido algunas fórmulas intermedias, pero se ha procurado siempre señalar todos los aspectos metódicos no triviales utilizados

Comparado con los otros volúmenes del presente curso, la exposición en este libro presupone por parte del lector un nivel de preparación más elevado. Nos hemos basado en el hecho de que al lector, que en el proceso de estudio de la física teórica alcanza la teoría cuántica de los campos, no le hace falta una innecesaria minuciosidad en la presentación del material. La división del libro en dos partes no es una cuestión de principio, y se debe únicamente a que es grande el volumen del material a tratar. En la segunda parte se incluyen las correcciones radiativas en electrodinámica, la teoría de las interacciones débiles y algunas cuestiones relativas a la teoría de las interacciones fuertes.

Este libro se ha escrito sin la participación directa de nuestro maestro L. D. Landau. Pero nos hemos dejado guiar constantemente por aquel espíritu y aquella actitud hacia la física teórica que siempre nos enseñó y que él comunicó a los otros volúmenes del curso. A menudo nos hemos preguntado cómo trataría Dau cierta cuestión, la que fuese, y hemos procurado contestarla como nos dictaba una relación con él de muchos años.

Agradecemos a V. N. Baĭer la gran ayuda que nos ha prestado en la preparación de los §§ 59 y 94, y a B. I. Ritus la gran ayuda en la redacción del § 98. Damos las gracias a B. E. Meĭerovich por su colaboración en algunos cálculos. También

agradecemos a A. S. Kompaneĭts el habernos proporcionado sus notas de las lecciones sobre electrodinámica cuántica dictadas por L. D. Landau en la Universidad Estatal de Moscú durante el año académico 1959-60.

El presente libro es el resultado de un trabajo colectivo y todo su contenido ha sido examinado y discutido por todos los autores. La distribución directa del trabajo fue la siguiente: los capítulos I y V fueron escritos por E. M. Lifshitz, los capítulos II, III y VII por V. B. Berestetskiĭ y E. M. Lifshitz, en colaboración, los capítulos IV, VI y IX, por E. M. Lifshitz y L. P. Pitaevskiĭ, y los capítulos VIII y X, por los tres autores conjuntamente.

Junio de 1967. V. B. Berestetskiĭ, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskiĭ

NOTACIONES

Notaciones cuadridimensionales

Los índices tensoriales cuadridimensionales se designan por letras griegas λ, μ, ν..., que toman los valores 0, 1, 2, 3.

Se ha adoptado la métrica cuadridimensional con la signatura $(+ - - -)$. El tensor métrico es el $g_{\mu\nu}$ ($g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$).

La enumeración de las componentes de un 4-vector se hace en la forma $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$.

Para simplificar la escritura de las fórmulas, a menudo se omite el índice de un 4-vector *. En particular, los productos escalares de 4-vectores se escriben simplemente en la forma (ab) o ab : $ab \equiv a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

El 4-vector posición es $x^\mu = (t, \boldsymbol{r})$, el elemento de volumen, d^4x.

Operador derivación respecto de las 4-coordenadas: $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$.

4-tensor unidad antisimétrico: $e^{\lambda\mu\nu\rho}$, con $e^{0123} = -e_{0123} = +1$.

Función-δ cuadridimensional: $\delta^{(4)}(a) = \delta(a^0)\,\delta(\boldsymbol{a})$.

Notaciones tridimensionales

Los índices tensoriales tridimensionales se designan por letras latinas, i, k, l, ... que toman los valores x, y, z.

Los vectores tridimensionales se designan por letras negritas cursivas.

El elemento de volumen tridimensional, d^3x.

Operadores

Los operadores se designan por letras de tipo redondo. Los operadores $-\psi$ se designan por letras de palo seco $\mathsf{\psi}$. Conmutadores y anticonmutadores de dos operadores:

$$\{\mathrm{f}, \mathrm{g}\}_\pm = \mathrm{fg} \pm \mathrm{gf}$$

Operador transpuesto $\tilde{\mathrm{f}}$.

Operador conjugado hermítico f^+.

Operador de conjugación de carga C.

Operador de inversión espacial P.

Operador de inversión temporal T **.

---

* El empleo de esta notación está muy generalizado en la literatura contemporánea. Este compromiso entre los recursos alfabéticos y las necesidades de la física exige, claro está, particular atención por parte del lector.

** La letra T se utiliza también como símbolo de ordenación cronológica de los productos de operadores.

Elementos de matriz

Elementos de matriz del operador F para la transición del estado inicial i al final: $f: F_{fi}$ o $\langle f | \mathrm{F} | i \rangle$.

La notación $| i \rangle$ se utiliza como símbolo abstracto de un estado con independencia de cualquier representación concreta en la que cabe expresar su función de onda. La notación $\langle f |$ — es el símbolo del estado final (« del conjugado complejo »). *

De acuerdo con esto, $\langle s | r \rangle$ representan los coeficientes del desarrollo del sistema de estados con números cuánticos r como superposición de estados con números cuánticos s: $| r \rangle = \sum_s | s \rangle \langle s | r \rangle$.

Elementos de matriz reducidos de los tensores esféricos: $\langle f \| \mathrm{F} \| i \rangle$.

Ecuación de Dirac

Matrices de Dirac: γ^μ, con $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$. Matrices $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$. Expresiones en las representaciones espinorial y típica: (21.3), (21.16), (21.20) (págs. 82, 84 y 85). $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $(\gamma^5)^2 = 1$ (véase (22.18), pág. 89). $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ (véase (28.2), pág. 108).

Producto de un 4-vector por matrices de Dirac: $\hat{a} = (a\gamma) \equiv a_\mu\gamma^\mu$.

Conjugado de Dirac: $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0$.

Matrices de Pauli: $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$; (definición en (20.8), pág. 80).

Indices 4-espinoriales: $\alpha, \beta, \ldots$ y $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ldots$, que toman los valores 1, 2 y $\dot{1}$, $\dot{2}$.

Indices bispinoriales; $i, k, l, \ldots$, que toman los valores 1, 2, 3, 4.

Desarrollos de Fourier

Desarrollo tridimensional:

$$f(\boldsymbol{r}) = \int f(\boldsymbol{k})\, e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

$$f(\boldsymbol{k}) = \int f(\boldsymbol{r})\, e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d^3x.$$

Unidades

Salvo indicación expresa, se utilizan constantemente unidades relativistas en las que $\hbar = 1$, $c = 1$. En estas unidades, el cuadrado de la carga elemental vale: $e^2 = 1/137$.

Unidades atómicas: $e = 1$, $\hbar = 1$, $m = 1$. En estas unidades, $c = 137$. Unidades atómicas de longitud, tiempo y energía: $\hbar^2/me^2$, $\hbar^3/me^4$ y $me^4/\hbar^2$ (la cantidad $\mathrm{Ry} = me^4/2\hbar^2$ se llama rydberg).

Unidades ordinarias: sistema absoluto de unidades (Gauss).

---

* Notación de Dirac.

Constantes

Velocidad de la luz $c = 2{,}997925 \cdot 10^{10}$ cm/s.
Carga elemental $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ CGSE.
Masa del electrón $m = 9{,}109 \cdot 10^{-28}$ g.
Constante de Plank $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ erg s.
Constante de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c$; $1/\alpha = 137{,}04$.
Radio de Bohr $\hbar^2/me^2 = 5{,}292 \cdot 10^{-9}$ cm.
Radio clásico del electrón $r_e = e^2/mc^2 = 2{,}818 \cdot 10^{-13}$ cm.
Longitud de onda de Compton del electrón $\hbar/mc = 3{,}861 \cdot 10^{-11}$ cm.
Energía del electrón en reposo $mc^2 = 0{,}5110 \cdot 10^6$ eV.
Unidad atómica de energía $me^4/\hbar^2 = 4{,}359 \cdot 10^{-11}$ erg $= 27{,}21$ eV.
Magnetón de Bohr $e\hbar/2\,mc = 9{,}273 \cdot 10^{-21}$ erg G^{-1}.
Masa del protón $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-24}$ g.
Longitud de onda de Compton del protón $\hbar/m_p c = 1{,}321 \cdot 10^{-13}$ cm.
Magnetón nuclear $e\hbar/2\,m_p c = 5{,}050 \cdot 10^{-24}$ erg G^{-1}.

ÍNDICE DE MATERIAS

INTRODUCCIÓN 1

1 Relaciones de indeterminación en el dominio relativista 1

CAPÍTULO 1. EL FOTÓN 7

2 Cuantificación del campo electromagnético libre 7
3 Fotones 13
4 Invariancia de contraste 15
5 El campo electromagnético en la teoría cuántica 17
6 Momento cinético y paridad del fotón 19
7 Ondas esféricas de fotones 22
8 Polarización del fotón 28
9 Sistema de dos fotones 34

CAPÍTULO 2. BOSONES 37

10 La ecuación de onda para partículas de spin 0 37
11 Partículas y antipartículas 42
12 Partículas realmente neutras 46
13 Transformaciones C, P, T 49
14 Ecuación de onda para una partícula de spin 1 55
15 Ecuación de onda para partículas con mayores valores enteros del spin 59
16 Estados de helicidad de una partícula 60

CAPÍTULO 3. FERMIONES 67

17 Espinores cuadridimensionales 67
18 Relación entre espinores y 4-vectores 70
19 Inversión de espinores 73
20 La ecuación de Dirac en la representación espinorial 78
21 Forma simétrica de la ecuación de Dirac 81
22 Álgebra de las matrices de Dirac 86
23 Ondas planas 89
24 Ondas esféricas 93
25 Relación del spin con la estadística 97
26 Conjugación de carga e inversión de los espinores respecto del tiempo 100
27 Simetría intrínseca de las partículas y antipartículas 105
28 Formas bilineales 107

29 Matriz densidad de polarización 112
30 El neutrino 117
31 Ecuación de onda para una partícula de spin 3/2 121

CAPÍTULO 4. UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO EXTERIOR 125

32 La ecuación de Dirac para el electrón en un campo exterior 125
33 Desarrollo en potencias de $1/c$ 129
34 Estructura fina de los niveles del átomo de hidrógeno 133
35 Movimiento en un campo con simetría esférica 136
36 Movimiento en un campo de Coulomb 140
37 Dispersión en un campo con simetría esférica 147
38 Dispersión en el caso ultrarrelativista 149
39 Sistema de funciones de onda del espectro continuo para la dispersión en un campo coulombiano 151
40 Un electrón en el campo de una onda electromagnética plana 155
41 Movimiento del spin en un campo exterior 159
42 Dispersión de neutrones en un campo eléctrico 165

CAPÍTULO 5. LA RADIACIÓN 167

43 El operador de interacción electromagnética 167
44 Emisión y absorción 170
45 Radiación dipolar 172
46 Radiación multipolar eléctrica 175
47 Radiación multipolar magnética 179
48 Distribución angular y polarización de la radiación 182
49 Radiación de los átomos. Tipo eléctrico 190
50 Radiación de los átomos. Tipo magnético 195
51 Radiación de los átomos. Efectos Zeeman y Stark 198
52 Radiación de los átomos. El átomo de hidrógeno 201
53 La radiación por moléculas diatómicas. Espectros electrónicos 206
54 Radiación por moléculas diatómicas. Espectros vibratorio y de rotación 212
55 Radiación de los núcleos 214
56 Efecto fotoeléctrico. Caso no-relativista 217
57 Efecto fotoeléctrico. Caso relativista 222
58 Fotodesintegración del deuterón 225
59 Radiación de frenado magnético 229

CAPÍTULO 6. DISPERSIÓN DE LA LUZ 241

60 El tensor de dispersión 241
61 Dispersión por sistemas que se orientan libremente 249
62 Dispersión por las moléculas 255

63 Anchura natural de las rayas espectrales 259
64 Fluorescencia por resonancia 264

CAPÍTULO 7. LA MATRIZ DE DISPERSIÓN 271

65 Amplitud de dispersión 271
66 Reacciones con partículas polarizadas 277
67 Invariantes cinemáticos 280
68 Regiones físicas 283
69 Desarrollo de amplitudes parciales 289
70 Simetría de las amplitudes helicoidales de dispersión 292
71 Amplitudes invariantes 299
72 La condición de unitariedad 303

CAPÍTULO 8. TEORÍA INVARIANTE DE PERTURBACIONES 309

73 Producto cronológico 309
74 Diagramas de Feynman para la dispersión de electrones 312
75 Diagramas de Feynman para la dispersión de un fotón 319
76 Propagador de electrón 322
77 Propagador de fotón 327
78 Reglas generales de la técnica de diagramas 330
79 Invariancia de cruce 338
80 Partículas virtuales 339

CAPÍTULO 9. INTERACCIÓN DE ELECTRONES 345

81 Dispersión de un electrón en un campo exterior 345
82 Dispersión de electrones y positones por un electrón 349
83 Ecuación de Breit 358
84 El positonio 365
85 Interacción de los átomos a grandes distancias 369

CAPÍTULO 10. INTERACCIÓN DE ELECTRONES CON FOTONES 377

86 La dispersión de un fotón por un electrón 377
87 Dispersión de un fotón por un electrón. Efectos de polarización 382
88 Aniquilación de un par electrón-positón en dos fotones 391
89 Aniquilación del positonio 395
90 Radiación de frenado de un electrón por un núcleo. Caso no-relativista 400
91 Radiación de frenado de un electrón por un núcleo. Caso relativista 409

92 Formación de un par por un fotón en el campo de un núcleo 418
93 Teoría exacta de la creación de pares y de la radiación de frenado en el caso ultrarrelativista 421
94 Radiación de frenado por un electrón que choca con un electrón en el caso ultrarrelativista 435
95 Emisión de fotones blandos en las colisiones 440
96 Método de los fotones equivalentes 447
97 Formación de pares en las colisiones de partículas 453
98 Emisión de un fotón por un electrón en el campo de una onda electromagnética intensa 459

APÉNDICE a El operador de las rotaciones finitas 467
b Elementos de matriz para el trompo 472

ÍNDICE ALFABÉTICO 475

INTRODUCCIÓN

§ 1. Relaciones de indeterminación en el dominio relativista

Toda la teoría cuántica expuesta en el volumen III de este curso posee un carácter esencialmente no-relativista y es inaplicable a los fenómenos que suponen un movimiento con velocidades que no son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. A primera vista cabría esperar que el paso a la teoría relativista fuera posible mediante una generalización más o menos inmediata del formalismo de la mecánica cuántica no-relativista. Sin embargo, un examen atento muestra que la construcción de una teoría relativista lógicamente cerrada exige la introducción de nuevos principios físicos.

Recordemos algunas nociones físicas que se encuentran en la base de la mecánica cuántica no-relativista (III, § 1). Vimos que en ella representa un papel fundamental el concepto de medición, por el que se entiende un proceso de interacción de un sistema cuántico con un « objeto clásico » (un « aparato »), como resultado del cual el sistema cuántico adquiere determinados valores de ciertas variables dinámicas (coordenadas, velocidades, etc.). Vimos también que la mecánica cuántica limita fuertemente la posibilidad de que existan simultáneamente en el electrón* diferentes variables dinámicas. Así, las indeterminaciones Δq y Δp con que pueden existir simultáneamente la coordenada y el impulso están ligadas por la relación $\Delta q \Delta p \sim \hbar$**, cuanto mayor es la precisión con que se mide una de estas cantidades, tanto menor es la precisión con que se puede medir simultáneamente la otra.

Sin embargo, es esencial que cada una de las variables dinámicas del electrón se pueda medir por separado con una precisión tan grande cuanto se quiera y, además, en el curso de un tiempo tan corto cuanto se quiera. Esta circunstancia representa un papel fundamental para toda la mecánica cuántica no-relativista. Tan sólo gracias a ella es posible introducir el concepto de función de onda, concepto

* Como en III, § 1, hablamos de un electrón para abreviar, pensando en el fondo en un sistema cuántico cualquiera.

** En este párrafo utilizamos unidades ordinarias.

básico en el formalismo de esta teoría. En efecto, el sentido físico de la función de onda $\psi(q)$ consiste en que el cuadrado de su módulo determina la probabilidad de obtener, como resultado de una medición efectuada en un instante dado, un cierto valor de la coordenada del electrón. Es claro que una premisa necesaria para la introducción del concepto de una tal probabilidad es la posibilidad por principio de llevar a cabo una medición tan precisa y tan rápida cuanto se quiera de la coordenada; en caso contrario, este concepto carecería de objeto y perdería su significado físico.

La existencia de una velocidad límite (la velocidad de la luz c) conduce a nuevas limitaciones de principio respecto de las posibilidades de medir las diferentes magnitudes físicas (*L. D. Landau, R. Peierls*, 1930).

En III, § 44 se obtuvo la relación

$$(v' - v)\,\Delta p \Delta t \sim \hbar, \tag{1.1}$$

que liga la indeterminación Δp en la medición del impulso del electrón con la duración Δt del propio proceso de medida; v y v' son las velocidades del electrón antes y después de la medición. De esta relación se sigue que conseguir una medición suficientemente precisa del impulso en un intervalo de tiempo suficientemente corto (esto es, un pequeño valor de Δp con un pequeño valor de Δt) es sólo posible a costa de una variación suficientemente grande de la velocidad como resultado del proceso mismo de medición. En la teoría no-relativista, este hecho era una manifestación de la imposibilidad de repetir la medición del impulso al cabo de cortos intervalos de tiempo, pero en modo alguno afectaba a la posibilidad por principio de una sola medición del impulso tan precisa cuanto se quiera, ya que la diferencia $v' - v$ podía ser arbitrariamente grande.

Pero la existencia de una velocidad límite cambia el estado de cosas de manera radical. La diferencia $v' - v$, como también las propias velocidades, no puede sobrepasar ahora el valor c (más precisamente, $2c$). Substituyendo en (1.1) $v' - v$ por c, obtenemos la relación

$$\Delta p \Delta t \sim \frac{\hbar}{c}, \tag{1.2}$$

que determina la máxima precisión alcanzable por principio en la medición del impulso para un intervalo de tiempo de medición dado Δt. De esta manera, en la teoría relativista resulta por principio imposible una medición del impulso arbitrariamente precisa y rápida. Una medida precisa del impulso ($\Delta p \to 0$) es sólo posible en el caso límite de una duración infinitamente grande del proceso de medición.

Modificaciones no menos profundas sufre también la medición de una coordenada; en la teoría relativista, ésta resulta medible tan sólo con una precisión no mejor que un determinado límite mínimo. Con esto el concepto de localización del electrón experimenta una limitación más en su sentido físico.

En el formalismo matemático de la teoría, esta situación se manifiesta en la incompatibilidad de la medición precisa de una coordenada con el hecho de poder afirmar el carácter positivo de la energía de una partícula libre. Veremos en lo que sigue que el sistema completo de funciones propias de la ecuación de onda relativista de una partícula libre incluye (junto con soluciones que dependen del tiempo de manera « correcta ») soluciones con « frecuencia negativa ». Estas funciones aparecen también en el caso general, en el desarrollo del paquete de ondas correspondientes a un electrón localizado en una pequeña región del espacio.

Las funciones de onda de « frecuencia negativa » están ligadas, como se demostrará, con la existencia de antipartículas — de los positones —. La aparición de estas funciones en el desarrollo del paquete de ondas se traduce, de manera general, en la inevitable formación de pares electrón-positón en el proceso de medida de las coordenadas del electrón. La aparición de nuevas partículas incontrolable por el propio proceso priva evidentemente de sentido al concepto de medida de tales coordenadas.

En el sistema de reposo del electrón, el error mínimo de una medición de sus coordenadas es

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{mc}. \tag{1.3}$$

A este valor (el único admisible ya por consideraciones de dimensión) corresponde una indeterminación del impulso $\Delta p \sim mc$, la cual, a su vez, corresponde a la energía mínima umbral de formación del par.

En un sistema de referencia en el que el electrón se mueve con energía ε, en vez de (1.3) tenemos

$$\Delta q \sim \frac{\hbar c}{\varepsilon}. \tag{1.4}$$

En particular, en el caso límite ultrarrelativista la energía está ligada con el impulso por la relación $\varepsilon \approx cp$, y entonces es

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{p}, \tag{1.5}$$

es decir, el error Δq coincide con la longitud de onda de De Broglie de la partícula.

Para los fotones se da siempre el caso ultrarrelativista, de modo que para ellos vale la expresión (1.5). Esto significa que sólo tiene sentido hablar de coordenadas de un fotón en aquellos casos en que las dimensiones características del problema son grandes comparadas con la longitud de onda. Pero éste, ni más ni menos, es el caso límite « clásico » correspondiente a la óptica geométrica, en la cual cabe hablar de propagación de la luz a lo largo de trayectorias determinadas — a lo largo de rayos —. Pero en el caso cuántico, cuando la longitud de onda no se puede considerar pequeña, el concepto de coordenadas de un fotón deja de tener objeto.

Veremos más adelante (§ 4) que, en el formalismo matemático de la teoría, la imposibilidad de medir las coordenadas del fotón se manifiesta ya en la imposibilidad de construir, a partir de su función de onda, una magnitud que pudiera representar el papel de una densidad de probabilidad que satisfaga las condiciones necesarias de invariancia relativista.

Por lo dicho es claro que, en una mecánica cuántica relativista consecuente, las coordenadas de las partículas no pueden, en general, figurar en tanto que variables dinámicas, variables que por su propia esencia deberían tener un sentido exacto. Tampoco el impulso de las partículas puede mantenerse en el sentido que tenía antes: Dado que la medición exacta del impulso exige un tiempo suficientemente largo, resulta imposible seguir la marcha de su variación en un proceso.

Recordando lo dicho al principio de este párrafo, llegamos a la conclusión de que el formalismo todo de la mecánica cuántica no-relativista resulta inadecuado para el paso al dominio relativista. Las funciones de onda $\psi(q)$ entendidas en su sentido primitivo, no pueden figurar en el formalismo de una teoría relativista consecuente, en tanto que portadoras de información inobservable.

El impulso puede aparecer en dicha teoría tan sólo en la aplicación a partículas libres, para las cuales se conserva y, por ello, puede medirse con precisión arbitraria. Cabe pensar, por lo tanto, que la teoría futura renunciará totalmente a considerar la marcha temporal de los procesos de interacción de las partículas. Esta teoría pondrá de manifiesto que en tales procesos no existen características determinadas exactamente (ni tan sólo dentro de los límites de la precisión de la mecánica cuántica ordinaria), de modo que la descripción de un proceso en el tiempo resultará tan ilusorio como resultaron las trayectorias clásicas en la mecánica cuántica no-relativista. Las únicas magnitudes observables serán las características (impulsos, polarizaciones) de las partículas libres — de las partículas iniciales que entran en interacción, y de las partículas finales que aparecen como resultado del proceso (*L. Landau, R. Peierls*, 1930).

El planteo característico de un problema en la teoría cuántica relativista consiste en la determinación de las amplitudes de probabilidad de las transiciones que ligan estados iniciales y finales dados (esto es, para $t \to \mp \infty$) de un sistema de partículas. El conjunto de estas amplitudes entre todos los estados posibles forma la *matriz de dispersión* o *matriz S*. Esta matriz será la portadora de toda la información con sentido físico observable relativa a los procesos de interacción de las partículas (*W. Heisenberg*, 1938).

Advertimos también que en una tal teoría deben perder su sentido primitivo los conceptos de partículas « elementales » y « complejas » — el de qué están compuestas—. Esta cuestión no puede formularse sin considerar el proceso de interacción entre partículas, y el renunciar a esta consideración priva por si solo de objeto a la pregunta. Todas las partículas, las que figuran como iniciales o como finales en cualquier fenómeno físico de colisión, deben intervenir en la teoría en igualdad de condiciones. En este sentido, la diferencia entre partículas de las que

habitualmente se dice que son « complejas » o que son « elementales », tiene un carácter puramente cuantitativo y se reduce al valor relativo del defecto de masa respecto de la desintegración en ciertas «partes componentes». Así, decir que el deuterón es una partícula compleja (con su energía de enlace respecto de la desintegración en un protón y en un neutrón relativamente pequeña) sólo difiere cuantitativamente de la afirmación de que un neutrón está « compuesto » por un protón y un mesón π.

No existe en la actualidad ninguna teoría cuántica relativista completa lógicamente cerrada. Veremos que la teoría actual introduce nuevos aspectos físicos en el carácter de la descripción del estado de las partículas, descripción que adopta algunos rasgos de la teoría de los campos (véase § 10). Sin embargo, se construye en buena medida a imagen y con ayuda de los conceptos de la mecánica cuántica ordinaria. Esta manera de construir la teoría condujo al éxito en el dominio de la electrodinámica cuántica. La falta de coherencia lógica completa de esta teoría se manifiesta en la aparición de expresiones divergentes al aplicar directamente su formalismo matemático, pero para evitar estas divergencias existen medios del todo unívocos. Con todo, estos métodos conservan en grado considerable el carácter de recetas semiempíricas y nuestra convicción en la validez de los resultados obtenidos de esta manera se basa en último término tan sólo en su magnífica concordancia con los experimentos, no en el acuerdo interno y en la armonía lógica de los principios fundamentales de la teoría.

Un carácter del todo distinto presenta la situación en el dominio de la teoría de los fenómenos ligados con las llamadas interacciones fuertes de las partículas (fuerzas nucleares). Aquí los intentos de construir una teoría basada en aquellos mismos métodos no condujo a ningún resultado físico realmente significativo. La construcción de una teoría completa que abarque las interacciones fuertes exigirá, probablemente, acudir a conceptos físicos fundamentalmente nuevos.

CAPÍTULO 1

EL FOTÓN

§ 2. Cuantificación del campo electromagnético libre

Habiéndonos propuesto estudiar el campo electromagnético en tanto que objeto cuántico, conviene partir de la descripción clásica del mismo en la que dicho campo se caracteriza por una sucesión de variables que es infinita, pero discreta; esta descripción permitirá aplicar directamente los métodos ordinarios de la mecánica cuántica. En cambio, la representación del campo mediante potenciales dados en cada punto del espacio es, por su propia esencia, una descripción mediante una multiplicidad continua de variables.

Sea $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ el potencial vector del campo electromagnético libre que satisface la « condición de transversalidad »

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{2.1}$$

En este caso, el potencial escalar $\Phi = 0$ y los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son:

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}}, \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{2.2}$$

Las ecuaciones de Maxwell se reducen a la ecuación de onda para $\boldsymbol{A}$:

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.3}$$

Como es sabido (véase II, § 52), en la electrodinámica clásica el paso a la descripción mediante una sucesión discreta de variables se efectúa considerando el campo en un determinado volumen del espacio, V, grande, pero finito*. Recordaremos cómo se consigue esto, prescindiendo de los detalles de los cálculos.

El campo en un volumen finito se puede desarrollar en serie de ondas planas no estacionarias, de modo que este potencial se representa por una serie de la forma

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}), \tag{2.4}$$

* Para no recargar las fórmulas con factores innecesarios, supondremos $V = 1$.

donde los coeficientes $\boldsymbol{a_k}$ dependen del tiempo de acuerdo con la ley

$$\boldsymbol{a_k} \sim e^{-i\omega t}, \qquad \omega = |\boldsymbol{k}|. \tag{2.5}$$

En virtud de la condición (2.1), los vectores complejos $\boldsymbol{a_k}$ son ortogonales a los correspondientes vectores de onda: $\boldsymbol{a_k} \cdot \boldsymbol{k} = 0$.

La suma en (2.4) se extiende al conjunto discreto infinito de valores del vector de onda (de sus tres componentes k_x, k_y, k_z). El paso a la integración en una distribución continua se puede llevar a cabo mediante la expresión

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

para el número de posibles valores $\boldsymbol{k}$ que corresponden al elemento de volumen del espacio-$\boldsymbol{k}$ $d^3k = dk_x dk_y dk_z$.

El campo en el volumen en cuestión queda por completo determinado dando los vectores $\boldsymbol{a}_k$. Así, pues, estas magnitudes se pueden considerar como conjunto discreto de las « variables del campo » clásicas. Sin embargo, para que quede clara la manera de pasar a la teoría cuántica, hay que aplicar aun a estas variables una determinada transformación cuyo resultado es llevar las ecuaciones del campo a una forma análoga a la de las ecuaciones canónicas de la mecánica clásica (ecuaciones de Hamilton). Las variables canónicas del campo se definen por las igualdades

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q_k} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\boldsymbol{a_k} + \boldsymbol{a_k^*}), \\ \boldsymbol{P_k} &= \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}} (\boldsymbol{a_k} - \boldsymbol{a_k^*}) = \dot{\boldsymbol{Q}}_k \end{aligned} \tag{2.6}$$

(estas variables, evidentemente, son reales). El potencial vector se expresa en función de las variables canónicas como sigue:

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{4\pi} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{Q_k} \cos \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \frac{1}{\omega} \boldsymbol{P_k} \operatorname{sen} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} \right). \tag{2.7}$$

Para hallar la función de Hamilton H hay que calcular la energía total del campo

$$\frac{1}{8\pi} \int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)\, d^3x,$$

expresándola en función de las magnitudes $\boldsymbol{Q_k}$, $\boldsymbol{P_k}$. Representando $\boldsymbol{A}$ mediante un desarrollo de la forma (2.7), calculando $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ de acuerdo con (2.2) y efectuando la integración, obtendremos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{P_k^2} + \omega^2 \boldsymbol{Q_k^2}).$$

Cada uno de los vectores $\boldsymbol{P_k}$ y $\boldsymbol{Q_k}$ es perpendicular al vector de onda $\boldsymbol{k}$, es decir,

cada uno posee dos componentes independientes. La dirección de estos vectores determina la dirección de la polarización de la correspondiente onda. Designando las dos componentes de los vectores $\boldsymbol{Q_k}$, $\boldsymbol{P_k}$ (en un plano perpendicular a $\boldsymbol{k}$) por $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$ ($\alpha = 1,2$), escribiremos la función de Hamilton en la forma

$$H = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} (P_{k\alpha}^2 + \omega^2 Q_{k\alpha}^2). \tag{2.8}$$

De esta manera, la función de Hamilton se descompone en suma de términos independientes, cada uno de los cuales contiene solamente un par de magnitudes $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$. Cada uno de estos términos corresponde a una onda no estacionaria con un vector de onda y una polarización determinados y tiene la forma de la función de Hamilton de un oscilador armónico unidimensional. Por ello, del desarrollo obtenido se dice que es el desarrollo del campo en *osciladores*.

Pasemos ahora a la cuantificación del campo electromagnético libre. El procedimiento expuesto para la descripción clásica del campo hace evidente el camino para pasar a la teoría cuántica. Hemos de considerar ahora las variables canónicas — las coordenadas generalizadas $Q_{k\alpha}$ y los impulsos generalizados $P_{k\alpha}$ — como operadores con la regla de conmutación

$$\mathrm{P}_{k\alpha}\mathrm{Q}_{k\alpha} - \mathrm{Q}_{k\alpha}\mathrm{P}_{k\alpha} = -i \tag{2.9}$$

(mientras los operadores con diferentes $k\alpha$ conmutan todos entre sí). Junto con ellas, pasan también a ser operadores el potencial $\mathbf{A}$ y [según (2.2)] las intensidades $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$.

Una definición consecuente del hamiltoniano del campo exige el cálculo de la integral

$$\mathrm{H} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\, d^3x, \tag{2.10}$$

en la que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ se expresan en función de los operadores $\mathrm{P}_{k\alpha}$, $\mathrm{Q}_{k\alpha}$. De hecho, sin embargo, la no conmutabilidad de estos últimos no se manifiesta al hacerlo, ya que los productos $\mathrm{Q}_{k\alpha}\mathrm{P}_{k\alpha}$ aparecen con el factor $\cos \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ $\operatorname{sen} \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ que se anula al integrar en todo el volumen. Por ello, para el hamiltoniano se obtiene en definitiva la expresión

$$\mathrm{H} = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} (\mathrm{P}_{k\alpha}^2 + \omega^2 \mathrm{Q}_{k\alpha}^2), \tag{2.11}$$

que corresponde exactamente a la función clásica de Hamilton, lo que, por lo demás, era natural esperar.

La determinación de los valores propios de este hamiltoniano no requiere cálculos especiales, puesto que se reduce al conocido problema de determinar los niveles de energía de los osciladores lineales (véase III, § 23). Por consiguiente, podemos escribir sin más para los niveles de energía del campo

$$E=\sum_{k\alpha}\left(N_{k\alpha}+\frac{1}{2}\right)\omega, \tag{2.12}$$

donde $N_{k\alpha}$ son números enteros no negativos.

Al estudio de esta fórmula volveremos en el párrafo siguiente, pero ahora escribiremos los elementos de matriz de las magnitudes $Q_{k\alpha}$, lo que se puede hacer directamente con ayuda de las conocidas fórmulas para los elementos de matriz de las coordenadas de un oscilador (véase III, § 23). Los elementos de matriz diferentes de cero son iguales a

$$\langle N_{k\alpha}\,|\,Q_{k\alpha}\,|\,N_{k\alpha}-1\rangle=\langle N_{k\alpha}-1\,|\,Q_{k\alpha}\,|\,N_{k\alpha}\rangle=\sqrt{\frac{N_{k\alpha}}{2\omega}}. \tag{2.13}$$

Los elementos de matriz de las magnitudes $P_{k\alpha}=\dot{Q}_{k\alpha}$ difieren de los elementos de matriz de las $Q_{k\alpha}$ tan sólo en el factor $\pm i\omega$.

En los cálculos que seguirán, sin embargo, será más conveniente utilizar en vez de las magnitudes $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$ sus combinaciones lineales $\omega Q_{k\alpha}\pm iP_{k\alpha}$, que tienen elementos de matriz no nulos tan sólo para las transiciones $N_{k\alpha}\to N_{k\alpha}\pm 1$. De acuerdo con esto introduciremos los operadores

$$\mathrm{c}_{k\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\,\mathrm{Q}_{k\alpha}+i\,\mathrm{P}_{k\alpha}),\qquad \mathrm{c}^{+}_{k\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\,\mathrm{Q}_{k\alpha}-i\,\mathrm{P}_{k\alpha}) \tag{2.14}$$

[las magnitudes clásicas $c_{k\alpha}$, $c^{*}_{k\alpha}$ coinciden, salvo el factor $\sqrt{2\pi/\omega}$, con los coeficientes $a_{k\alpha}$, $a^{*}_{k\alpha}$ en el desarrollo (2.4)]. Los elementos de matriz de estos operadores son iguales a

$$\langle N_{k\alpha}-1\,|\,\mathrm{c}_{k\alpha}\,|\,N_{k\alpha}\rangle=\langle N_{k\alpha}\,|\,\mathrm{c}^{+}_{k\alpha}\,|\,N_{k\alpha}-1\rangle=\sqrt{N_{k\alpha}}. \tag{2.15}$$

La regla de conmutación entre $\mathrm{c}_{k\alpha}$ y $\mathrm{c}^{+}_{k\alpha}$ se obtiene a partir de la definición (2.14) y de la regla (2.9):

$$\mathrm{c}_{k\alpha}\mathrm{c}^{+}_{k\alpha}-\mathrm{c}^{+}_{k\alpha}\mathrm{c}_{k\alpha}=1. \tag{2.16}$$

Para el potencial vector utilizamos de nuevo un desarrollo del tipo (2.4), en el cual, sin embargo, los coeficientes son ahora operadores. Escribámoslo en la forma

$$\mathbf{A}=\sum_{k\alpha}(\mathrm{c}_{k\alpha}\boldsymbol{A}_{k\alpha}+\mathrm{c}^{+}_{k\alpha}\boldsymbol{A}^{*}_{k\alpha}), \tag{2.17}$$

donde

$$\boldsymbol{A}_{k\alpha}=\sqrt{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{2.18}$$

Hemos introducido la notación $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ para los vectores unitarios que indican la dirección y sentido de la polarización de los osciladores; los vectores $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ son perpendiculares al vector de onda $\boldsymbol{k}$, y para cada $\boldsymbol{k}$ se tienen dos polarizaciones independientes.

Análogamente, para los operadores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ escribiremos

$$\mathbf{E} = \sum_{k\alpha} (c_{k\alpha} \boldsymbol{E}_{k\alpha} + c^{+}_{k\alpha} \boldsymbol{E}^{*}_{k\alpha}),$$
$$\mathbf{H} = \sum_{k\alpha} (c_{k\alpha} \boldsymbol{H}_{k\alpha} + c^{+}_{k\alpha} \boldsymbol{H}^{*}_{k\alpha}), \tag{2.19}$$

expresiones en las que

$$\boldsymbol{E}_{k\alpha} = i\omega \boldsymbol{A}_{k\alpha}, \qquad \boldsymbol{H}_{k\alpha} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_{k\alpha} \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega) \tag{2.20}$$

Los vectores $\boldsymbol{A}_{k\alpha}$ son ortogonales entre sí en el sentido de que

$$\int \boldsymbol{A}_{k\alpha} \cdot \boldsymbol{A}^{*}_{k'\alpha'} \, d^3x = \frac{2\pi}{\omega} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'}. \tag{2.21}$$

En efecto, si $\boldsymbol{A}_{k\alpha}$ y $\boldsymbol{A}^{*}_{k'\alpha'}$ difieren en los vectores de onda, su producto contiene el factor $e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}$, que da cero al integrar en todo el volumen; en cambio, si difieren solamente en la polarización, se tiene $\boldsymbol{e}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{e}^{(\alpha')*} = 0$, ya que dos direcciones de polarización independientes son ortogonales entre sí. Relaciones análogas valen para los vectores $\boldsymbol{E}_{k\alpha}$, $\boldsymbol{H}_{k\alpha}$. Conviene escribir su normalización en la forma

$$\frac{1}{4\pi} \int (\boldsymbol{E}_{k\alpha} \cdot \boldsymbol{E}^{*}_{k'\alpha'} + \boldsymbol{H}_{k\alpha} \cdot \boldsymbol{H}^{*}_{k'\alpha'}) \, d^3x = \omega \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'}. \tag{2.22}$$

Substituyendo los operadores (2.19) en (2.10) y efectuando la integración teniendo en cuenta (2.22), obtendremos el hamiltoniano del campo expresado en función de los operadores $c_{k\alpha}$, $c^{+}_{k\alpha}$:

$$\mathbf{H} = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} (c_{k\alpha} c^{+}_{k\alpha} + c^{+}_{k\alpha} c_{k\alpha}) \frac{1}{4\pi} \int (|\boldsymbol{E}_{k\alpha}|^2 + |\boldsymbol{H}_{k\alpha}|^2) \, d^3x =$$
$$= \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} \omega (c_{k\alpha} c^{+}_{k\alpha} + c^{+}_{k\alpha} c_{k\alpha}). \tag{2.23}$$

Este operador es diagonal en la representación considerada [aquella en la que los elementos de matriz de los operadores c, c^{+} son los (2.15)] y sus valores propios coinciden, naturalmente, con (2.12).

En la teoría clásica el impulso del campo se define por la integral:

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \, d^3x.$$

Al pasar a la teoría cuántica substituimos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ por los operadores (2.19) y se encuentra sin dificultad

$$\mathbf{P} = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} (P^2_{k\alpha} + \omega^2 Q^2_{k\alpha}) \, \boldsymbol{n} \tag{2.24}$$

de acuerdo con la conocida relación clásica entre la energía y el impulso de las ondas planas. Los valores propios de este operador son

$$\boldsymbol{P} = \sum_{k\alpha} \boldsymbol{k} \left(N_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right). \tag{2.25}$$

La representación de los operadores que proporcionan los elementos de matriz (2.15) es la « representación de números de ocupación » y corresponde a la descripción del estado del sistema (del campo) en la que se dan los números cuánticos $N_{k\alpha}$ *(los números de ocupación)*. En esta representación los operadores del campo (2.19), y con ellos también el hamiltoniano (2.11), actúan sobre la función de onda del sistema expresada en función de los números $N_{k\alpha}$; la designaremos por $\Phi(N_{k\alpha}, t)$. Los operadores del campo (2.19) no dependen explícitamente del tiempo. Esto corresponde a la representación de Schrödinger de los operadores, habitual en la mecánica cuántica no-relativista. En cambio, en este caso, sí resulta dependiente del tiempo el estado del sistema $\Phi(N_{k\alpha}, t)$ y esta dependencia viene determinada por la ecuación de Schrödinger.

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathrm{H}\Phi.$$

Tal descripción del campo es por su propia esencia relativísticamente invariante, dado que se basa en las ecuaciones invariantes de Maxwell. Pero esta invariancia no queda de manifiesto de manera explícita, ante todo porque las coordenadas espaciales y el tiempo intervienen en ella de manera altamente no simétrica.

En una teoría relativista es útil atribuir a la descripción una forma en que la invariancia se advierta de manera inmediata. Con vistas a esto hay que utilizar la llamada representación de Heisenberg, en la que la dependencia explícita respecto del tiempo se hace recaer sobre los propios operadores (véase III, § 13). Entonces el tiempo y las coordenadas intervendrán en plano de igualdad en las expresiones para los operadores del campo, mientras que el estado del sistema Φ será función solamente de los números de ocupación.

Para el operador **A** el paso a la representación de Heisenberg se reduce a substituir en cada término de la suma (2.17) el factor $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ por $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, es decir, se reduce a entender por $\boldsymbol{A}_{k\alpha}$ la función dependiente del tiempo

$$\boldsymbol{A}_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}. \tag{2.26}$$

Se comprueba fácilmente que así es observando que el elemento de matriz del operador de Heisenberg para la transición $i \to f$ ha de contener el factor $\exp\{-i(E_i - E_f)t\}$, donde E_i y E_f son las energías de los estados inicial y final (véase III, § 13). Para la transición en que el número $N_{k\alpha}$ disminuye o aumenta en 1, este factor se reduce a $e^{-i\omega t}$ o a $e^{i\omega t}$, respectivamente. Esta condición quedará satisfecha como resultado de la substitución antes indicada.

En lo que sigue (al estudiar tanto el campo electromagnético como los campos de partículas) daremos siempre por supuesto que la representación de los operadores es la de Heisenberg.

§ 3. Fotones

Pasemos al examen de las fórmulas obtenidas para el campo cuántico.

Ante todo, la fórmula (2.12) para la energía del campo plantea la siguiente dificultad. El nivel de energía más bajo del campo corresponde a la anulación de los números cuánticos $N_{k\alpha}$ de todos los osciladores (este estado se llama estado de *vacío del campo electromagnético*). Pero incluso en este estado cada oscilador posee una « energía de cero » $\omega/2$ no nula. Al sumar respecto de la infinidad de osciladores obtendremos, pues, un resultado infinito. De esta manera nos encontramos ante una de las « divergencias » a que conduce la falta de una estructura lógica cerrada en la teoría actual.

Mientras se trata solamente de los valores propios de la energía del campo, podemos soslayar esta dificultad suprimiendo simplemente la energía de las oscilaciones de cero, es decir, escribiendo para la energía y el impulso del campo*

$$E = \sum_{k\alpha} N_{k\alpha}\omega, \qquad \boldsymbol{P} = \sum_{k\alpha} N_{k\alpha}\boldsymbol{k}. \tag{3.1}$$

Estas fórmulas permiten introducir el concepto de *cuantos de luz* o de *fotones***, fundamental para toda la electrodinámica cuántica. Podemos en efecto considerar el campo electromagnético libre como un conjunto de partículas cada una de las cuales tiene una energía $\omega(=\hbar\omega)$ y un impulso $\boldsymbol{k}(=\boldsymbol{n}\hbar\omega/c)$. La relación entre la energía y el impulso de un fotón es precisamente la que ha de ser en mecánica relativista para partículas con masa en reposo nula que se mueven con la velocidad de la luz. Los números de ocupación $N_{k\alpha}$ cobran el sentido de número de fotones con los impulsos $\boldsymbol{k}$ y las polarizaciones $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ dados. La propiedad de polarización de un fotón es análoga al concepto de spin en otras partículas (las peculiaridades específicas del fotón en relación con esto se examinarán más adelante, en el § 6).

Es fácil ver que todo el formalismo matemático desarrollado en el párrafo anterior concuerda perfectamente con la noción de campo electromagnético como conjunto de fotones; es, ni más ni menos, el formalismo de la llamada segunda cuantificación aplicado al sistema de fotones***. En este método (véase III, § 64), los números de ocupación de los estados representan el papel de variables independientes y los operadores actúan sobre funciones de estos números. El papel fundamental lo representan los operadores de « aniquilación » y de « creación » de partículas, en correspondencia con la disminución o el aumento en una unidad del número de ocupación. Operadores precisamente de este tipo son $c_{k\alpha}$, $c^{+}_{k\alpha}$: el

---

* Esta supresión se puede conseguir formalmente de manera no contradictoria conviniendo en entender los productos de operadores en (2.10) como productos «normales», es decir, tales que en ellos los operadores c^{+} se colocan siempre a la izquierda de los operadores c. La fórmula (2.23) toma entonces la forma $H = \sum_{k\alpha} \omega c^{+}_{k\alpha} c_{k\alpha}$.

** La noción de fotones fue introducida por primera vez por Einstein (*A. Einstein*, 1905).

*** El método de segunda cuantificación aplicado a la teoría de la radiación fue desarrollado primero por Dirac (*P. A. M. Dirac*, 1927).

operador $c_{k\alpha}$ aniquila un fotón en el estado $k\alpha$, mientras que el $c^{+}_{k\alpha}$ crea un fotón en este estado.

La regla de conmutación (2.16) corresponde al caso de partículas que obedecen a la estadística de Bose. Así, pues, los fotones son bosones, como era ya de esperar de antemano: el número admisible de fotones en un estado cualquiera debe ser arbitrario (volveremos todavía sobre el papel que representa esta circunstancia en el § 5).

Las ondas planas $\boldsymbol{A}_{k\alpha}$ (2.26) que figuran en el operador **A** (2.17) como coeficientes de los operadores de aniquilación de fotones, se pueden interpretar como funciones de onda de los fotones que poseen determinados impulsos $\boldsymbol{k}$ y polarizaciones $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$. Esta interpretación corresponde al desarrollo del operador ψ en serie de funciones de onda de los estados estacionarios de una partícula en el formalismo no-relativista de la segunda cuantificación [a diferencia de ésta, sin embargo, en el desarrollo (2.17) aparecen tanto los operadores de aniquilación como los operadores de creación de partículas; el sentido de esta diferencia se pondrá en claro más adelante, véase § 12].

La función de onda (2.26) está normalizada por la condición

$$\int \frac{1}{4\pi}(|\boldsymbol{E}_{k\alpha}|^2 + |\boldsymbol{H}_{k\alpha}|^2)\, d^3x = \omega. \tag{3.2}$$

Esta normalización corresponde a « un fotón en el volumen $V = 1$ ». En efecto, la integral que aparece en el primer miembro de la igualdad representa el valor medio cuántico de la energía de un fotón en el estado con la función de onda dada [esta interpretación salta a la vista en la representación del hamiltoniano que da la primera línea de (2.23)]*. En el segundo miembro de la igualdad (3.2), por otra parte, aparece la energía de un fotón.

El papel de « ecuación de Schrödinger » del fotón lo representan las ecuaciones de Maxwell. En el presente caso [para el potencial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ que satisface la condición (2.1)], éstas se reducen a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{A} = 0.$$

Las « funciones de onda » del fotón en el caso general de estados estacionarios arbitrarios son soluciones complejas de esta ecuación que dependen del tiempo a través del factor $e^{-i\omega t}$.

Hablando de función de onda de un fotón, subrayaremos una vez más que es totalmente imposible considerarla como amplitud de probabilidad de localización espacial del fotón, en contraposición con el sentido fundamental de función de onda en la mecánica cuántica no-relativista. Esto está ligado con el hecho de que (conforme se indicó en el § 1) el concepto de coordenadas de un fotón carece en

* Obsérvese que el coeficiente $1/4\,\pi$ en la integral (3.2) es el doble del coeficiente ordinario $1/8\,\pi$ en (2.10). Esta diferencia está ligada, en último término, con el carácter complejo de los vectores $\boldsymbol{E}_{k\alpha}$, $\boldsymbol{H}_{k\alpha}$, a diferencia de los operadores del campo **E**, **H** que son reales.

absoluto de sentido físico. Al final del párrafo siguiente volveremos todavía a considerar el aspecto matemático de esta situación.

Las componentes del desarrollo de Fourier de la función $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ respecto de las coordenadas constituyen la función de onda del fotón en la representación de impulsos; la designaremos por $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})e^{-i\omega t}$. Así, para un estado con un impulso $\boldsymbol{k}$ y una polarización $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ determinados, la función de onda en la representación de impulsos viene dada simplemente por el coeficiente del factor exponencial en (2.26):

$$A_{k\alpha}(\boldsymbol{k}', \alpha') = \sqrt{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\,\delta_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}}\delta_{\alpha'\alpha}\,. \tag{3.3}$$

En virtud de la mensurabilidad del impulso de una partícula libre, la función de onda en la representación de impulsos tiene un sentido físico más profundo que la función en la representación de coordenadas: permite calcular la probabilidad $w_{k\alpha}$ de los diferentes valores del impulso y de la polarización del fotón que se encuentra en un estado dado. De acuerdo con las reglas generales de la mecánica cuántica, $w_{k\alpha}$ viene dada por el cuadrado del módulo de los coeficientes del desarrollo de la función $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}')$ en funciones de onda de los estados con valores determinados de $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$:

$$w_{k\alpha} \backsim \Big| \sum_{\boldsymbol{k}'\alpha'} \boldsymbol{A}^*_{k\alpha}(\boldsymbol{k}', \alpha')\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}') \Big|^2$$

(el coeficiente de proporcionalidad depende de cómo se normalicen las funciones). Substituyendo aquí (3.3), se obtendrá

$$w_{k\alpha} \backsim |\, \boldsymbol{e}^{(\alpha)}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})\,|^2. \tag{3.4}$$

Después de sumar respecto de las dos polarizaciones, encontramos la probabilidad de que un fotón tenga un impulso $\boldsymbol{k}$:

$$w_{\boldsymbol{k}} \backsim |\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})\,|^2. \tag{3.5}$$

§ 4. Invariancia de contraste

Como es sabido, la elección de los potenciales del campo en la electrodinámica clásica no es única : las componentes del 4-potencial A_μ se pueden someter a una transformación arbitraria *de contraste* (o de *gradiente*) de la forma

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi, \tag{4.1}$$

donde χ es una función arbitraria de las coordenadas y del tiempo (véase II, § 18).

Para una onda plana, si nos limitamos a transformaciones que no alteran la forma del potencial [su proporcionalidad al factor $\exp(-ik_\mu x^\mu)$], la no unicidad conduce a la posibilidad de añadir a la amplitud de la onda un 4-vector arbitrario proporcional al 4-vector k^μ.

La no univocidad del potencial se conserva, naturalmente, también en la teoría cuántica en lo que concierne a los operadores del campo o a las funciones de onda de los fotones. Sin decidir de antemano el modo de elegir los potenciales, en vez de (2.17) hay que escribir el desarrollo análogo para el operador 4-potencial

$$A^{\mu} = \sum_{k\alpha} (c_{k\alpha} A^{\mu}_{k\alpha} + c^{+}_{k\alpha} A^{\mu *}_{k\alpha}), \tag{4.2}$$

donde las funciones de onda $A^{\mu}_{k\alpha}$ son 4-vectores de la forma

$$A^{\mu}_{k} = \sqrt{4\pi}\, \frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\omega}}\, e^{-ik_{\nu}x^{\nu}}, \qquad e_{\mu}e^{\mu *} = -1,$$

o, en forma abreviada, prescindiendo de los índices vectoriales en cuatro dimensiones,

$$A_k = \sqrt{4\pi}\, \frac{e}{\sqrt{2\omega}}\, e^{-ikx}, \qquad ee^{*} = -1. \tag{4.3}$$

En esta fórmula el 4-impulso $k^{\mu} = (\omega, \boldsymbol{k})$ (de modo que $kx = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$), y e es un 4-vector unitario de polarización *.

Si nos limitamos a las transformaciones de contraste que no cambian la dependencia de la función (4.3) respecto de las coordenadas y del tiempo, dichas transformaciones consistirán en la substitución

$$e_{\mu} \to e_{\mu} + \chi k_{\mu}, \tag{4.4}$$

donde $\chi = \chi(k^{\mu})$ es una función arbitraria. El hecho de que la polarización sea transversal significa que siempre es posible un contraste de este tipo en el que el 4-vector e tiene la forma

$$e^{\mu} = (0, \boldsymbol{e}), \qquad \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \tag{4.5}$$

(llamaremos a este contraste *contraste transversal en tres dimensiones*). En forma invariante cuadrimensional esta condición se escribe como condición de *transversalidad en cuatro dimensiones*

$$ek = 0. \tag{4.6}$$

Obsérvese que esta condición (como también la condición de normalización $ee^{*} = -1$) no queda violada por la transformación (4.4) en virtud de que $k^2 = 0$. Por otra parte, el que sea cero el cuadrado del 4-impulso de una partícula significa que su masa es nula. Con esto mismo se manifiesta el ligamen entre la invariancia de contraste y la igualación a cero de la masa del fotón (otros aspectos de esta relación se considerarán en el § 14).

* La expresión (4.3) no tiene una forma del todo relativísticamente covariante (4-vectorial), lo que se debe al carácter no invariante de la normalización que hemos adoptado en el volumen finito $V = 1$. Esta circunstancia, sin embargo, carece de importancia fundamental y queda compensada por las ventajas que proporciona dicho tipo de normalización. Veremos más adelante que mediante ella se puede asegurar la obtención simple y automática de magnitudes físicas reales en la debida forma invariante.

Ninguna magnitud física medible puede cambiar en una transformación de contraste de las funciones de onda de los fotones que toman parte en un proceso. Esta condición de *invariancia de contraste* representa en electrodinámica cuántica un papel incluso más importante que en la teoría clásica. Veremos en multitud de ejemplos que constituye aquí, junto con la condición de invariancia relativista, un poderoso principio heurístico.

A su vez la invariancia de contraste de la teoría está íntimamente ligada con la ley de conservación de la carga eléctrica; nos detendremos a considerar este aspecto en el § 43.

Hemos recordado ya en el párrafo anterior que la función de onda del fotón respecto de las coordenadas no se puede interpretar como amplitud de probabilidad de su localización espacial. En el aspecto matemático, se manifiesta esta circunstancia en la imposibilidad de construir con ayuda de la función de onda una magnitud que, aunque sólo fuera por sus propiedades formales, pueda representar el papel de una densidad de probabilidad. Una tal magnitud debería poderse expresar por una combinación bilineal esencialmente positiva de la función de onda A_μ y su conjugada compleja. Además, debería satisfacer determinadas condiciones de covariancia relativista, a saber, representar la componente temporal de un 4-vector (ello se sigue de que la ecuación de continuidad, que expresa la conservación del número de partículas, se escribe en forma cuadridimensional como anulación de la divergencia del 4-vector corriente; la componente temporal de este último es precisamente en este caso la densidad de probabilidad de localización de la partícula, véase II, § 29). Por otra parte, en virtud de la condición de invariancia de contraste, el 4-vector A_μ podría aparecer en la corriente tan sólo como tensor antisimétrico $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -i(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu)$. De esta manera, el 4-vector corriente debería formarse mediante combinación bilineal de $F_{\mu\nu}$ y $F^*_{\mu\nu}$ (y de las componentes del 4-vector k_μ). Pero es totalmente imposible construir un tal 4-vector: cualquier expresión que satisfaga las condiciones impuestas (por ejemplo $k^\lambda F^*_{\mu\nu} F^\nu_\lambda$) se anula en virtud de la condición de transversalidad ($k^\lambda F_{\nu\lambda} = 0$), dejando incluso ya de lado el hecho de que no sería definida positiva (puesto que contiene potencias impares de las componentes k_μ).

§ 5. El campo electromagnético en la teoría cuántica

La descripción del campo como conjuntos de fotones es la única descripción completamente adecuada al sentido físico del campo electromagnético en la teoría cuántica y viene a substituir el modelo clásico basado en las intensidades de dicho campo. Estas últimas aparecen en el formalismo matemático del modelo fotónico como operadores de segunda cuantificación.

Como es sabido, las propiedades de un sistema cuántico se aproximan a las de uno clásico en aquellos casos en que sean grandes los números cuánticos que determinan los estados estacionarios del sistema. Para el campo electromagnético libre

(en un volumen dado) esto significa que deben ser grandes los números cuánticos de osciladores, es decir, los números de fotones $N_{k\alpha}$. En este sentido posee una significación profunda la circunstancia de que los fotones obedecen a la estadística de Bose. En el formalismo matemático de la teoría, el ligamen de la estadística de Bose con las propiedades del campo clásico se manifiesta en las reglas de conmutación de los operadores $c_{k\alpha}$, $c^+_{k\alpha}$. Para valores $N_{k\alpha}$ grandes, cuando son grandes los elementos de matriz de estos operadores, se puede prescindir de la unidad en el segundo miembro de la relación de conmutación (2.16), con lo cual se obtiene

$$c_{k\alpha}c^+_{k\alpha} \approx c^+_{k\alpha}c_{k\alpha},$$

es decir, estos operadores pasan a ser las magnitudes clásicas, conmutables entre sí, $c_{k\alpha}$ y $c^*_{k\alpha}$, que determinan las intensidades clásicas del campo.

Sin embargo, hay que precisar todavía la condición de que el campo sea cuasiclásico. El hecho es que si todos los números $N_{k\alpha}$ son grandes, al sumar respecto de la totalidad de los estados $k\alpha$ la energía del campo resulta en cualquier caso infinita, de modo que la condición deja de tener objeto.

El planteo físicamente sensato de la cuestión relativa a las condiciones para que se dé el caso cuasiclásico se basa en considerar los valores del campo promediados en un cierto intervalo pequeño de tiempo Δt. Si representamos el campo eléctrico clásico $\boldsymbol{E}$ (o el campo magnético $\boldsymbol{H}$) en forma de integral de Fourier respecto del tiempo, al promediarlo en un corto intervalo Δt contribuirán de manera apreciable al valor medio $\bar{\boldsymbol{E}}$ tan sólo aquellas componentes de Fourier cuyas frecuencias satisfacen la condición $\omega \Delta t \lesssim 1$; en caso contrario, el factor oscilante $e^{-i\omega t}$ prácticamente se anula al efectuar el promedio. Por ello, al poner en claro la condición de que el campo promediado sea cuasiclásico hay que considerar únicamente aquellos osciladores cuánticos cuyas frecuencias cumplen la condición $\omega \lesssim 1/\Delta t$. Basta exigir que sean grandes los números cuánticos de estos osciladores.

El número de osciladores con frecuencia entre 0 y $\omega \sim 1/\Delta t$ (referido al volumen $V = 1$) en orden de magnitud es igual a *

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sim \frac{1}{(c\Delta t)^3}. \tag{5.1}$$

La energía total del campo por unidad de volumen vale $\sim \bar{\boldsymbol{E}}^2$. Dividiendo esta cantidad por el número de osciladores y por una cierta energía media de un fotón individual ($\sim \hbar\omega$), encontraremos el orden de magnitud de los números de fotones

$$N_k \sim \frac{\bar{\boldsymbol{E}}^2 c^3}{\hbar\omega^4}.$$

Imponiendo la condición de que este número sea grande, se obtendrá la desigualdad

$$|\boldsymbol{E}| \gg \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}. \tag{5.2}$$

* En este párrafo utilizamos unidades ordinarias.

Esta es precisamente la condición buscada que permite considerar desde el punto de vista clásico el campo promediado (respecto de los intervalos de tiempo Δt). Vemos así que el campo debe ser suficientemente intenso, tanto más cuanto menor sea el intervalo Δt a que se extiende el promedio. Para campos variables, este intervalo no puede superar, claro está, los períodos de tiempo en el curso de los cuales el campo varía de manera apreciable. Por consiguiente, los campos variables suficientemente débiles no pueden ser en ningún caso cuasiclásicos. Tan sólo en el caso de campos estáticos (constantes en el tiempo) es posible hacer $\Delta t \to \infty$, de modo que el segundo miembro de la desigualdad (5.2) tiende a cero. Esto significa que un campo estático es siempre clásico.

Se señaló ya que las expresiones clásicas del campo electromagnético en la forma de superposición de ondas planas han de considerarse en la teoría cuántica como expresiones constituidas por operadores. El sentido físico de éstos, sin embargo, es muy limitado. En efecto, un operador del campo al que se haya dado sentido físico debería conducir a valores nulos del campo en el estado correspondiente al vacío fotónico. En cambio, el valor medio del cuadrado del operador campo $\mathbf{E}^2$ en el estado fundamental, que coincide salvo un factor con la energía de cero del campo, resulta ser infinito (por « valor medio » entendemos el valor medio en sentido cuántico, es decir, el correspondiente elemento de matriz diagonal del operador). Soslayar esta dificultad es imposible ni aun acudiendo a una operación formal de substracción (como fue posible hacer para la energía del campo), ya que en el presente caso deberíamos efectuar esta operación mediante una modificación razonable de la forma de los propios operadores $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ (y no de sus cuadrados), lo que resulta imposible. Así, pues, en contraposición con los operadores ordinarios de la mecánica cuántica, en electrodinámica cuántica a los operadores del campo no corresponden magnitudes físicas que tengan sentido.

§ 6. Momento cinético y paridad del fotón

Como cualquier otra partícula, el fotón puede poseer un determinado momento cinético. Para aclarar las propiedades de esta magnitud en el caso del fotón, recordaremos antes de qué manera las propiedades de la función de onda de una partícula están ligadas en el aparato matemático de la mecánica cuántica con su momento cinético.

El momento de la partícula $\boldsymbol{j}$ se compone de su momento cinético orbital $\boldsymbol{l}$ y de su momento cinético intrínseco — el spin $\mathbf{s}$ —. La función de onda de una partícula de spin s es un espinor simétrico de orden $2s$, es decir, un conjunto de $2s + 1$ componentes que en las rotaciones del sistema de coordenadas se transforman entre sí según determinada ley. En cambio, el momento cinético orbital está ligado con la dependencia de la función de onda respecto de las coordenadas: a los estados con momento orbital l corresponden funciones de onda cuyas componentes se expresan como combinaciones (lineales) de armónicos esféricos de orden l.

La posibilidad de distinguir de manera consecuente el spin y el momento cinético orbital exige, por lo tanto, la independencia de las propiedades de las funciones de onda en lo que concierne al spin y a las coordenadas: la dependencia de las componentes del espinor (en un instante dado) respecto de éstas no debe estar limitada por ninguna condición suplementaria.

En la representación de impulsos de las funciones de onda, a la dependencia con relación a las coordenadas corresponde la dependencia respecto del impulso $\boldsymbol{k}$. La función de onda del fotón (en el contraste de transversalidad tridimensional) es el vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$. Un vector equivale a un espinor de segundo orden, y en este sentido sería posible atribuir al fotón el spin 1. Pero esta función de onda vectorial está sometida a la condición de transversalidad $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) = 0$, que constituye una condición suplementaria impuesta a la dependencia del vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ respecto del impulso. Resulta así que esta dependencia no se puede ya fijar simultáneamente de manera arbitraria para todas las componentes del vector, lo que a su vez conduce a la imposibilidad de separar el momento cinético orbital y el spin.

Observemos que a un fotón es inaplicable también la definición de spin como momento cinético en el sistema de reposo de la partícula, puesto que para el fotón, que se mueve con la velocidad de la luz, no existe en absoluto el sistema de reposo.

De esta manera, para el fotón es posible hablar solamente de su momento cinético total. En relación con esto, es evidente a priori que el momento total puede tomar únicamente valores enteros. Esto puede verse ya sin más que considerar que entre las magnitudes que caracterizan al fotón no hay ningún espinor de orden impar.

Al igual que para cualquier partícula, un estado del fotón se caracteriza también por su paridad, ligada con el comportamiento de la función de onda en la inversión del sistema de coordenadas (véase III, § 30). En la representación de impulsos, al cambio de signo de las coordenadas corresponde el cambio de signo de todas las componentes de $\boldsymbol{k}$. La acción del operador inversión P sobre una función escalar $\varphi(\boldsymbol{k})$ queda limitada al siguiente cambio: $\mathrm{P}\varphi(\boldsymbol{k}) = \varphi(-\boldsymbol{k})$. Al aplicarlo a una función vectorial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$, en cambio, hay que tener en cuenta, además, que al cambiar el sentido de los ejes en el sentido opuesto, cambia también el signo de todas las componentes del vector; por lo tanto*

$$\mathrm{P}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{k}). \tag{6.1}$$

Aunque la descomposición del momento cinético del fotón en momento orbital y spin está privada de sentido físico, con todo es conveniente introducir de manera formal el « spin » s y el « momento orbital » l como conceptos auxiliares que expresan las propiedades de transformación de la función de onda respecto de las rotaciones: el valor $s = 1$ corresponde al carácter vectorial de la función de onda, y

* Convendremos en definir la paridad de un estado por la acción del operador inversión sobre un vector polar, como lo es precisamente $\boldsymbol{A}$ (o el correspondiente vector eléctrico $\boldsymbol{E} = i\omega\boldsymbol{A}$). Ésta difiere en signo de la acción sobre un vector axil $\boldsymbol{H} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}$, dado que la inversión no altera el sentido de un vector de este tipo.

$$\mathrm{P}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{k}).$$

el valor l es el del orden de las funciones esféricas que la constituyen. Procedemos así con vistas a considerar las funciones de onda de los estados del fotón, con valores determinados del momento cinético, que representan ondas esféricas para una partícula libre. El número l determina, en particular, la paridad de un estado del fotón, igual a

$$P=(-1)^{l+1}. \tag{6.2}$$

En este mismo sentido cabe representar el operador momento cinético $\mathbf{j}$ como suma $\mathbf{s}+\mathbf{1}$. El operador momento está ligado, como es sabido, con el operador de una rotación infinitamente pequeña del sistema de coordenadas; en el presente caso lo está con la acción de este operador sobre un campo vectorial. En la suma $\mathbf{s}+\mathbf{1}$, el operador $\mathbf{s}$ actúa sobre el índice vectorial, transformando entre sí las diferentes componentes de un vector. El operador $\mathbf{l}$, en cambio, actúa sobre estas componentes en tanto que funciones del impulso (o de las coordenadas).

Determinemos el número de estados (de energía dada) que son posibles para un valor dado j del momento del fotón [prescindiendo al hacerlo de la degeneración trivial de orden $(2j+1)$ relativa a las direcciones del momento cinético].

Cuando $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{s}$ son independientes, este cálculo se lleva a cabo simplemente contando el número de maneras que permiten componer los momentos $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{s}$ de acuerdo con las reglas del modelo vectorial de forma que se obtenga el valor considerado j. Para una partícula con spin $s=1$ encontraríamos así (para un valor dado no nulo de j) tres estados con los valores de l y las paridades siguientes:

$$l=j, \quad P=(-1)^{l+1}=(-1)^{j+1}; \qquad l=j\pm 1, \quad P=(-1)^{l+1}=(-1)^{j}.$$

Si, en cambio, es $j=0$, se obtiene un solo estado (con $l=1$) cuya paridad es $P=+1$.

En este cálculo, sin embargo, no se ha tenido en cuenta la condición de transversalidad del vector $\boldsymbol{A}$; sus tres componentes se han considerado todas como independientes. Por ello, del número de estados que se han obtenido hay que restar aún el número de estados correspondientes a un vector longitudinal. Un tal vector se puede escribir en la forma $\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})$, que permite ver que, en lo que concierne a sus propiedades de transformación (respecto de las rotaciones), sus tres componentes son equivalentes a un escalar φ*. Por consecuencia, cabe decir que el estado adicional, no compatible con la condición de transversalidad, correspondería a un estado de la partícula con una función de onda escalar (espinor de orden 0), es decir, con « spin 0 »**. El momento j de este estado coincide por ello con el orden de las funciones esféricas que intervienen en φ. En cambio, la paridad de este estado,

---

* En efecto, cuando se habla del carácter de transformación de una magnitud en las rotaciones, se trata de una transformación en un punto dado, es decir, para $\boldsymbol{k}$ dado. En una tal transformación, $\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})$ no cambia en absoluto, es decir, se comporta como un escalar.

** Subrayaremos una vez más que no estamos considerando aquí el estado de una partícula real, cualquiera que sea. El cálculo efectuado tiene carácter formal y se reduce, desde el punto de vista matemático, a la clasificación del conjunto de las magnitudes que se transforman entre sí según una representación irreducible del grupo de las rotaciones.

en tanto que estado del fotón, se determina por la acción del operador inversión sobre la función vectorial $\boldsymbol{k}\varphi$:

$$P(\boldsymbol{k}\varphi) = -(-\boldsymbol{k})\varphi(-\boldsymbol{k}) = (-1)^j \boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k}),$$

es decir, es igual a $(-1)^j$. Así, pues, del número de estados obtenidos anteriormente con paridad $(-1)^j$ (dos para $j \neq 0$ y uno para $j = 0$) hay que restar uno.

Llegamos así en definitiva al resultado de que para un momento del fotón j distinto de cero existen un estado par y un estado impar. Cuando $j = 0$, no tenemos ningún estado. Esto significa que un fotón no puede tener en absoluto un momento cinético igual a cero, de modo que j toma solamente los valores 1, 2, 3, ... La imposibilidad del valor $j = 0$ es evidente, sea dicho de paso, y a priori: la función de onda de un estado con momento cinético igual a cero debe poseer simetría esférica, lo que es evidentemente imposible para una onda transversal.

Para los diferentes estados del fotón se ha adoptado una determinada terminología. Un fotón en un estado con momento cinético j y paridad $(-1)^j$ se llama *2^j-polo eléctrico* (o fotón-*Ej*), y cuando la paridad es $(-1)^{j+1}$, se habla de un *2^j-polo magnético* (o fotón-*Mj*). Así, a un fotón dipolar eléctrico corresponde un estado impar con $j = 1$, a uno cuadripolar eléctrico, un estado par con $j = 2$, a uno dipolar magnético, un estado par con $j = 1$ *.

§ 7. Ondas esféricas de fotones

Una vez determinados los valores posibles del momento cinético de un fotón, hemos de pasar ahora a considerar las funciones de onda que les corresponden**.

Consideremos primero un problema formal: determinar aquellas funciones vectoriales que son funciones propias de los operadores $\mathbf{j}^2$ y j_z; con esto no decidimos de antemano cuáles de estas funciones intervienen precisamente en las funciones de onda del fotón que nos interesan y no tenemos en cuenta la condición de transversalidad.

Buscaremos las funciones en la representación de impulsos. El operador de coordenadas en esta representación es $\mathbf{r} = i\partial/\partial\boldsymbol{k}$ [véase III (15, 12)]. El operador de momento cinético orbital se escribe, en cambio,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}\times\boldsymbol{k} = -i\,\boldsymbol{k}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}},$$

es decir, difiere del operador momento cinético en la representación de coordenadas tan sólo en la substitución de $\boldsymbol{r}$ por $\boldsymbol{k}$. Por consiguiente, la solución del problema planteado es la misma formalmente en ambas representaciones.

---

* Estos nombres corresponden a la terminología de la teoría clásica de la radiación. Veremos más adelante (§ 46, 47) que la radiación de fotones de tipos eléctrico y magnético viene determinada por los correspondientes momentos eléctricos y magnéticos de un sistema de cargas.

** El primero en abordar este problema fue Heitler (*W. Heitler*, 1936). La forma de resolución que se expone se debe a V. B. Berestetskiĭ (1947).

Designaremos las funciones propias buscadas por $\boldsymbol{Y}_{jm}$ y las llamaremos *vectores esféricos*. Estos deben cumplir las ecuaciones

$$\mathbf{j}^2 \boldsymbol{Y}_{jm} = j(j+1)\,\boldsymbol{Y}_{jm}, \qquad \mathrm{j}_z \boldsymbol{Y}_{jm} = m\,\boldsymbol{Y}_{jm} \tag{7.1}$$

(el eje z es una dirección orientada dada en el espacio). Demostremos que esta propiedad la posee una función arbitraria de la forma $\boldsymbol{a}Y_{jm}$, donde $\boldsymbol{a}$ es un cierto vector formado a partir de las componentes del vector unitario $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ e Y_{jm} son los armónicos esféricos ordinarios (escalares). En todo lo que sigue, éstas se definen de acuerdo con III, § 28:

$$Y_{lm}(\boldsymbol{n}) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-|m|)!}{4\pi\,(l+|m|)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \tag{7.2}$$

(θ, φ son las coordenadas esféricas de la dirección $\boldsymbol{n}$) *.

Para ello recordemos la regla de conmutación III (29,4):

$$\{\mathrm{l}_i,\ a_k\}_- = ie_{ikl}a_l.$$

El segundo miembro de esta igualdad se puede escribir en la forma $(-\mathrm{s}_i\, a_k)$, donde s es el operador de spin 1 (la acción de este operador sobre una función vectorial se define precisamente por la igualdad $\mathrm{s}_i\, a_k = -ie_{ikl}a_l$; véase III, § 58, problema 2). Tenemos, por lo tanto,

$$\mathrm{l}_i a_k - a_k \mathrm{l}_i = -\mathrm{s}_i a_k.$$

Utilizando esta igualdad, se encuentra

$$\mathrm{j}_i a_k = (\mathrm{l}_i + \mathrm{s}_i)\, a_k = a_k \mathrm{l}_i.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{j}^2(\boldsymbol{a}Y_{jm}) = \boldsymbol{a}\mathbf{l}^2 Y_{jm}, \quad \mathrm{j}_z(\boldsymbol{a}Y_{jm}) = \boldsymbol{a}\mathrm{l}_z Y_{jm}.$$

Pero la función esférica Y_{jm} es función propia de los operadores $\mathbf{l}^2$ y l_z correspondiente a los valores propios $j(j+1)$ y m de estas magnitudes, con lo que llegamos a las igualdades (7.1).

Obtendremos tres tipos esencialmente distintos de vectores esféricos eligiendo como vector $\boldsymbol{a}$ uno de los siguientes vectores**:

* Con vistas a futuras referencias, observemos que el valor de estas funciones para $\theta = 0$ ($\boldsymbol{n}$ a lo largo del eje z) es:

$$Y_{lm}(\boldsymbol{n}_z) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, \delta_{m0}. \tag{7.2a}$$

** El operador $\nabla_{\boldsymbol{n}} \equiv |\boldsymbol{k}|\nabla_{\boldsymbol{k}}$ actúa sobre funciones que dependen tan sólo de la dirección $\boldsymbol{n}$. Tiene únicamente dos componentes (en coordenadas esféricas):

$$\nabla_{\boldsymbol{n}} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

El operador que se representa más abajo por $\Delta_{\boldsymbol{n}}$, es la parte angular del operador de Laplace:

$$\Delta_{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

$$\frac{\nabla_{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{j(j+1)}}, \qquad \frac{\boldsymbol{n}\times\nabla_{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{j(j+1)}}, \qquad \boldsymbol{n}. \tag{7.3}$$

De esta manera, definimos los vectores esféricos como sigue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm} &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\nabla_{\boldsymbol{n}} Y_{jm}, & P&=(-1)^j; \\ \boldsymbol{Y}^{(M)}_{jm} &= \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}, & P&=(-1)^{j+1}; \\ \boldsymbol{Y}^{(L)}_{jm} &= \boldsymbol{n}Y_{jm}, & P&=(-1)^j. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Junto con cada vector se indica su paridad P. Los vectores esféricos de los tres tipos son ortogonales entre sí y de ellos $\boldsymbol{Y}^{(L)}_{jm}$ es longitudinal, e $\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}$, $\boldsymbol{Y}^{(M)}_{jm}$ son transversales con relación a $\boldsymbol{n}$.

Los vectores esféricos se pueden expresar mediante funciones esféricas escalares. Así, los $\boldsymbol{Y}^{(M)}_{jm}$ se expresan mediante funciones esféricas de un único orden $l=j$, e $\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}$, $\boldsymbol{Y}^{(L)}_{jm}$, mediante funciones esféricas de órdenes $l=j\pm 1$. Esta circunstancia era de prever: basta comparar las paridades de los vectores esféricos indicadas en (7.2-4) con la paridad $(-1)^{l+1}$ de un campo vectorial expresada en función de los órdenes de las funciones esféricas contenidas en él.

Los vectores esféricos de cada uno de estos tipos son ortogonales entre sí y están normalizados de acuerdo con

$$\int \boldsymbol{Y}_{jm}\cdot\boldsymbol{Y}^{*}_{j'm'}d\mathrm{o} = \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7.5}$$

Para los vectores $\boldsymbol{Y}^{(L)}_{jm}$ esto es evidente en virtud de la condición de normalización de las funciones esféricas Y_{jm}. Para los vectores $\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}$, la integral de normalización es

$$\frac{1}{j(j+1)}\int \nabla_{\boldsymbol{n}} Y_{jm}\cdot\nabla_{\boldsymbol{n}} Y^{*}_{j'm'}d\mathrm{o} = -\frac{1}{j(j+1)}\int Y^{*}_{j'm'}\Delta_{\boldsymbol{n}} Y_{jm}d\mathrm{o},$$

y dado que $\Delta_{\boldsymbol{n}}Y_{jm} = -j(j+1)Y_{jm}$ obtenemos (7.5). A la misma integral se reduce la normalización de los vectores $\boldsymbol{Y}^{(M)}_{jm}$.

Observemos que sería posible llegar a los vectores esféricos (7.4) incluso sin efectuar la verificación directa que precede de las ecuaciones (7.1) — bastaría para ello apoyarse en consideraciones generales relativas a las propiedades de transformación de las funciones. Tales consideraciones nos condujeron en el párrafo que precede a la conclusión de que una función vectorial de la forma $\boldsymbol{n}\varphi$ corresponde a un valor j del momento cinético que coincide con el orden de las funciones esféricas que intervienen en φ; si se hace simplemente $\varphi = Y_{jm}$, la función $\boldsymbol{n}\varphi$ corresponderá también a un determinado valor m de la proyección del momento. De esta manera, llegamos inmediatamente a los vectores esféricos $\boldsymbol{Y}^{(L)}_{jm}$. Pero los razonamientos expuestos en el § 6 acerca de las propiedades de transformación no cambian si se substituye el factor $\boldsymbol{n}$ en el producto $\boldsymbol{n}\varphi$ por el vector $\nabla_{\boldsymbol{n}}$ o el $\boldsymbol{n}\times\nabla_{\boldsymbol{n}}$; obtenemos así los vectores esféricos de los dos otros tipos.

Volvamos a las funciones de onda del fotón. Para un fotón de tipo eléctrico (*Ej*)

el vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ debe tener paridad $(-1)^j$. Esta paridad la poseen los vectores esféricos $\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}$ e $\boldsymbol{Y}^{(L)}_{jm}$; de ellos, sin embargo, solamente el primero satisface la condición de transversalidad. Para un fotón de tipo magnético (Mj) el vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ debe tener la paridad $(-1)^{j+1}$; esta paridad la tiene tan sólo el vector esférico $\boldsymbol{Y}^{(M)}_{jm}$. Por ello, las funciones de onda del fotón con determinado momento j y proyección del mismo m (y energía ω) son

$$\boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|\boldsymbol{k}| - \omega)\, \boldsymbol{Y}_{jm}(\boldsymbol{n}), \tag{7.6}$$

donde en vez de $\boldsymbol{Y}_{jm}$ hay que escribir $\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}$ o $\boldsymbol{Y}^{(M)}_{jm}$, respectivamente, en el caso de un fotón de tipo eléctrico o magnético; el valor dado de la energía se tiene en cuenta mediante el factor $\delta(|\boldsymbol{k}| - \omega)$.

Las funciones (7.6) están normalizadas por la condición

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \omega\omega' \boldsymbol{A}^*_{\omega' j'm'} \cdot (\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k})\, d^3k = \omega\delta(\omega' - \omega)\, \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7.7}$$

Para las funciones de onda de la representación de coordenadas la condición (7.7) equivale a la condición *

$$\frac{1}{4\pi} \int \{\boldsymbol{E}^*_{\omega' j'm'}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_{\omega jm}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{H}^*_{\omega' j'm'}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{H}_{\omega jm}(\boldsymbol{r})\} d^3x = \omega\delta(\omega' - \omega)\, \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7.8}$$

En efecto, la integral del primer miembro de la igualdad, expresada en función de los potenciales, tiene la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int \boldsymbol{A}^*_{\omega' j'm'}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{r})\, \omega'\omega d^3x.$$

Aquí hay que substituir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{r}) &= \int \boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \\ \boldsymbol{A}^*_{\omega' j'm'}(\boldsymbol{r}) &= \int \boldsymbol{A}^*_{\omega' j'm'}(\boldsymbol{k}')\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Hecha la substitución, la integración respecto de $\boldsymbol{x}$ da la función δ, lo que simplifica la integral respecto de $\boldsymbol{k}$, y el resto se reduce a la forma (7.7).

Hasta aquí hemos supuesto que los potenciales obedecían al contraste de transversalidad, en el cual el potencial escalar $\Phi = 0$. En diferentes aplicaciones, sin embargo, pueden resultar más convenientes otros criterios de contraste de la onda esférica.

La transformación admisible de los potenciales toma la forma siguiente en la representación de impulsos:

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{n} f(\boldsymbol{k}), \quad \Phi \to \Phi + f(\boldsymbol{k}),$$

* Esta condición es del mismo tipo que la (2.22). La aparición del factor $\delta(\omega' - \omega)$ en el segundo miembro de la igualdad se debe al hecho de que aquí se considera un campo (onda esférica) en todo el espacio infinito en vez de un campo en un volumen finito $V = 1$.

donde $f(\boldsymbol{k})$ es una función arbitraria. Elijámosla en el presente caso de tal manera que los nuevos potenciales se expresen mediante las mismas funciones esféricas y que, como antes, posean una paridad determinada. Para un fotón de tipo eléctrico, estas condiciones limitan la elección de los potenciales a las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{(E)}_{\omega jm}(\boldsymbol{k}) &= \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\,\delta(|\boldsymbol{k}|-\omega)(\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}+C\boldsymbol{n}Y_{jm}), \\ \Phi^{(E)}_{\omega jm}(\boldsymbol{k}) &= \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\,\delta(|\boldsymbol{k}|-\omega)\,CY_{jm}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

donde C es una constante arbitraria. En cambio, para un fotón de tipo magnético, la adición de dicho vector a $\boldsymbol{A}^{(M)}(\boldsymbol{k})$ lo privaría de su paridad definida y, por ello, en las mismas condiciones, la elección hecha en (7.6) resulta la única posible.

La probabilidad de que un fotón de momento y paridad determinados se registre moviéndose en la dirección $\boldsymbol{n}$ situada en el elemento de ángulo sólido $d\mathrm{o}$, de acuerdo con (3.5) y (7.6) es igual a

$$w(\boldsymbol{n})\,d\mathrm{o} = |\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}(\boldsymbol{n})|^2\,d\mathrm{o}. \tag{7.11}$$

Esta expresión es la correspondiente a un fotón de tipo E. Pero dado que $|\boldsymbol{Y}^{(M)}_{jm}|^2 = |\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}|^2$, las distribuciones de probabilidades $w(\boldsymbol{n})$ para los fotones de ambos tipos son las mismas.

El cuadrado del módulo $|\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm}|^2$ no depende del acimut φ (los factores $e^{\pm im\varphi}$ en las funciones esféricas desaparecen). Por ello, la distribución de probabilidad $w(\boldsymbol{n})$ es simétrica respecto del eje z. Además, dado que cada uno de los vectores esféricos poseen una determinada paridad, los cuadrados de sus módulos son pares respecto de la inversión, es decir, respecto de la substitución del ángulo polar $\theta \to \pi - \theta$; esto significa que la función $w(\theta)$, desarrollada en polinomios de Legendre, contiene solamente polinomios de orden par. La determinación de los coeficientes de dicho desarrollo se reduce al cálculo de integrales de productos de tres armónicos esféricos seguido de la sumación respecto de las componentes. Una y otra operación se efectúan mediante las fórmulas obtenidas en III, §§ 107-108 y conducen al siguiente resultado:

$$w(\theta) = (-1)^{j+1}\frac{(2j+1)^{3/2}}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\begin{pmatrix} j & j & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} j & j & 1 \\ j & j & 2n \end{Bmatrix}P_{2n}(\cos\theta). \tag{7.12}$$

Expresemos, finalmente, las componentes de los vectores esféricos en forma de desarrollos en armónicos esféricos. Para ello utilizaremos las « componentes esféricas » de un vector definidas en III, § 107; las componentes f_λ del vector $\boldsymbol{f}$ son:

$$f_0 = if_z, \quad f_{+1} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(f_x + if_y), \quad f_{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(f_x - if_y). \tag{7.13}$$

Si se introducen los « versores circulares »:

$$e^{(0)} = ie^{(z)}, \quad e^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(e^{(x)} + ie^{(y)}), \quad e^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{(x)} - ie^{(y)}) \tag{7.14}$$

($e^{(x,y,z)}$ son los versores de los ejes x, y, z), se tendrá

$$f = \sum_{\lambda} (-1)^{1-\lambda} f_{-\lambda} e^{(\lambda)}, \quad f_{\lambda} = (-1)^{1-\lambda} f \cdot e^{(-\lambda)*} = f \cdot e^{(\lambda)}. \tag{7.15}$$

Las componentes esféricas de los vectores esféricos se expresan mediante símbolos-3j en función de los armónicos esféricos por las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}
(-1)^{j+m+\lambda+1} (\boldsymbol{Y}^{(E)}_{jm})_{\lambda} &= -\sqrt{j} \begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j+1,\, m+\lambda} + \\
&\quad + \sqrt{j+1} \begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j-1,\, m+\lambda}, \\
(-1)^{j+m+\lambda+1} (\boldsymbol{Y}^{(M)}_{jm})_{\lambda} &= -\sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j,\, m+\lambda}, \qquad (7.16) \\
(-1)^{j+m+\lambda+1} (\boldsymbol{Y}^{(L)}_{jm})_{\lambda} &= \sqrt{j+1} \begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j+1,\, m+\lambda} + \\
&\quad + \sqrt{j} \begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j-1,\, m+\lambda}
\end{aligned}$$

Estas fórmulas se deducen como sigue. Cada uno de los tres vectores esféricos es de la forma $\boldsymbol{Y}_{jm} = \boldsymbol{a} Y_{jm}$, donde $\boldsymbol{a}$ es uno de los tres vectores (7.3). Por ello

$$\boldsymbol{Y}_{jm} = \sum_{lm'} \langle lm' \,|\, \boldsymbol{a} \,|\, jm \rangle \, Y_{lm'},$$

y el problema queda reducido a hallar los elementos de matriz de los vectores $\boldsymbol{a}$ respecto de las funciones propias del momento cinético orbital. Según III (107,6) tenemos

$$\langle lm' \,|\, a_{\lambda} \,|\, jm \rangle = i (-1)^{j_{\max} - m'} \begin{pmatrix} l & 1 & j \\ -m' & \lambda & m \end{pmatrix} \langle l \,\|\, a \,\|\, j \rangle,$$

donde, $j_{\max}$ es el mayor de los números l y j. Por consiguiente, basta conocer los elementos de matriz reducidos diferentes de cero $\langle l \,\|\, a \,\|\, j \rangle$. Para ellos se tienen las fórmulas:

$$\begin{aligned}
\langle l-1 \,\|\, n \,\|\, l \rangle &= \langle l \,\|\, n \,\|\, l-1 \rangle^* = i\sqrt{l}, \\
\langle l \,\|\, \nabla_n \,\|\, l-1 \rangle &= i(l-1)\sqrt{l}, \\
\langle l-1 \,\|\, \nabla_n \,\|\, l \rangle &= i(l+1)\sqrt{l}, \\
\langle l \,\|\, [n \times \nabla_n] \,\|\, l \rangle &= i\sqrt{l(l+1)(2l+1)}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

§ 8. Polarización del fotón

El vector polarización $\boldsymbol{e}$ representa para el fotón el papel de « parte espinorial » de la función de onda (con las reservas expresadas en el § 6 al tratar del concepto de spin del fotón).

Los diferentes casos que pueden presentarse para la polarización del fotón en nada se distinguen de los tipos posibles de polarización de una onda electromagnética clásica (véase II, § 48).

La polarización arbitraria $\boldsymbol{e}$ cabe representarla como superposición de dos polarizaciones $\boldsymbol{e}^{(1)}$ y $\boldsymbol{e}^{(2)}$ elegidas de manera arbitraria, si bien ortogonales entre sí ($\boldsymbol{e}^{(1)} \cdot \boldsymbol{e}^{(2)*} = 0$). En la descomposición

$$\boldsymbol{e} = e_1 \boldsymbol{e}^{(1)} + e_2 \boldsymbol{e}^{(2)} \tag{8.1}$$

los cuadrados de los módulos de los coeficientes e_1 y e_2 determinan las probabilidades de que el fotón tenga la polarización $\boldsymbol{e}^{(1)}$ o la $\boldsymbol{e}^{(2)}$.

Para estas últimas se pueden elegir dos polarizaciones lineales perpendiculares entre sí. También es posible descomponer una polarización arbitraria en dos polarizaciones circulares con sentidos de rotación opuestos. Los vectores de polarización positiva (levógira) y negativa (dextrógira) los designaremos por $\boldsymbol{e}^{(+1)}$ y $\boldsymbol{e}^{(-1)}$, respectivamente; en el sistema de coordenadas $\xi\eta\zeta$, con el eje ζ en el sentido de la propagación del fotón $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$, se tiene

$$\boldsymbol{e}^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}^{(\xi)} + i\boldsymbol{e}^{(\eta)}), \quad \boldsymbol{e}^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}^{(\xi)} - i\boldsymbol{e}^{(\eta)}). \tag{8.2}$$

La posibilidad de que el fotón tenga (para un impulso dado) dos polarizaciones diferentes significa, con otras palabras, que cada valor propio del impulso es doblemente degenerado. Esta circunstancia está íntimamente ligada con la igualdad a cero de la masa del fotón.

Para una partícula que se mueve libremente y cuya masa no es nula, existe siempre un sistema de reposo. Es claro que precisamente en este sistema de referencia se manifiestan las propiedades intrínsecas de simetría de la partícula como a tal. Desde este punto de vista, hay que considerar la simetría respecto de todas las posibles rotaciones en torno de un centro (es decir, respecto de todo el grupo de simetría esférica). Elemento característico de las propiedades de simetría de una partícula respecto de este grupo es su spin s, que determina la multiplicidad de la degeneración (el número $2s + 1$ de funciones de onda diferentes que se transforman entre sí). En particular, a una partícula con función de onda vectorial (tres componentes) corresponde el spin 1.

En cambio, para una partícula cuya masa es igual a cero no existe un sistema de reposo —en cualquier sistema de referencia se mueve con la velocidad de la luz—. Con relación a una tal partícula existen siempre una dirección y sentido privilegiados en el espacio —la dirección y sentido del vector impulso $\boldsymbol{k}$ (eje ζ)—. Es claro que, en

este caso, no existe simetría respecto de todo el grupo de las rotaciones tridimensionales y que sólo cabe hablar de simetría axil en torno del eje privilegiado.

En el caso de simetría axil, únicamente se conserva la *helicidad* de la partícula — es decir, la proyección del momento cinético sobre el eje ζ—; la designaremos por λ*. Si también se impone la condición de simetría respecto de las reflexiones en planos que pasan por el eje ζ, los estados que difieren entre sí en el signo de λ corresponderán a un mismo valor del impulso; para $\lambda \neq 0$ tendremos, por lo tanto, una doble degeneración**. Un estado del fotón con determinado impulso corresponde a uno de los tipos de tales estados doblemente degenerados. Dicho estado se describe por una función de onda « espinorial » representada por el vector $\boldsymbol{e}$ en el plano $\xi\eta$; las dos componentes de este vector se transforman entre sí en todas las rotaciones en torno del eje ζ y en las reflexiones en planos que pasan por este eje.

Existe una determinada correspondencia entre los diferentes casos de polarización del fotón y los posibles valores de su helicidad. Esta correspondencia se puede establecer de acuerdo con las fórmulas III (58.3) que ligan las componentes de una función de onda vectorial con las componentes del correspondiente espinor de segundo orden***. A las proyecciones $\lambda = +1$ o -1 corresponden los vectores $\boldsymbol{e}$ con una sola componente distinta de cero $e_\xi - ie_\eta$ o $e_\xi + ie_\eta$, es decir, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{(+1)}$ o $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{(-1)}$, respectivamente. Con otras palabras, los valores $\lambda = +1$ y -1 corresponden a la polarización circular positiva y negativa del fotón (en el § 16 se obtendrá este mismo resultado por cálculo directo de las funciones propias del operador de proyección del spin).

Así, pues, la proyección del momento del fotón sobre la dirección de su movimiento puede tener solamente dos valores (± 1); el valor 0 es imposible.

Un estado de fotón con determinado impulso y polarización es un estado puro (en el sentido explicado en III, § 14); este estado se representa por una función de onda y corresponde a una descripción cuántica completa del estado de la partícula (del fotón). También son posibles estados del fotón del tipo « mezcla » que corresponden a una descripción incompleta, y que se representan no por una función de onda, sino tan sólo por una matriz densidad.

Consideremos un estado de fotón que es una mezcla respecto de su polarización, pero que corresponde a un valor determinado del impulso $\boldsymbol{k}$. En un estado de este tipo (llamado *estado de polarización parcial*) existe una función de onda « de las coordenadas »****.

La matriz densidad de polarización del fotón constituye un tensor de segundo orden $\rho_{\alpha\beta}$ en un plano perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ (plano $\xi\eta$; los índices α, β toman sólo dos valores). Este tensor es hermítico:

---

* Para distinguirla de la proyección del momento m sobre una dirección dada (eje z) en el espacio, de la que se trataba en el párrafo precedente.

** Recordaremos que así se clasifican los términos electrónicos de una molécula diatómica (III, § 78).

*** Recordaremos que a las componentes de la función de onda, en tanto que amplitudes de probabilidad de los diferentes valores de la proyección del momento de la partícula (de los que aquí se trata precisamente), corresponden las componentes contravariantes de un espinor.

**** En III, § 59, se consideró la matriz análoga para el electrón en la teoría no-relativista.

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho^*_{\beta\alpha}, \tag{8.3}$$

y está normalizado por la condición

$$\rho_{\alpha\alpha} \equiv \rho_{11} + \rho_{22} = 1. \tag{8.4}$$

En virtud de (8.3) las componentes diagonales ρ_{11} y ρ_{22} son reales, viniendo determinada la una por la otra por la condición (8.4). En cambio, la componente ρ_{12} es compleja y $\rho_{21} = \rho^*_{12}$. La matriz densidad, por consiguiente, queda totalmente caracterizada por tres parámetros reales.

Si se conoce la matriz densidad de polarización, se puede hallar la probabilidad de que el fotón tenga una polarización determinada cualquiera $\boldsymbol{e}$. Esta probabilidad se determina por la « proyección » del tensor $\rho_{\alpha\beta}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{e}$, es decir, por la cantidad

$$\rho_{\alpha\beta} e^*_\alpha e_\beta. \tag{8.5}$$

Así, las componentes ρ_{11} y ρ_{22} representan las probabilidades de las polarizaciones lineales a lo largo de los ejes ξ y η. La proyección sobre los vectores (8.2) da las probabilidades de las dos polarizaciones circulares:

$$\frac{1}{2}[1 \pm i(\rho_{12} - \rho_{21})]. \tag{8.6}$$

Las propiedades del tensor $\rho_{\alpha\beta}$, por su forma y por su naturaleza, coinciden con las propiedades del tensor $J_{\alpha\beta}$ que describe la polarización parcial de la luz en la teoría clásica (véase II, § 50). Recordaremos aquí algunas de estas propiedades.

En el caso de un estado puro con polarización determinada $\boldsymbol{e}$, el tensor $\rho_{\alpha\beta}$ se reduce a los productos de las componentes del vector $\boldsymbol{e}$:

$$\rho_{\alpha\beta} = e_\alpha e^*_\beta. \tag{8.7}$$

En este caso, el determinante $|\rho_{\alpha\beta}| = 0$. En el caso opuesto de un fotón no polarizado, todas las direcciones de polarización son igualmente probables, es decir,

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}; \tag{8.8}$$

se tiene entonces $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

En el caso general, conviene describir la polarización parcial mediante los tres parámetros reales de Stokes ξ_1, ξ_2, ξ_3*, en función de los cuales la matriz densidad se expresa en la forma

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

Los tres parámetros toman valores entre -1 y $+1$. En el estado no polarizado, es $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; para una polarización total del fotón se tiene $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$.

El parámetro ξ_3 caracteriza la polarización lineal a lo largo del eje ξ o η; la

* ¡No se confunda el símbolo de los parámetros con el símbolo del eje ξ!

probabilidad de que el fotón esté polarizado linealmente a lo largo de estos ejes es igual a $(1 + \xi_3)/2$ o $(1 - \xi_3)/2$. Los valores $\xi_3 = +1$ o -1 corresponden, por ello, a la polarización total en estas direcciones.

El parámetro ξ_1 caracteriza la polarización lineal a lo largo de direcciones que forman los ángulos $\varphi = \pi/4$ o $\varphi = -\pi/4$ con el eje ξ. La probabilidad de que el fotón tenga una polarización lineal en estas direcciones es igual a $(1 + \xi_1)/2$ o $(1 - \xi_1)/2$, respectivamente; es fácil comprobarlo proyectando el tensor $\rho_{\alpha\beta}$ sobre las direcciones $\boldsymbol{e} = (1, \pm 1)/\sqrt{2}$.

Finalmente, el parámetro ξ_2 es el grado de polarización circular; según (8.6), la probabilidad de que el fotón tenga una polarización circular positiva o negativa es igual a $(1 + \xi_2)/2$ o a $(1 - \xi_2)/2$. Dado que las dos polarizaciones corresponden a helicidades $\lambda = \pm 1$, es claro que, en el caso general, ξ_2 es el valor medio de la helicidad del fotón. Observemos también que en el caso de un estado puro con polarización $\boldsymbol{e}$ es

$$\xi_2 = i(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}^*) \cdot \boldsymbol{n}. \tag{8.10}$$

Recordemos (véase II, § 50) que respecto de las transformaciones de Lorentz las magnitudes ξ_2 y $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$ son invariantes.

Más adelante tendremos que abordar la cuestión de cómo se comportan los parámetros de Stokes respecto de la operación de inversión del tiempo. Es fácil ver que tales parámetros son invariantes respecto de esta transformación. Esta propiedad no depende, evidentemente, de la naturaleza del estado de polarización y, por ello, basta comprobar que se cumple aunque sólo sea en el caso de un estado puro. A la inversión del tiempo corresponde en mecánica cuántica la substitución de la función de onda por su conjugada compleja (III, § 18). Para una onda plana polarizada, esto significa que hay que efectuar la substitución *

$$\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{e} \to -\boldsymbol{e}^*. \tag{8.11}$$

En una transformación de este tipo, la parte simétrica de la matriz densidad

$$\frac{1}{2}(e_\alpha e_\beta^* + e_\beta e_\alpha^*),$$

no cambia, y con ella tampoco cambian los parámetros ξ_1 y ξ_3. En cuanto al parámetro ξ_2, que en dicha transformación no cambia se ve teniendo en cuenta (8.10); ello es también evidente por el propio sentido de ξ_2 como valor medio de la helicidad. En efecto, la helicidad es la proyección del momento $\boldsymbol{j}$ sobre la dirección $\boldsymbol{n}$, es decir, el producto $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}$; pero la inversión del tiempo cambia el signo de ambos vectores.

* El cambio adicional del signo de $\boldsymbol{e}$ procede de que la inversión del tiempo cambia el signo del potencial vector del campo electromagnético. Por el contrario, el potencial escalar no cambia de signo; por esto para el 4-vector $\boldsymbol{e}$ la inversión del tiempo se traduce en la transformación

$$(e_0, \boldsymbol{e}) - (e_0^*, -\boldsymbol{e}^*). \tag{8.11a}$$

En los cálculos que siguen necesitaremos la matriz densidad del fotón escrita en forma cuadridimensional, es decir, en forma de 4-tensor $\rho_{\mu\nu}$. Para un fotón polarizado, descrito por el 4-vector e_μ, es natural definir este tensor mediante la relación

$$\rho_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu^*. \tag{8.12}$$

En el caso del contraste de transversalidad tridimensional se tiene $e = (0, \boldsymbol{e})$, y si uno de los ejes de coordenadas espaciales se elije a lo largo de $\boldsymbol{n}$, las componentes no nulas de este 4-tensor coinciden con (8.7).

Para un fotón no polarizado, en el contraste de transversalidad tridimensional se tiene el tensor $\rho_{\mu\nu}$ con componentes

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k), \qquad \rho_{0i} = \rho_{i0} = \rho_{00} = 0 \tag{8.13}$$

[si uno de los ejes coincide con la dirección de $\boldsymbol{n}$, encontramos de nuevo (8.8)]. Con todo, la utilización directa del tensor $\rho_{\mu\nu}$ en esta forma tridimensional resultaría incómoda. Pero podemos recurrir a una transformación de contraste; para la matriz densidad, ésta equivale a una transformación de la forma

$$\rho_{\mu\nu} \to \rho_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \tag{8.14}$$

donde χ_μ son funciones arbitrarias. Haciendo

$$\chi_0 = -\frac{1}{4\omega}, \qquad \chi_i = \frac{k_i}{4k^2},$$

obtendremos en vez de (8.13) la expresión cuadridimensional simple

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \tag{8.15}$$

La representación cuadridimensional de la matriz densidad de un fotón parcialmente polarizado se obtiene fácilmente escribiendo antes el tensor bidimensional (8.9) en forma tridimensional:

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(1)} + e_i^{(2)} e_k^{(2)}) + \frac{\xi_1}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(2)} + e_i^{(2)} e_k^{(1)}) - \\ - \frac{i\xi_2}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)}) + \frac{\xi_3}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(1)} - e_i^{(2)} e_k^{(2)}),$$

donde $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ son vectores unitarios, versores de los ejes ξ y η. La generalización requerida se consigue substituyendo estos 3-vectores por 4-vectores reales unitarios de tipo espacial $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ortogonales entre sí y al 4-impulso del fotón k:

$$\begin{aligned} e^{(1)\,2} = e^{(2)\,2} &= -1, \\ e^{(1)} e^{(2)} &= 0, \\ e^{(1)} k = e^{(2)} k &= 0. \end{aligned} \tag{8.16}$$

En el sistema de referencia particular: $e^{(1)} = (0, \boldsymbol{e}^{(1)})$, $e^{(2)} = (0, \boldsymbol{e}^{(2)})$. De esta manera, la matriz densidad del fotón se escribe en cuatro dimensiones

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}) + \frac{\xi_1}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}) - \\ - \frac{i\xi_2}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}) + \frac{\xi_3}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}). \quad (8.17)$$

La conveniencia de tal o cual elección de los 4-vectores $e^{(1)}$ y $e^{(2)}$ depende de las condiciones concretas del problema considerado.

Hay que tener en cuenta que las condiciones (8.16) no fijan la elección de $e^{(1)}$ y $e^{(2)}$ de manera unívoca. Si un 4-vector e_μ cualquiera satisface estas condiciones, a ellas satisfará también un 4-vector arbitrario de la forma $e_\mu + \chi k_\mu$ (en virtud de que $k^2 = 0$). Esta falta de unicidad está ligada con la correspondiente a la matriz densidad y asociada con las transformaciones de contraste.

El primer término de (8.17) corresponde a un estado no polarizado. Por ello cabe substituirlo, según (8.15), por $-(1/2)g_{\mu\nu}$. Esta substitución de nuevo equivale a una cierta transformación de contraste.

Al operar con un 4-tensor de la forma (8.17), expresado en función de dos 4-vectores independientes, es cómodo aplicar el siguiente método formal. Escribiendo el tensor (8.17) en la forma

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{a,b=1}^{2} \rho^{(ab)} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)},$$

representaremos los coeficientes $\rho^{(ab)}$ por una matriz de segundo orden

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(11)} & \rho^{(12)} \\ \rho^{(21)} & \rho^{(22)} \end{pmatrix}$$

Como toda matriz hermítica de segundo orden, es posible descomponerla en cuatro matrices 2×2 independientes — las matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z y la matriz unidad 1. Esta descomposición tiene la forma

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \qquad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (8.18)$$

como es fácil comprobar por comparación directa con (8.17) y utilizando las conocidas expresiones de las matrices de Pauli (18.5) (el hecho de reunir las tres magnitudes ξ_1, ξ_2, ξ_3 en un « vector » $\boldsymbol{\xi}$ tiene, naturalmente, un sentido puramente formal con el que se persigue tan sólo la comodidad de escritura).

PROBLEMA

Escribir la matriz densidad del fotón en la representación en la que los «vectores de base» del sistema de coordenadas son los versores circulares (8.2).

Solución. Las componentes del tensor $\rho'_{\alpha\beta}$ en los nuevos ejes (α, $\beta = \pm 1$) se obtienen proyectando el tensor (8.9) sobre los versores (8.2):

$$\rho'_{11} = \rho_{\alpha 3} e_\alpha^{(+1)*} e_\beta^{(+1)}, \quad \rho'_{1-1} = \rho_{\alpha\beta} e_\alpha^{(+1)*} e_\beta^{(-1)}, \ \ldots$$

$$\rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_2 & -\xi_3 + i\xi_1 \\ -\xi_3 - i\xi_1 & 1-\xi_2 \end{pmatrix}$$

§ 9. Sistema de dos fotones

Razonamientos análogos a los desarrollados en el § 6 permiten también determinar el número de estados posibles en el caso más complicado de un sistema de dos fotones (L. Landau, 1948).

Consideraremos los fotones en el sistema de su « centro de masa », es decir, en un sistema en que los impulsos de los fotones son $\boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2 \equiv \boldsymbol{k}$*. La función de onda (en la representación de impulsos) de un sistema constituido por dos fotones puede representarse como tensor tridimensional de segundo orden $A_{ik}(\boldsymbol{n})$, forma bilineal de las componentes de las funciones de onda vectoriales de ambos fotones; cada uno de los índices de este tensor corresponde a uno de ellos ($\boldsymbol{n}$ es el vector unitario correspondiente a $\boldsymbol{k}$). Por otra parte, la transversalidad de cada uno de los fotones se expresa por la ortogonalidad del tensor A_{ik} al vector $\boldsymbol{n}$:

$$A_{il} n_l = 0, \qquad A_{lk} n_l = 0. \tag{9.1}$$

La permutación de los dos fotones entre sí significa la permutación de los índices del tensor A_{ik} junto con el cambio de signo de $\boldsymbol{n}$. Dado que los fotones obedecen a la estadística de Bose, se tiene

$$A_{ik}(-\boldsymbol{n}) = A_{ki}(\boldsymbol{n}) \tag{9.2}$$

El tensor A_{ik}, en general, no es simétrico respecto de sus índices. Descompongámoslo en una parte simétrica (s_{ik}) y una parte antisimétrica (a_{ik}): $A_{ik} = s_{ik} + a_{ik}$. La relación (9.2), y también las condiciones de ortogonalidad (9.1), deben cumplirla, evidentemente, cada una de estas dos partes por separado. De aquí se sigue que

$$s_{ik}(-\boldsymbol{n}) = s_{ik}(\boldsymbol{n}), \tag{9.3}$$

$$a_{ik}(-\boldsymbol{n}) = -a_{ik}(\boldsymbol{n}). \tag{9.4}$$

La inversión del sistema de coordenadas no cambia de por sí el signo de las componentes del tensor de segundo orden, pero cambia el signo de $\boldsymbol{n}$. Por ello, de (9.3) resulta que la función de onda s_{ik} es simétrica respecto de la inversión, es decir, corresponde a estados pares del sistema de fotones; la función de onda a_{ik}, en cambio, corresponde a estados impares.

Un tensor antisimétrico de segundo orden es equivalente (dual) a un vector axil $\boldsymbol{a}$ cuyas componentes se expresan en función de las componentes del tensor

* Un tal sistema de referencia existe siempre con la única excepción del caso de dos fotones que se mueven paralelamente el uno al otro y en el mismo sentido. El impulso total $\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$ y la energía total $\omega_1 + \omega_2$ de tales fotones están ligados entre sí por la misma relación que para un solo fotón y, en consecuencia, no existe un sistema de referencia en el que sea $\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = 0$.

mediante la relación $a_i = (1/2)e_{ikl}a_{kl}$, donde e_{ikl} es el tensor unitario antisimétrico (véase II, § 6). Que el tensor a_{kl} sea ortogonal a $\boldsymbol{n}$ significa que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ son paralelos*. Podemos escribir, por lo tanto, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\varphi(\boldsymbol{n})$, donde φ es un escalar; de acuerdo con (9.4) debe ser $\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n})$ y, por consiguiente,

$$\varphi(-\boldsymbol{n}) = \varphi(\boldsymbol{n}).$$

Esta igualdad nos dice que el escalar φ puede construirse linealmente a partir de armónicos esféricos de orden L par exclusivamente (incluido el de orden cero).

Vemos, pues, que el tensor antisimétrico a_{ik} es equivalente por sus propiedades de transformación (respecto de las rotaciones) a un escalar (cf. la nota en la pág. 21). Atribuyendo a este último el « spin » 0, se encuentra que el momento cinético del estado es $J = L$. Así, pues, el tensor a_{ik} corresponde a los estados impares de los sistemas de fotones con momento J par.

Pasemos al tensor simétrico s_{ik}. Dado que éste es par respecto del cambio de signo de $\boldsymbol{n}$, le corresponden estados pares del sistema de fotones. Pero de aquí se sigue que todas las componentes s_{ik} se expresan mediante armónicos esféricos de orden L par (incluido el valor $L = 0$). Un tensor simétrico de segundo orden s_{ik} arbitrario se reduce, como es sabido, a un escalar (s_{ii}) y a un tensor simétrico (s'_{ik}) de traza nula ($s'_{ii} = 0$)

Al escalar s_{ii} se hace corresponder el « spin » 0 y, por ello, el momento cinético de los estados que le corresponden es $J = L$, es decir, es par. En cambio, al tensor s'_{ik} corresponde el «spin» 2 (véase III, § 58). Sumando según la regla de composición de los momentos este « spin » con el « momento cinético orbital » L, se encuentra que para un valor dado $J \neq 0$ par son posibles tres estados (con $L = J \pm 2, J$), y para $J \neq 1$ impar, dos estados (con $L = J \pm 1$). Constituye una excepción el caso $J = 0$ con un solo estado ($L = 2$) y $J = 1$ con un solo estado ($L = 2$).

En todo esto, sin embargo, no se tuvo todavía en cuenta la condición de ortogonalidad del tensor s_{ik} respecto de $\boldsymbol{n}$. Por consiguiente, del número de estados que hemos obtenido hay que restar aún el número de estados a los que corresponde un tensor simétrico de segundo orden « paralelo » al vector $\boldsymbol{n}$. Un tensor de este tipo (designémoslo por s''_{ik}) se puede representar en la forma

$$s''_{ik} = n_i b_k + n_k b_i,$$

donde $\boldsymbol{b}$ es un cierto vector. Según (9.3) este vector debe cumplir la condición $\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{b}(\boldsymbol{n})$. Así, pues, el tensor s''_{ik} responsable de los estados « sobrantes » es equivalente a un vector impar. Este vector debe expresarse, por consiguiente, en función de armónicos esféricos de orden L impar exclusivamente. Observando también que a un vector corresponde el « spin » 1, llegamos a la conclusión de que,

* Tenemos: $a_{ik} = e_{ikl}a_l$ y la condición de ortogonalidad dará

$$a_{ik}n_k = e_{ikl}a_l n_k = [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}]_i = 0.$$

para cada momento $J \neq 0$ par, son posibles dos estados (con $L = J \pm 1$), y para cada J impar, un estado solamente (con $L = J$); caso especial lo representa el de $J = 0$ con sólo un estado ($L = 1$).

Reuniendo los resultados a que hemos llegado, se obtiene la tabla siguiente que da el número de estados posibles, pares e impares, de un sistema de dos fotones (con impulso total igual a cero) para diferentes valores del momento cinético total J:

J	Pares	Impares
0	1	1
1	—	—
$2k$	2	1
$2k+1$	1	—

(9.5)

(k es un número entero positivo diferente de cero). Vemos así que para J impar no existen estados impares y que el valor $J = 1$ es del todo imposible.

La función de onda de un sistema de dos fotones A_{ik} determina la correlación de sus polarizaciones. La probabilidad de que dos fotones tengan simultáneamente determinadas polarizaciones $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ es proporcional a

$$A_{ik}e_{1i}^{*}e_{2k}^{*}.$$

Con otras palabras, si se da la polarización $\boldsymbol{e}_1$ de un fotón, la polarización del segundo $\boldsymbol{e}_2$ es proporcional a

$$e_{2k} \backsim A_{ik}e_{1i}^{*}. \tag{9.6}$$

En los estados impares del sistema, A_{ik} coincide con el tensor antisimétrico a_{ik}. En estas condiciones

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1^{*} \backsim a_{ik}e_{1i}^{*}e_{1k}^{*} = 0,$$

es decir, las polarizaciones de ambos fotones son ortogonales entre sí. En el caso de polarización lineal esto significa que sus direcciones son perpendiculares, y en el caso de polarizaciones circulares, que éstas son de sentidos opuestos.

Un estado par con $J = 0$ se representa por un tensor simétrico que se reduce a un escalar

$$s_{ik} = \text{const} \cdot (\delta_{ik} - n_i n_k).$$

Por ello, de (9.6) se sigue entonces que $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2^{*}$. En el caso de polarización lineal, esto significa que las dos direcciones son paralelas, y en el caso de polarizaciones circulares, de nuevo significa que sus sentidos son opuestos. Esta última circunstancia era de prever: en cualquier caso, cuando es $J = 0$ debe ser igual a cero la suma de las proyecciones de los momentos de los impulsos sobre una misma dirección $\boldsymbol{k}$ (en cambio, las proyecciones sobre las direcciones opuestas de $\boldsymbol{k}_1$ y $\boldsymbol{k}_2$, es decir, las helicidades, son entonces las mismas).

CAPÍTULO 2

BOSONES

§ 10. La ecuación de onda para partículas de spin 0

En el capítulo primero se puso de manifiesto cómo es posible construir el modelo cuántico de un campo electromagnético libre partiendo, al hacerlo, de las propiedades conocidas del campo en el límite clásico y apoyándonos en las ideas de la mecánica cuántica ordinaria. El esquema así obtenido del campo como sistema de fotones posee muchos rasgos que pueden trasladarse también a la descripción relativista de las partículas en la teoría cuántica.

El campo electromagnético es un sistema con un número infinito de grados de libertad. Para él no existe la ley de conservación del número de partículas (de fotones), y del conjunto de sus estados posibles forman parte estados con un número arbitrario de partículas*. Pero en la teoría relativista la misma propiedad deben poseerla, en general, también los sistemas de partículas cualesquiera. La conservación del número de partículas en la teoría no-relativista está ligada con la ley de conservación de la masa: la suma de las masas (de las masas en reposo) de las partículas no cambia en sus interacciones; pero la conservación de la suma de las masas en un sistema de electrones significa a la vez la invariabilidad del número de los mismos. En mecánica relativista, en cambio, no existe una ley de conservación de la masa; debe conservarse solamente la energía total del sistema (que incluye también la energía de reposo de las partículas). Por ello, el número de partículas no tiene ya por qué conservarse, y precisamente por esto cualquier teoría relativista de las partículas debe ser una teoría de sistemas con un número infinito de grados de libertad. Dicho de otra manera, una tal teoría de las partículas adquiere el carácter de teoría de un campo.

El formalismo matemático adecuado para describir los sistemas con un número variable de partículas es el de segunda cuantificación (III, §§ 64, 65). En la descripción cuántica del campo electromagnético, el 4-potencial A representa el papel

* De hecho, claro está, el número de fotones cambia tan sólo como resultado de diferentes procesos de interacción.

de operador de segunda cuantificación. Dicho potencial se expresa mediante las funciones de onda (con las coordenadas como argumento) de las partículas individuales (de los fotones) y sus operadores de creación y aniquilación. Un papel análogo en la descripción de un sistema de partículas lo representa el operador ψ de la función de onda cuantificada. Para construirlo es necesario, ante todo, conocer la forma de la función de onda de una partícula libre y la ecuación a que esta función obedece.

Hay que subrayar el carácter auxiliar del concepto de campo de partículas libres. Las partículas reales se encuentran en interacción y el problema que se plantea a la teoría consiste en el estudio de estas interacciones. Pero cualquier interacción se reduce a una colisión, antes y después de la cual se puede considerar el sistema como un conjunto de partículas libres. En el § 1 se hizo notar que éstos son los únicos objetos medibles. Por ello, nos valemos de los campos de partículas libres como medio para representar los estados iniciales y finales.

Comenzaremos la descripción relativista de las partículas libres con el caso de partículas de spin 0. La simplicidad matemática del mismo permite poner de relieve de la manera más clara posible las ideas fundamentales y los rasgos característicos de dicha descripción.

El estado de una partícula libre (sin spin) se puede determinar por completo con sólo dar su impulso $\boldsymbol{p}$. Así, la energía ε de la partícula* se determina de acuerdo con $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ (donde m es la masa de la partícula) o en forma cuadridimensional:

$$p^2 = m^2. \tag{10.1}$$

Como es sabido, las leyes de conservación del impulso y de la energía están ligadas con la homogeneidad del espacio y del tiempo, es decir, con la simetría respecto de una traslación paralela arbitraria del 4-sistema de coordenadas. En la descripción cuántica, imponer esta simetría significa que, en dicha transformación de las 4-coordenadas, la función de onda de una partícula con 4-impulso determinado puede únicamente quedar multiplicada por un factor de fase (de módulo igual a la unidad). Esta condición la satisface tan sólo una función exponencial cuyo exponente sea función lineal de las 4-coordenadas. Con otras palabras, la función de onda del estado de una partícula libre con 4-impulso determinado $p^\mu = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$ debe ser una onda plana:

$$\text{const} \cdot e^{-ipx}, \quad px = \varepsilon t - \boldsymbol{pr} \tag{10.2}$$

(la elección del signo en el exponente es de suyo un puro convenio en la teoría relativista; se ha elegido de acuerdo con el caso no-relativista).

La ecuación de onda debe admitir las funciones (10.2) como soluciones particulares cualquiera que sea el 4-vector p que cumpla la condición (10.1). Debe ser lineal en tanto que expresión del principio de superposición: cualquier combi-

* Designamos la energía de una partícula individual por ε para diferenciarla de la energía E del sistema de partículas.

nación lineal de funciones (10.2) debe también representar un estado posible de la partícula y, por ello, debe ser asimismo solución. Finalmente, ha de ser del orden más bajo posible; un orden más elevado introduciría soluciones extrañas.

El spin es el momento cinético de la partícula en el sistema de referencia en el cual se encuentra en reposo. Si el spin de la partícula es s, su función de onda en el sistema de reposo constituye un espinor tridimensional de orden $2s$. En cambio, para describir la partícula en un sistema de coordenadas arbitrario, su función de onda debe expresarse en la forma correspondiente a las magnitudes cuadridimensionales.

Una partícula de spin 0 se describe en el sistema de reposo por un escalar tridimensional. Este escalar, sin embargo, puede tener una « procedencia » cuadridimensional distinta: puede ser un escalar cuadridimensional ψ, pero también puede ser la cuarta componente de un 4-vector ψ_μ (temporal), para el que en el sistema de reposo es diferente de cero únicamente la componente ψ_0*.

Para una partícula libre el único operador que puede intervenir en la ecuación de onda es el operador 4-impulso p. Sus componentes son operadores de derivación respecto de las coordenadas y del tiempo:

$$\mathrm{p}^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t},\ -i\nabla \right). \tag{10.3}$$

La ecuación de onda ha de constituir un vínculo diferente entre las magnitudes ψ y ψ_μ establecido mediante el operador p. Este vínculo debe expresarse, claro está, por relaciones relativísticamente invariantes. Tales son las igualdades

$$m\psi_\mu = \mathrm{p}_\mu \psi, \quad \mathrm{p}^\mu \psi_\mu = m\psi, \tag{10.4}$$

donde m es una constante sin dimensiones que caracteriza la partícula**.

Substituyendo la expresión de ψ_μ dada por la primera ecuación en la segunda, obtendremos

$$(\mathrm{p}^2 - m^2)\psi = 0 \tag{10.5}$$

(*O. Klein*, y *V. A. Fok*, 1926). En forma explícita, esta ecuación se escribe

$$-\partial_\mu \partial^\mu \psi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right)\psi = m^2\psi. \tag{10.6}$$

Substituyendo en ella ψ en forma de onda plana (10.2), obtenemos $p^2 = m^2$, de donde se sigue que m es la masa de la partícula. Obsérvese que la forma de la ecuación (10.5) se podía haber previsto, naturalmente, sin más que tener en cuenta que p^2 es el único operador escalar que se puede construir a partir de p (por esta razón, esta misma ecuación satisfacen cada una de las componentes de la función

* O quizá, de manera análoga, la componente temporal de un 4-tensor de orden superior; este caso, sin embargo, conduciría a ecuaciones de orden más elevado.

** Las constantes m se introducen en (10.4) de tal manera que ψ_μ y ψ tienen las mismas dimensiones. Introducir en estas dos ecuaciones constantes m_1 y m_2 distintas carecería de sentido, ya que siempre sería posible igualarlas redefiniendo ψ o ψ_μ .

de onda de una partícula con spin arbitrario, lo que comprobaremos repetidamente en lo que sigue).

Así, pues, una partícula de spin 0 se representa esencialmente por un solo escalar ψ (cuadridimensional) que obedece a la ecuación de segundo orden (10.5). En las ecuaciones de primer orden (10.4), en cambio, el papel de función de onda lo representa el conjunto de las magnitudes ψ y ψ_μ, reduciéndose el 4-vector ψ_μ al 4-gradiente del escalar ψ. En el sistema de reposo la función de onda de la partícula no depende de las coordenadas (espaciales) y, por ello, las componentes espaciales del 4-vector ψ_μ se anulan, como debía ser.

Con vistas a aplicar luego la segunda cuantificación, es útil expresar la energía e impulso de la partícula en forma de integrales espaciales de ciertas combinaciones lineales (respecto de ψ y ψ^*) que representan por decirlo así la densidad espacial de dichas magnitudes. En otras palabras, hay que hallar el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$ que corresponde a la ecuación (10.5). Mediante este tensor, la ley de conservación de la energía y del impulso se expresa por la ecuación

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0. \tag{10.7}$$

Siguiendo las reglas generales de la teoría de campos (véase II, § 32), escribiremos para ello un principio de variación del que resulte como consecuencia la ec. (10.5). Este principio debe consistir en imponer la condición de mínimo a la « integral de acción »

$$S = \int L d^4x \tag{10.8}$$

de determinado 4-escalar real L — de la densidad lagrangiana del campo *. A partir del escalar L (y el operador ∂^μ), se puede formar una expresión escalar bilineal real de la forma

$$L = \partial_\mu \psi^* \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi, \tag{10.9}$$

donde m es una constante sin dimensiones. Considerando ψ y ψ^* como variables independientes que describen el campo (« coordenadas generalizadas » del campo q), es fácil ver que la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{10.10}$$

($q_{,\mu} \equiv \partial_\mu q$) coincide, en efecto, con las ecuaciones (10.5) para ψ y ψ^*, siendo m la masa de la partícula. Observemos también que la expresión (10.9) se ha escrito con signo tal que el cuadrado de la derivada respecto del tiempo $|\partial\psi/\partial t|^2$ aparezca en L con signo positivo; en el caso opuesto, la acción no podría tener un mínimo (cf. II, § 27). En cambio, la elección del coeficiente numérico en L es puro convenio (y se refleja sólo en el coeficiente de normalización de ψ, véase más adelante).

* El correspondiente operador de segunda cuantificación L se llama *lagrangiano* del campo. Para simplificar la terminología, utilizaremos este término, según convenga, tanto para la densidad lagrangiana «cuantificada» como para la «no cuantificada».

El tensor de energía-impulso se calcula ahora de acuerdo con la fórmula

$$T_{\mu}^{\nu} = \sum q_{,\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\nu}} - L\delta_{\mu}^{\nu} \tag{10.11}$$

(la suma se extiende a todas las q). Substituyendo (10.9), obtendremos

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\psi^* \cdot \partial_{\nu}\psi + \partial_{\nu}\psi^* \cdot \partial_{\mu}\psi - Lg_{\mu\nu} \tag{10.12}$$

(estas cantidades, como debía ser, son reales, lo que queda garantizado por el carácter real de L). En particular,

$$T_{00} = 2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - L = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + m^2\psi^*\psi, \tag{10.13}$$

$$T_{i0} = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{10.14}$$

El 4-impulso del campo viene dado por la integral

$$P_{\mu} = \int T_{\mu 0} d^3x, \tag{10.15}$$

es decir, T_{00} y T_{0i} representan el papel de densidad de energía y de impulso. Observemos que la magnitud T_{00} es definida positiva.

Cabe utilizar la fórmula (10.13) para normalizar la función de onda. Una onda plana normalizada « a una partícula en el volumen $V = 1$ » se escribe en la forma

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipx}. \tag{10.16}$$

En efecto, para esta función es $T_{00} = \varepsilon$ de modo que la energía total en el volumen $V = 1$ coincide con la energía de una sola partícula.

El momento cinético, cuya conservación está ligada con la isotropía del espacio, puede también expresarse como integral espacial; sin embargo, en lo que sigue no nos hará falta esta representación del momento cinético.

Finalmente, junto con las leyes de conservación ligadas de manera directa con la simetría espacio-temporal, las ecuaciones (10.4) admiten otra ley de conservación En efecto, es fácil comprobar que en virtud de (10.4) (y de las mismas ecuaciones para ψ^*) se cumple la ecuación

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0, \tag{10.17}$$

donde

$$j_{\mu} = m(\psi^*\psi_{\mu} + \psi_{\mu}^*\psi) = i[\psi^*\partial_{\mu}\psi - (\partial_{\mu}\psi^*)\psi]. \tag{10.18}$$

Es claro por esto que j^{μ} representa el papel de 4-vector densidad de corriente. Desde este punto de vista (10.17) es la ecuación de continuidad, que representa la ley de conservación de la magnitud

$$Q = \int j_0 d^3x, \tag{10.19}$$

donde

$$j_0 = j^0 = i\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi\right). \tag{10.20}$$

Hay que observar que j_0 no es una magnitud definida positiva. Ya este hecho muestra que, en el caso general, es sin duda alguna imposible interpretarla como densidad de probabilidad de localización espacial de la partícula. El sentido de la ley de conservación expresada por la ecuación (10.17) se pone en claro en el párrafo que sigue.

§ 11. Partículas y antipartículas

Siguiendo las reglas generales para llevar a cabo la segunda cuantificación, hemos de considerar el desarrollo de una función de onda arbitraria en funciones propias de un sistema completo de estados posibles de una partícula libre, por ejemplo, en ondas planas ψ_p:

$$\psi = \sum_p a_p \psi_p, \quad \psi^* = \sum_p a_p^* \psi_p^*.$$

Hecho esto, habría que interpretar los coeficientes a_p, a_p^* como operadores a_p, a_p^+ de aniquilación y de creación de partículas en los correspondientes estados *.

Sin embargo, topamos inmediatamente con el siguiente hecho fundamental, que resulta nuevo comparado con el caso de la teoría no-relativista. En una onda plana, solución de la ecuación (10.5), la energía ε debe satisfacer (para un impulso $\boldsymbol{p}$) tan sólo la condición $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$, es decir, puede tener dos valores: $\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Pero solamente los valores positivos de ε pueden, sin embargo, tener el sentido físico de energía de una partícula libre. Por otra parte, no cabe simplemente prescindir de los valores negativos: la solución general de la ecuación de onda resulta tan sólo de la superposición de todas sus soluciones particulares independientes. Esa circunstancia indica la necesidad de un cierto cambio en la interpretación de los coeficientes del desarrollo de ψ y ψ^* en la segunda cuantificación.

Escribiremos este desarrollo en la forma

$$\psi = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_p^{(+)} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - \varepsilon t)} + \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_p^{(-)} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} + \varepsilon t)}, \tag{11.1}$$

donde en la primera suma aparecen las ondas planas normalizadas de acuerdo con (10.16) con « frecuencias » positivas, y en la segunda, con frecuencias negativas; en ambos casos, ε representa una cantidad positiva: $\varepsilon = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. En la segunda cuantificación, los coeficientes $a_p^{(+)}$ en la primera suma los substituiremos como de ordinario por operadores a_p de aniquilación de partículas. En cam-

* Atribuimos a las funciones ψ el 4-impulso p como subíndice pensando en designar más adelante por ψ_{-p} las funciones con « frecuencia negativa ». En cambio, a los operadores a, a^+ se atribuye como subíndice el impulso tridimensional $\boldsymbol{p}$, que determina por completo el estado de una partícula real.

bio, en la segunda suma observamos que, al formar luego elementos de matriz, la dependencia temporal de sus sumandos corresponderá, no a la aniquilación, sino a la creación de partículas: el factor $e^{i\varepsilon t} = (e^{-i\varepsilon t})^*$ corresponde a una partícula más, con energía ε, en el estado final (cf. el final del § 2). De acuerdo con esto, substituiremos los coeficientes $a_{\boldsymbol{p}}^{(-)}$ por operadores $b_{-\boldsymbol{p}}^{+}$ de creación de ciertas otras partículas. Cambiando también en la segunda suma de (11.1) la variable de sumación $\boldsymbol{p}$ por $-\boldsymbol{p}$ (a fin de que el factor exponencial tome la forma $e^{-i(\boldsymbol{pr}-\varepsilon t)}$), obtendremos los operadores ψ en la forma

$$\psi = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (a_{\boldsymbol{p}} e^{-i\boldsymbol{px}} + b_{\boldsymbol{p}}^{+} e^{i\boldsymbol{px}}), \quad \psi^{+} = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (a_{\boldsymbol{p}}^{+} e^{i\boldsymbol{px}} + b_{\boldsymbol{p}} e^{-i\boldsymbol{px}}). \quad (11.2)$$

De esta manera, todos los operadores $a_{\boldsymbol{p}}$, $b_{\boldsymbol{p}}$ quedan multiplicados por funciones con la « correcta » dependencia respecto del tiempo ($\sim e^{-i\varepsilon t}$), y los operadores $a_{\boldsymbol{p}}^{+}$, $b_{\boldsymbol{p}}^{+}$, por las funciones complejo-conjugadas. Esto precisamente ofrece la posibilidad de interpretar, de acuerdo con las reglas generales, los operadores $a_{\boldsymbol{p}}$, $b_{\boldsymbol{p}}$ como operadores de aniquilación, y $a_{\boldsymbol{p}}^{+}$, $b_{\boldsymbol{p}}^{+}$, como operadores de creación de partículas con impulsos $\boldsymbol{p}$ y energías ε.

Llegamos así a la idea de partículas de dos especies que intervienen juntas y en un plano de igualdad. Se dice de ellas que son *partículas* y *antipartículas* (el sentido de estos nombres se explica más adelante). A unas corresponde, en el formalismo de segunda cuantificación, los operadores $a_{\boldsymbol{p}}$, $a_{\boldsymbol{p}}^{+}$, y a las otras, los operadores $b_{\boldsymbol{p}}$, $b_{\boldsymbol{p}}^{+}$. Ambos tipos de partículas, cuyos operadores aparecen en un mismo operador ψ, poseen por ello mismo iguales masas.

Cabe llegar también al origen de estos resultados desde el punto de vista de las propias condiciones de invariancia relativista.

Una transformación de Lorentz representa, en sentido matemático, una rotación de un sistema de coordenadas cuadridimensional que cambia la dirección del eje del tiempo (junto con los giros puramente espaciales que no alteran el eje del tiempo, constituyen el grupo de transformaciones llamado *grupo de Lorentz**). Todas estas transformaciones poseen la misma propiedad general de que conservan el eje t dentro de una determinada hoja del cono de luz, con lo que se traduce el principio físico de existencia de una velocidad límite de propagación de las señales.

Pero desde un punto de vista puramente matemático, también es un giro el cambio simultáneo de signo de todas las cuatro coordenadas *(inversión cuadridimensional)*: el determinante de esta transformación es igual a $+1$, al igual que el determinante de cualquier otra rotación. Pero en este caso el eje del tiempo pasa de una hoja del cono de luz a la otra. Aunque esta circunstancia caracteriza la inexistencia física de una tal transformación (considerada como transformación

* Observemos que el conjunto de todos los giros tridimensionales (espaciales) constituye de suyo un grupo, que es subgrupo del grupo de Lorentz. En cambio, el conjunto de transformaciones de Lorentz no constituye un grupo de por sí: el resultado de dos transformaciones de Lorentz consecutivas puede reducirse a una pura rotación espacial.

del sistema de referencia), en el aspecto matemático, sin embargo, la diferencia se reduce tan sólo a que (en virtud del carácter pseudoeuclídeo de la métrica) dicha rotación no se puede efectuar sin admitir al mismo tiempo una transformación compleja de las coordenadas.

Es natural suponer que esta diferencia debe ser no esencial cuando se trata de la invariancia en cuatro dimensiones. Entonces, cualquier expresión invariante respecto de las transformaciones de Lorentz ha de ser también invariante respecto de la inversión cuadridimensional. Esta condición aplicada al caso de un operador escalar ψ se formula de manera precisa en el § 13. Pero podemos ya observar inmediatamente que, en cualquier caso, conducirá a la necesidad de que en los operadores ψ existan a la vez términos con los dos signos delante de ε en los exponentes, ya que la substitución $t \to -t$ cambia precisamente este signo.

Volvamos a la expresión (11.2) y establezcamos las relaciones de conmutación entre los operadores a_p, a_p^+ (y b_p, b_p^+). En el caso de los fotones, lo hicimos (para los operadores c_p, c_p^+), partiendo de la analogía con los osciladores, es decir, en esencia partiendo de las propiedades del campo electromagnético en el límite clásico. No existe ahora una tal analogía. Para establecer las reglas de conmutación (de Bose o de Fermi) entre operadores podemos guiarnos tan sólo por la forma del hamiltoniano construido a partir de ellos. Este último se obtiene (véase III, § 64) substituyendo ψ y ψ^+ en vez de ψ y ψ^* en la integral $\int T_{00} d^3x$ *. Obtenemos así

$$H = \sum_p \varepsilon (a_p^+ a_p + b_p b_p^+). \tag{11.3}$$

Es fácil ver que un resultado razonable para los valores propios de este hamiltoniano se obtiene solamente si los operadores satisfacen las reglas de conmutación de Bose:

$$\{a_p,\ a_p^+\}_- = \{b_p,\ b_p^+\}_- = 1 \tag{11.4}$$

(todos los demás pares de operadores conmutan; entre ellos, conmutan todos los operadores de partículas a_p, a_p^+ con todos los operadores de antipartículas b_p, b_p^+). En efecto, en tal caso

$$H = \sum_p \varepsilon (a_p^+ a_p + b_p^+ b_p + 1).$$

Los valores propios de los productos $a_p^+ a_p$ y $b_p^+ b_p$ son números enteros positivos N_p y $\bar{N}_p$ — los números de partículas y de antipartículas. En cuanto a la constante aditiva infinita $\sum \varepsilon$ (« energía del vacío »), podemos de nuevo prescindir de ella sin más:

* En la teoría no-relativista se suele escribir en este caso el operador adjunto ψ^+ a la izquierda de ψ. Aquí, en cambio, el orden es indiferente, puesto que la permutación de ψ y ψ^+ conduciría únicamente a la permutación de los operadores a_p y b_p que gozan de iguales propiedades. Sin embargo, una vez elegido un orden, cualquiera, es necesario atenerse siempre a la misma regla.

$$E = \sum_p \varepsilon (N_p + \bar{N}_p) \tag{11.5}$$

[cf. fórmula (3.1) y la nota a la misma]. Esta expresión es definida positiva y corresponde a la idea de dos especies de partículas que realmente existen. De manera análoga, para el impulso total del sistema de partículas obtendremos

$$\boldsymbol{P} = \sum_p \boldsymbol{p} (N_p + \bar{N}_p). \tag{11.6}$$

Si en vez de (11.4) se hubieran adoptado las relaciones de conmutación de Fermi (anticonmutadores en vez de conmutadores), se obtendría

$$\mathrm{H} = \sum_p \varepsilon (\mathrm{a}_p^+ \mathrm{a}_p - \mathrm{b}_p^+ \mathrm{b}_p + 1),$$

y en vez de (11.5), la expresión sin sentido físico $\sum \varepsilon (N_p - \bar{N}_p)$, que no es definida positiva y que, por ello, no puede representar la energía de un sistema de partículas libres.

Así, pues, las partículas de spin 0 son bosones.

Consideremos ahora la integral Q (10.19). Substituyendo en j^0 las funciones ψ y ψ^* por los operadores $\mathfrak{psi}$ y $\mathfrak{psi}^+$ y efectuando la integración, se obtendrá

$$\mathrm{Q} = \sum_p (\mathrm{a}_p^+ \mathrm{a}_p - \mathrm{b}_p \mathrm{b}_p^+) = \sum_p (\mathrm{a}_p^+ \mathrm{a}_p - \mathrm{b}_p^+ \mathrm{b}_p - 1). \tag{11.7}$$

Los valores propios de este operador (una vez substraída la constante aditiva no esencial $\sum 1$) son:

$$Q = \sum_p (N_p - \bar{N}_p), \tag{11.8}$$

es decir, son iguales a las diferencias de los números enteros de partículas y de antipartículas.

Hasta aquí, en tanto hemos considerado partículas libres, prescindiendo de cualquier interacción entre ellas, el sentido de la ley de conservación de la cantidad Q [como, sea dicho de paso, también de las leyes de conservación del impulso y de la energía totales (11.5-6)] sigue siendo, claro está, en grado considerable un puro convenio: se conserva, en realidad, no solamente esta suma, sino también cada uno de los números N_p, $\bar{N}_p$ por separado. Si se conservará o no la cantidad Q cuando exista interacción, depende del carácter de ésta. Si Q se conserva (es decir, si el operador Q conmuta con el hamiltoniano de la interacción), la expresión (11.8) indica qué limitación introduce esta ley en los cambios posibles del número de partículas: pueden aparecer y desaparecer tan sólo pares « partícula + antipartícula ».

Si la partícula posee carga eléctrica, su antipartícula debe tener carga de signo

opuesto: si una y otra tuviesen cargas iguales, la creación o la destrucción de un par de ellas contradiría una rigurosa ley de la naturaleza, la de conservación de la carga eléctrica total. Veremos más adelante (§ 32) cómo esta oposición de cargas (en la interacción de las partículas con el campo electromagnético) resulta automáticamente en la teoría.

La cantidad Q se llama a veces *carga* del campo de partículas dadas. Para partículas con carga eléctrica, Q determina, en particular, la carga total del sistema (medida tomando la carga elemental e como unidad). Hay que subrayar, sin embargo, que las partículas y las antipartículas pueden ser eléctricamente neutras.

Vemos así cómo el carácter de la dependencia relativista de la energía respecto del impulso (las dos raíces de la ecuación $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$), junto con las condiciones de invariancia relativista, conduce en la teoría cuántica a un nuevo principio de clasificación de las partículas, a la posibilidad de que existan pares de partículas diferentes (partícula-antipartícula) que se corresponden entre sí de la manera descrita más arriba. Esta notable predicción fue hecha por vez primera (en el caso de partículas de spin 1/2) por Dirac en 1930, antes todavía del descubrimiento de hecho de la primera antipartícula, el positón.

§ 12. Partículas realmente neutras

Al aplicar la segunda cuantificación a las funciones ψ (11.1), los coeficientes $a_{\boldsymbol{p}}^{(+)}$ y $a_{\boldsymbol{p}}^{(-)}$ se consideraron como operadores relativos a partículas diferentes. Sin embargo, no tiene por qué ser siempre así: como caso particular, los operadores de aniquilación y de creación que aparecen en ψ pueden referirse a un mismo tipo de partículas [como ocurría en el caso de los fotones, cf. (2.17)]. Designando en este caso dichos operadores por $c_{\boldsymbol{p}}$ y $c_{\boldsymbol{p}}^{+}$, escribiremos el operador ψ en la forma

$$\psi = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (c_{\boldsymbol{p}} e^{-ipx} + c_{\boldsymbol{p}}^{+} e^{ipx}). \tag{12.1}$$

El campo descrito por este operador corresponde a un sistema de partículas iguales de las cuales cabe decir que « coinciden con sus antipartículas ».

El operador (12.1) es hermítico ($\psi^{+} = \psi$); podemos decir que el campo es real. Es natural que un tal campo posea un número de « grados de libertad » mitad que un campo complejo, para el cual los operadores ψ y ψ^{+} no coinciden.

Debido a esto, el lagrangiano de un campo expresado por un operador real ψ debe contener un factor $^1/_2$ más [en comparación con (10.9)] *

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^2). \tag{12.2}$$

* De manera análoga a como aparece el factor suplementario 1/2 en el operador densidad energía (2.10) del campo electromagnético (expresado en función de los operadores reales $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$) en comparación con la densidad de energía del fotón (3.2) expresada mediante su función de onda compleja; cf. la nota de la pág. 14).

El correspondiente tensor de energía-impulso es

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi \cdot \partial_\nu \psi - L g_{\mu\nu}, \tag{12.3}$$

de modo que el operador densidad de energía se escribe

$$T_{00} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + (\nabla \psi)^2 + m^2 \psi^2\right]. \tag{12.4}$$

Substituyendo (12.1) en la integral $\int T_{00} d^3x$, obtendremos el hamiltoniano del campo

$$H = \frac{1}{2} \sum_p \varepsilon (c_p^+ c_p + c_p c_p^+). \tag{12.5}$$

De aquí se siguen de nuevo la necesidad de la cuantificación de Bose:

$$\{c_p, c_p^+\}_- = 1, \tag{12.6}$$

y los valores propios de la energía (prescindiendo como antes de la constante aditiva)

$$E = \sum_p \varepsilon_p N_p. \tag{12.7}$$

En cambio, la cuantificación de Fermi conduciría a un resultado carente de sentido — a un valor E que no depende de los N_p.

La « carga » Q del campo considerado es igual a cero. Esto es ya evidente sin más que tener en cuenta que Q debe cambiar de signo al cambiar las partículas por antipartículas y que, en este caso, unas y otras « coinciden ». Debido a esto mismo, tampoco existe el 4-vector densidad de corriente. En efecto, la expresión

$$j_\mu = i[\psi^+ \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi^+)\psi] \tag{12.8}$$

para el operador del 4-vector que se conserva j se anula cuando $\psi = \psi^+$ (el vector $\psi \partial_\mu \psi$ no se conserva). Esto a su vez significa que no existe ninguna ley de conservación especial que pueda limitar los cambios posibles del número de partículas. Es evidente que, en cualquier caso, las partículas así caracterizadas son eléctricamente neutras.

Las partículas de esta especie se califican de *realmente neutras* para distinguirlas de las partículas eléctricamente neutras para las que existen antipartículas. Mientras que estas últimas se pueden destruir tan sólo a pares (transformándose en fotones), las partículas realmente neutras pueden aniquilarse una a una.

La estructura del operador-ψ (12.1) es la misma que la estructura de los operadores (2.17-20) del campo electromagnético. En este sentido cabe decir que incluso los propios fotones son partículas realmente neutras. En el caso del campo electromagnético, el carácter hermítico de los operadores estaba vinculado con el carácter real de los campos eléctrico y magnético en tanto que magnitudes físicas medibles (en el límite clásico). En cambio, en el caso de los operadores-ψ de partículas no existe tal relación, puesto que a ellos no corresponde en general ningún tipo de

magnitudes directamente medibles. En relación con esto conviene recordar una vez más que los operadores-ψ de la teoría actual son, probablemente, « conceptos rudimentarios » que desaparecerán en una teoría consecuente.

La no existencia de un 4-vector corriente que se conserve es una propiedad general de las partículas realmente neutras y no está vinculada con el hecho de que el spin sea nulo (así, tal ocurre también en el caso de los fotones). Físicamente, ello expresa la ausencia de las correspondientes limitaciones impuestas a la variación del número de partículas. Desde un punto de vista formal, sin embargo, existe una relación directa entre la no existencia de una corriente que se conserve y el carácter real del campo — el hecho de que el operador ψ es hermítico.

El lagrangiano de un campo complejo

$$L = \partial_\mu \psi^+ \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^+ \psi \tag{12.9}$$

es invariante respecto de la multiplicación del operador-ψ por un factor de fase arbitrario, es decir, respecto de la transformación *

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \qquad \psi^+ \to e^{-i\alpha}\psi^+. \tag{12.10}$$

En particular, el lagrangiano no varía en la transformación infinitesimal

$$\psi \to \psi + i\delta\alpha \cdot \psi, \qquad \psi^+ \to \psi^+ - i\delta\alpha \cdot \psi^+. \tag{12.11}$$

En una variación infinitamente pequeña de las « coordenadas generalizadas » q, el lagrangiano experimenta una variación

$$\delta L = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right) = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} \right) \delta q + \sum \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} \delta q \right)$$

(la suma se extiende a todas las q). El primer término se anula en virtud de las « ecuaciones del movimiento » (de las ecuaciones de Lagrange). Interpretando como « coordenadas » q los operadores ψ y ψ^+ y haciendo $\delta\psi = i\delta\alpha \cdot \psi$, $\delta\psi^+ = -i\delta\alpha \cdot \psi^+$, obtendremos

$$\delta L = i\delta\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\psi \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} - \psi^+ \frac{\partial L}{\partial \psi^+_{,\mu}} \right).$$

De aquí se sigue que la condición de invariancia del lagrangiano ($\delta L = 0$) es equivalente a la ecuación de continuidad ($\partial_\mu j^\mu = 0$) para el 4-vector

$$j^\mu = i \left(\psi^+ \frac{\partial L}{\partial \psi^+_{,\mu}} - \psi \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \right). \tag{12.12}$$

Es fácil comprobar que para el lagrangiano (12.9) esta forma conduce a la corriente (12.8).

Así, pues, en el formalismo matemático de la teoría, la existencia de una corriente que se conserva resulta estar ligada con la invariancia del lagrangiano

* El conjunto de estas transformaciones se llama *grupo de contraste*.

respecto de las transformaciones (12.10) (*W. Pauli*, 1941). En cambio, el lagrangiano del campo realmente neutro (12.2) no goza de esta simetría.

§ 13. Transformaciones C, P, T

En contraste con la inversión cuadridimensional, la inversión en tres dimensiones (inversión espacial) no se puede reducir a giros de un sistema de coordenadas de cuatro dimensiones: el determinante de esta transformación es igual, no a + 1, sino a — 1. Las propiedades de simetría de las partículas respecto de la inversión (P) no se pueden, por ello, determinar de antemano mediante consideraciones de invariancia relativista*.

Cuando se aplica a una función de onda escalar, la operación inversión consiste en la transformación

$$\mathrm{P}\psi(t, \boldsymbol{r}) = \pm\psi(t, -\boldsymbol{r}), \tag{13.1}$$

donde el signo + o — en el segundo miembro corresponde a un escalar o a un pseudoescalar, respectivamente.

Se sigue de aquí que es necesario distinguir dos aspectos en el comportamiento de la función de onda en la inversión. Uno de ellos está ligado con la dependencia de la función de onda respecto de las coordenadas. En la mecánica cuántica no-relativista se consideró únicamente esta cuestión, que condujo al concepto de paridad de un estado (que llamaremos ahora *paridad orbital*) característica de las propiedades de simetría del movimiento de la partícula. Si el estado posee una determinada paridad orbital (+ 1 o — 1), esto significa que

$$\psi(t, -\boldsymbol{r}) = \pm\psi(t, \boldsymbol{r}).$$

El otro aspecto es el comportamiento (en la inversión de los ejes de coordenadas) de la función de onda en un punto dado (que conviene imaginar que coincide con el origen de coordenadas). Este comportamiento conduce al concepto de *paridad intrínseca* de la partícula. A la paridad intrínseca + 1 o — 1 corresponden (para partículas de spin 0) los dos signos en la definición (13.1). La paridad total de un sistema de partículas viene dada por el producto de sus paridades intrínsecas y la paridad orbital del movimiento relativo.

Las propiedades « intrínsecas » de simetría de las diferentes partículas se manifiesta, claro está, tan sólo en los procesos de transformación de unas en otras. En mecánica cuántica no-relativista, el concepto análogo al de paridad intrínseca es la paridad de un determinado estado ligado de un sistema compuesto (por ejemplo, de un núcleo). Para la teoría relativista, en cambio, que no hace distinción

* El grupo de Lorentz complementado con la inversión espacial se llama *grupo de Lorentz completo o ampliado* (a diferencia del grupo original, que no contiene P, que, en relación con esto, se califica de *propio*). El grupo completo contiene todas las transformaciones que conserven el eje t dentro de la correspondiente hoja del cono de luz.

fundamental alguna entre partículas compuestas y elementales, dicha paridad intrínseca no se distingue de la paridad intrínseca de las partículas que en la teoría no-relativista figuran como elementales. En el dominio no-relativista, en el que estas últimas se comportan como entes invariables, sus propiedades intrínsecas de simetría son inobservables y, por ello, el considerarlas estaría desprovisto de sentido físico.

La paridad intrínseca se expresa en el formalismo de segunda cuantificación por el comportamiento de los operadores-ψ en la inversión. A un campo escalar y pseudoescalar corresponden las leyes de transformación

$$\mathrm{P}: \quad \psi(t, \boldsymbol{r}) \longrightarrow \pm \psi(t, -\boldsymbol{r}). \tag{13.2}$$

Pero el propio sentido de la acción de la inversión sobre los operadores-ψ debe formularse dándole la forma de determinada transformación de los operadores de aniquilación y creación de partículas, de tal manera que, como resultado de la misma, se cumpla la relación (13.2). Es fácil ver que esta transformación es la

$$\mathrm{P}: \quad \mathrm{a}_{\boldsymbol{p}} \longrightarrow \pm \mathrm{a}_{-\boldsymbol{p}}, \quad \mathrm{b}_{\boldsymbol{p}} \longrightarrow \pm \mathrm{b}_{-\boldsymbol{p}} \tag{13.3}$$

(y lo mismo para los operadores adjuntos). En efecto, esta substitución aplicada al operador da

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}} e^{-i\omega t + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} + \mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}^{+} e^{i\omega t - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}) \tag{13.4}$$

y cambiando luego la variable de sumación ($\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$), lo lleva a la forma $\pm \psi(t, -\boldsymbol{r})$. Así, pues, si designamos por $\psi^P(t, \boldsymbol{r})$ el operador que resulta de aplicar la transformación (13.3), se puede escribir la igualdad

$$\psi^P(t, \boldsymbol{r}) = \pm \psi(t, -\boldsymbol{r}). \tag{13.5}$$

Observemos que la transformación (13.3) posee un carácter del todo natural: la inversión cambia el signo del vector polar $\boldsymbol{p}$, de modo que las partículas con impulso $\boldsymbol{p}$ se substituyen por partículas con impulso $-\boldsymbol{p}$.

En (13.3) los operadores $\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}$ y $\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}$ se transforman o bien ambos con los signos superiores, o bien ambos con los signos inferiores. En el formalismo de segunda cuantificación esto expresa la identidad de las paridades intrínsecas de las partículas y de las antipartículas (de spin 0). Pero esta identidad es ya de suyo evidente teniendo en cuenta que las partículas y las antipartículas (de spin 0) se representan por funciones de onda de exactamente el mismo tipo (escalares o pseudoescalares).

El operador-ψ (13.4) posee también determinada simetría respecto de una transformación que carece de análoga en la teoría no-relativista; esta transformación se llama *conjugación de carga* y se designa por el símbolo C. Si se permutan entre sí todos los operadores $\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}$ y $\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}$:

$$\mathrm{C}: \quad \mathrm{a}_{\boldsymbol{p}} \longrightarrow \mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}, \quad \mathrm{b}_{\boldsymbol{p}} \longrightarrow \mathrm{a}_{\boldsymbol{p}} \tag{13.6}$$

(es decir, si se substituyen las partículas por antipartículas y recíprocamente), ψ

pasa a ser el operador « conjugado respecto de la carga » ψ^C, siendo

$$\psi^C(t, \boldsymbol{r}) = \psi^+(t, \boldsymbol{r}). \tag{13.7}$$

Esta igualdad expresa la simetría con que intervienen en la teoría los conceptos de partículas y de antipartículas.

Obsérvese que la definición de la transformación que hemos llamado de conjugación de carga encierra una cierta arbitrariedad formal carente de importancia. El sentido de la transformación no varía si en la definición (13.6) se introduce un factor de fase arbitrario:

$$a_p \longrightarrow e^{i\alpha} b_p, \quad b_p \longrightarrow e^{-i\alpha} a_p.$$

Se tendría entonces

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi^+, \quad \psi^+ \longrightarrow e^{-i\alpha}\psi,$$

y la doble aplicación de esta transformación conduciría, como antes, a la identidad ($\psi \longrightarrow \psi$). Todas estas definiciones, sin embargo, son equivalentes entre sí. Dado que las propiedades de los operadores-ψ no cambian al multiplicarlos por un factor de fase (cf. el final del párrafo que precede), podemos simplemente llamar $\psi e^{i\alpha/2}$ a lo que hemos llamado ψ, con lo cual volvemos a la definición de la conjugación de carga en la forma (13.6-7).

Dado que la conjugación de carga substituye una partícula por una antipartícula no idéntica a ella, dicha transformación no conduce, en general, a que surja una nueva característica de la partícula o de un sistema de partículas como a tales. En otras palabras, para el operador C no existen, en general, ni estados propios ni valores propios.

Una excepción en este sentido la constituyen los sistemas formados por un número igual de partículas y de antipartículas. El operador C transforma este sistema en sí mismo y, por ello, en este caso existen para él estados propios que corresponden a los valores propios $C = \pm 1$ (estos últimos se siguen del hecho que $C^2 = 1$). Para describir la simetría de carga cabe entonces considerar una partícula y una antipartícula como dos « estados de carga » diferentes de una misma partícula, estados que difieren entre sí en el valor del número cuántico de carga $Q = \pm 1$. La función de onda del sistema aparecerá como producto de una función de onda orbital por otra « de carga » y deberá ser simétrica respecto a la permutación simultánea de todas las variables (de coordenadas y de cargas) de un par cualquiera de partículas. La simetría de la función « de carga » determinará, en cambio, la paridad de carga del sistema (véase el problema) *.

Conforme se subrayó en el § 1, la teoría relativista no hace distinción alguna de principio entre partículas « compuestas » y « elementales ». En consecuencia, también el concepto de paridad de carga, que surge de manera natural en el caso de los sistemas « realmente neutros », debe aplicarse también a las partículas « ele-

* En todas estas consideraciones nos referimos a partículas de spin 0. El método de análisis descrito se generaliza directamente también a los otros casos — véase, por ejemplo, el problema en el § 27.

mentales » realmente neutras. En el formalismo de segunda cuantificación este concepto se representa por la igualdad

$$\psi^C = \pm\psi; \tag{13.8}$$

los signos + y — corresponden a partículas cuya paridad de carga es par e impar, respectivamente.

En el § 11 se indicó que la invariancia relativista debe significar también la invariancia respecto de la 4-inversión. En relación con el operador de un campo escalar (en el sentido de las 4-rotaciones), esto significa que en una tal transformación debe ser:

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) \to \psi(-t, -\boldsymbol{r})$$

siempre con el signo + en el segundo miembro. En términos de la transformación de los operadores a_p, b_p, el paso de $\psi(t, \boldsymbol{r})$ a $\psi(-t, -\boldsymbol{r})$ se consigue permutando en (13.4) los coeficientes de e^{-ipx} y de e^{ipx}, es decir, mediante la substitución

$$a_p \to b_p^+, \quad b_p \to a_p^+. \tag{13.9}$$

Al substituir los operadores-a por operadores-b, esta transformación incluye la substitución recíproca de partículas por antipartículas. Vemos así que en la teoría relativista surge de manera natural la necesidad de imponer la invariancia respecto de la transformación en la que, junto con la inversión espacial (P) y el cambio de sentido del tiempo (T), se aplica también la conjugación de carga (C); esto es lo que afirma el llamado *teorema CPT**.

Sin embargo, en relación con esto conviene subrayar que aunque los razonamientos expuestos aquí y en los §§ 11 y 12 representan el desarrollo natural de los conceptos de la mecánica cuántica ordinaria y de la teoría clásica de la relatividad, los resultados así obtenidos se salen de sus marcos tanto en la forma (operadores-ψ, que contienen a la vez operadores de creación y de aniquilación de partículas) como en su naturaleza (partículas y antipartículas). Por ello, es imposible considerar estos resultados como una necesidad puramente lógica. Contienen en sí nuevos principios físicos para los cuales el único criterio de validez puede ser tan sólo la experiencia.

Si designamos por $\psi^{CPT}(t, \boldsymbol{r})$ el operador (13.4) una vez se le ha aplicado la transformación (13.9), se puede escribir

$$\psi^{CPT}(t, \boldsymbol{r}) = \psi(-t, -\boldsymbol{r}). \tag{13.10}$$

Formulada de esta manera la 4-inversión como transformación (13.9), con ello hemos establecido también para el operador-ψ la formulación de la transformación que consiste en cambiar el sentido del tiempo: junto con la transformación CP debe dar (13.9)**. Teniendo en cuenta las definiciones (13.3) y (13.6), encontramos por ello

---

* Formulado por *J. Schwinger*, 1953; *G. Lüders*, 1954. y *W. Pauli*, 1955.

** La transformación CP se llama *inversión combinada*.

$$\text{T:}\quad a_p \longrightarrow \pm\, a^{+}_{-p},\quad b_p \longrightarrow \pm\, b^{+}_{-p} \tag{13.11}$$

[los signos $\pm$ corresponden a los mismos signos que en (13.3)]. El sentido de esta transformación es por completo natural: el cambio de sentido del tiempo no sólo transforma un movimiento con impulso $\boldsymbol{p}$ en un movimiento con impulso $-\boldsymbol{p}$, sino que también permuta los estados inicial y final en los elementos de matriz; por consiguiente, los operadores de aniquilación de las partículas con impulso $\boldsymbol{p}$ se substituyen por los operadores de creación de partículas $-\boldsymbol{p}$. Efectuando en (13.4) la substitución (13.11) y cambiando la variable de sumación ($\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$), se encuentra que *

$$\psi^{T}(t, \boldsymbol{r}) = \pm\, \psi^{+}(-t, \boldsymbol{r}). \tag{13.12}$$

Esta igualdad es análoga a la regla ordinaria de cambio de sentido del tiempo en la mecánica cuántica: si un cierto estado se describe por la función de onda $\psi(t, \boldsymbol{r})$, el estado « con sentido opuesto del tiempo » se describe por la función $\psi^{*}(-t, \boldsymbol{r})$; el paso a la función conjugada compleja está ligado con la necesidad de conservar el carácter « correcto » de la dependencia respecto del tiempo alterado por el cambio de signo de t (*E. P. Wigner*, 1932).

Dado que la transformación T, y con ella también CPT, permutan los estados iniciales y finales, carecen para ambas de sentido los conceptos de estados propios y de valores propios. No conducen, en consecuencia, a nuevas características de las partículas como a tales. En el § 70 se considerarán, sin embargo, las consecuencias a que llevan al ser aplicadas a los procesos de dispersión.

Veamos cómo cambia en las transformaciones C, P, y T el operador 4-vector corriente j^{μ} (12.8). La transformación (13.2) junto con la substitución $(\partial_0, \partial_i) \to \to (\partial_0, -\partial_i)$ da

$$\text{P:}\quad (j^0, \mathbf{j})_{t, \boldsymbol{r}} \longrightarrow (j^0, -\mathbf{j})_{t, -\boldsymbol{r}}, \tag{13.13}$$

como debe ser para un verdadero 4-vector. La transformación (13.7) daría simplemente

$$\text{C:}\quad (j^0, \mathbf{j})_{t, \boldsymbol{r}} \longrightarrow (-j^0, -\mathbf{j})_{t, \boldsymbol{r}}, \tag{13.14}$$

si los operadores ψ y ψ^{+} conmutasen entre sí. Sin embargo, la no conmutabilidad de estos operadores resulta tan sólo de la no conmutabilidad de $a_{\boldsymbol{p}}$ y $a^{+}_{\boldsymbol{p}}$ (o de $b_{\boldsymbol{p}}$ y $b^{+}_{\boldsymbol{p}}$) con iguales $\boldsymbol{p}$; pero en virtud de las reglas de conmutación (11.4), la transposición de estos operadores conduce solamente a la aparición de términos que no dependen de los números de ocupación, es decir, del estado del campo. Prescindiendo [como se hizo en (11.5-6)] de estos términos, que carecen de importancia, volvemos a la regla (13.14) que tiene un sentido natural: al substituir las partículas

* Si se definiera la operación T con independencia de las otras transformaciones, se plantearía la misma arbitrariedad en la elección de un factor de fase que se tiene para la operación C. Sin embargo, la condición de simetría CPT permite tan sólo la elección arbitraria de un factor de fase en una de las transformaciones, C o T.

por antipartículas, la conjugación de carga cambia el signo de todas las componentes de la 4-corriente.

Dado que la operación de invertir el sentido del tiempo está ligada con la transposición de los estados iniciales y finales, al aplicarla a un producto de operadores cambia el orden de los factores. Así,

$$(\psi^+ \partial_\mu \psi)^T = (\partial_\mu \psi)^T (\psi^+)^T.$$

En el presente caso, sin embargo, este hecho carece de importancia: en virtud de la conmutabilidad de los operadores-ψ (en el sentido antes indicado), el volver los factores al orden inicial no se refleja en el resultado. Observando también que en el cambio de sentido del tiempo se tiene $(\partial_0, \partial_i) \to (-\partial_0, \partial_i)$, encontramos para la regla de transformación de la corriente :

$$\mathrm{T}: \quad (j^0, \mathbf{j})_{t,r} \longrightarrow (j^0, -\mathbf{j})_{-t,r} \tag{13.15}$$

El vector tridimensional $\mathbf{j}$ cambia de signo en correspondencia con el sentido clásico de esta magnitud.

Finalmente, para la transformación CPT tenemos

$$\mathrm{CPT}: \quad (j^0, \mathbf{j})_{t,r} \longrightarrow (-j^0, -\mathbf{j})_{-t,-r} \tag{13.16}$$

de acuerdo con el sentido de esta operación en tanto que 4-inversión. En relación con esto hay que recalcar que, al reducirse la 4-inversión a una rotación del 4-sistema de coordenadas, con relación a ella no existen en absoluto dos tipos de 4-tensores (tensores en sentido estricto y pseudotensores), cualquiera que sea su orden.

Hasta aquí hemos supuesto que las partículas eran libres. Pero un significado real lo adquieren los números cuánticos de paridad tan sólo cuando se consideran las partículas en interacción, cuando con ellas se vinculan determinadas reglas de selección, que permiten o prohiben determinados procesos. Un tal sentido, sin embargo, lo pueden tener únicamente las características que se conserven — es decir, los valores propios de operadores que conmutan con el hamiltoniano de las partículas en interacción.

En virtud de la invariancia relativista, en cualquier caso debe conmutar con el hamiltoniano el operador de la transformación CPT. En lo que concierne a las transformaciones C y P (y con ellas también T) por separado, muestra la experiencia que las interacciones electromagnéticas y fuertes son invariantes con relación a aquéllas, de modo que los correspondientes números cuánticos de paridad se conservan en estas interacciones. En la interacción débil, en cambio, se violan dichas leyes de conservación *.

Anticipándonos un poco, indicaremos que el operador de interacción de partículas cargadas con el campo electromagnético viene dado por el producto de los

* T. D. Lee y C. N. Yang (1956) fueron los primeros en lanzar la idea de una posible no-conservación de la paridad en las interacciones débiles.

operadores 4-vector A y j. Dado que la conjugación de carga cambia el signo de j, la invariancia de la interacción electromagnética respecto de esta transformación significa que también debe cambiar el signo de A. En otras palabras, los fotones son partículas impares respecto de la conjugación de carga.

El comportamiento indicado de los operadores A está de acuerdo con las propiedades del 4-potencial en la teoría clásica. En efecto, de las transformaciones

$$\begin{aligned} \mathrm{C}: &\quad (\mathrm{A}_0, \mathbf{A}) \to (-\mathrm{A}_0, -\mathbf{A})_{t,\, r} \\ \mathrm{P}: &\quad (\mathrm{A}_0, \mathbf{A}) \to (\mathrm{A}_0, -\mathbf{A})_{t,\, -r} \\ \mathrm{CPT}: &\quad (\mathrm{A}_0, \mathbf{A}) \to (-\mathrm{A}_0, -\mathbf{A})_{-t,\, -r} \end{aligned}$$

se sigue que

$$\mathrm{T}: \quad (\mathrm{A}_0, \mathbf{A}) \to (\mathrm{A}_0, -\mathbf{A})_{-t,\, r},$$

lo que corresponde precisamente a la regla clásica de transformación de los potenciales del campo electromagnético al cambiar el sentido del tiempo.

PROBLEMA

Determinar las paridades de carga y espacial de un sistema de dos partículas de spin 0 (una partícula y una antipartícula) con momento orbital l en su movimiento relativo.

Solución. La permutación de las coordenadas de las partículas es equivalente a la inversión (respecto del centro de masa) y por ello multiplica la función orbital por $(-1)^l$; la permutación de las variables de carga es equivalente a la conjugación de carga y multiplica el factor « de carga » en la función de onda por el valor de C buscado. De la condición $C(-1)^l = 1$ se sigue

$$C = (-1)^l.$$

La paridad espacial P del sistema es el producto de la paridad orbital y de la paridad intrínseca de ambas partículas. Dado que esta última es la misma para una partícula y su antipartícula, en el presente caso P coincide con la paridad orbital: $P = (-1)^l$.

§ 14. Ecuación de onda para una partícula de spin 1

Una partícula de spin 1 se describe en su sistema de reposo por una función de onda de tres componentes — por un vector tridimensional (de una tal partícula frecuentemente se dice que es *vectorial*). Por su origen cuadridimensional, éstas pueden ser las tres componentes espaciales de un 4-vector ψ^μ (espacial) o bien las de un 4-tensor antisimétrico de segundo orden $\psi^{\mu\nu}$ tales que, en el sistema de reposo, se anulan la componentes temporal (ψ^0) y las espaciales (Ψ^{ik})*.

La ecuación de onda — que es un vínculo diferencial entre las magnitudes ψ^μ, $\psi^{\mu\nu}$ — se establece mediante relaciones que escribiremos en la forma

$$i\psi_{\mu\nu} = \mathrm{p}_\mu \psi_\nu - \mathrm{p}_\nu \psi_\mu, \tag{14.1}$$

* Adelantando ideas, indicaremos que al conjunto del 4-vector ψ_μ y del 4-tensor $\psi^{\nu\mu}$ corresponde el conjunto de los espinores cuadridimensionales de segundo orden $\xi^{\alpha\dot{\beta}}$, $\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, $\xi^{\alpha\beta}$, siendo $\xi^{\alpha\beta}$ y $\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ espinores simétricos que se transforman entre sí en la inversión (§ 19).

$$im^2\psi_\mu = p^\nu\psi_{\mu\nu}, \tag{14.2}$$

donde $p = i\partial$ (*A. Proca*, 1936). Aplicando a ambos miembros de la ecuación (14.2) la operación p^μ, obtendremos (dado el carácter antisimétrico de $\psi_{\mu\nu}$)

$$p^\mu\psi_\mu = 0. \tag{14.3}$$

De (14.1-2) se puede eliminar $\psi_{\mu\nu}$ substituyendo la primera ecuación en la segunda. Teniendo en cuenta (14.3), se obtendrá

$$(p^2 - m^2)\psi_\mu = 0, \tag{14.4}$$

donde de nuevo vemos (cf, § 10) que m es la masa de la partícula. De esta manera, una partícula libre con spin 1 se puede describir por un solo 4-vector ψ^μ cuyas componentes satisfacen la ecuación de segundo orden (14.4) y también la condición suplementaria (14.3) que excluye de ψ^μ la parte que pertenece al spin 0.

En el sistema de reposo, en el que ψ_μ no depende de las coordenadas espaciales, encontramos que $p^0\psi_0 = 0$. Dado que, al mismo tiempo, es $p^0\psi_0 = m\psi_0$, vemos que en dicho sistema de referencia $\psi_0 = 0$, como debía ser. Junto con ψ_0 se anulan también las ψ_{ik}.

Una partícula de spin 1 puede poseer diferente paridad intrínseca, lo que depende de si ψ^μ es un vector propiamente dicho o un pseudovector. En el primer caso

$$P\psi^\mu = (\psi^0, -\psi^i),$$

y en el segundo

$$P\psi^\mu = (-\psi^0, \psi^i).$$

Las ecuaciones (14.1-2) pueden obtenerse mediante un principio de variación con el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu *} - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu *}(\partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu) - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi^*_\nu - \partial_\nu\psi^*_\mu) + m^2\psi_\mu\psi^{\mu *}. \tag{14.5}$$

El papel de coordenadas generalizadas independientes lo representan en él ψ_μ, ψ^*_μ, $\psi_{\mu\nu}$, $\psi^*_{\mu\nu}$ *.

Para hallar el tensor de energía-impulso, la fórmula (10.11) no es del todo conveniente en el presente caso, ya que conduciría a un tensor no simétrico que requeriría una simetrización adicional. En vez de esto, cabe utilizar la fórmula

$$\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\sqrt{-g} = -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} + \frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{14.6}$$

en la que se supone que L se ha expresado en forma adecuada a coordenadas curvilíneas arbitrarias (véase II, § 94). Si L contiene solamente las componentes del

* Si se llevara a cabo la variación tan sólo respecto de ψ_μ [suponiendo que antes se ha expresado $\psi_{\mu\nu}$ en función de ψ_μ de acuerdo con (14.1)], la ecuación (14.3) debería introducirse como condición suplementaria, independiente del principio de variación.

propio tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (pero no sus derivadas respecto de las coordenadas), la fórmula anterior se simplifica:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, L}{\partial g^{\mu\nu}} = 2\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} L$$

(recordaremos que $d \ln g = -g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$).

Dado que las derivadas en la fórmula (14.6) no se refieren a las cantidades ψ_μ, $\psi_{\mu\nu}$, al aplicarla no es necesario considerar estas cantidades como independientes; cabe entonces utilizar directamente la relación (14.1) y escribir el lagrangiano (14.5) en la forma

$$L = -\frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^*_{\lambda\rho} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + m^2 \psi_\mu \psi^*_\nu g^{\mu\nu}. \tag{14.7}$$

Entonces

$$T_{\mu\nu} = -\psi_{\mu\lambda}\psi_\nu{}^{\lambda *} - \psi^*_{\mu\lambda}\psi_\nu{}^{\lambda} + m^2(\psi^*_\mu \psi_\nu + \psi^*_\nu \psi_\mu) + g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\psi_{\lambda\rho}\psi^{\lambda\rho *} - m^2 \psi^*_\lambda \psi^\lambda\right). \tag{14.8}$$

En particular, la densidad de energía viene dada por una expresión definida positiva

$$T_{00} = \frac{1}{2}\psi_{ik}\psi^*_{ik} + \psi_{0i}\psi^*_{0i} + m^2(\psi_0 \psi^*_0 + \psi_i \psi^*_i). \tag{14.9}$$

El 4-vector densidad de corriente que se conserva viene dado por la expresión

$$j^\mu = i(\psi^{\mu\nu *}\psi_\nu - \psi^{\mu\nu}\psi^*_\nu). \tag{14.10}$$

Es posible hallarlo, de acuerdo con la fórmula (12.12), derivando el lagrangiano (14.5) respecto de las derivadas $\partial_\mu \psi_\nu$. En particular,

$$j^0 = i(\psi^{0k *}\psi_k - \psi^{0k}\psi^*_k) \tag{14.11}$$

y no es una magnitud esencialmente positiva.

Una onda plana, normalizada a una partícula en el volumen $V = 1$, se escribe:

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_\mu e^{-ipx}, \quad u_\mu u^{\mu *} = -1, \tag{14.12}$$

donde u_μ es el 4-vector unitario de polarización, que [en virtud de (14.3)] satisface la condición de transversalidad en cuatro dimensiones

$$u_\mu p^\mu = 0. \tag{14.13}$$

En efecto, substituyendo la función (14.12) en (14.9) y (14.11), obtendremos

$$T_{00} = -2\varepsilon^2 \psi_\mu \psi^{\mu *} = \varepsilon, \qquad j^0 = 1.$$

En contraposición con el fotón, una partícula vectorial de masa no nula tiene tres direcciones de polarización independientes. Para las correspondientes amplitudes véase (16.21).

La matriz densidad para partículas vectoriales parcialmente polarizadas se

define de manera que en un estado puro se reduzca al producto

$$\rho_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu^*$$

[análogo al (8.7) para fotones]. Según (14.12-13), éste satisface las condiciones

$$p^\mu \rho_{\mu\nu} = 0, \quad \rho_\nu^\mu = -1 \tag{14.14}$$

Para partículas totalmente no-polarizadas, $\rho_{\mu\nu}$ debe ser de la forma $\rho_{\mu\nu} = a\, g_{\mu\nu} + b\, p_\mu p_\nu$. Determinando los coeficientes a y b mediante (14.14), obtendremos:

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right) \tag{14.15}$$

La cuantificación del campo vectorial se lleva a cabo de manera del todo análoga al caso del campo escalar y no hay necesidad de repetir de nuevo todos los razonamientos. El hecho de que la expresión (14.9) para T_{00} sea definida positiva, mientras que no lo es j^0 dado por (14.11), conduce, como en el caso escalar, a la necesidad de aplicar la cuantificación de Bose.

Existe una íntima relación entre las propiedades de un campo vectorial realmente neutro y el campo electromagnético. El campo vectorial neutro se representa por un operador-ψ real:

$$\psi_\mu = \sum_{p\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (c_{p\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx} + c_{p\alpha}^+ u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx}), \tag{14.16}$$

donde $c_{p\alpha}$, $c_{p\alpha}^+$ son operadores bosónicos de aniquilación y de creación de partículas (el subíndice α numera las tres polarizaciones independientes). El lagrangiano de este campo es:

$$L = \frac{1}{4}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu}(\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu) + \frac{1}{2} m^2 \psi_\mu \psi^\mu. \tag{14.17}$$

Al campo electromagnético corresponde el caso $m = 0$. El 4-vector ψ^μ es entonces el 4-potencial A^μ, y el 4-tensor $\psi^{\mu\nu}$, el tensor del campo $F^{\mu\nu}$, ligado con el potencial por la definición (14.1). La ecuación (14.2) se transforma en $\partial^\nu \psi_{\mu\nu} = 0$, lo que corresponde al segundo par de ecuaciones de Maxwell. De ella no se sigue ya la condición (14.3), la cual, de esta manera, deja de ser necesaria. Dada la ausencia de una condición suplementaria, no hay necesidad de considerar en el lagrangiano ψ_μ y $\psi_{\mu\nu}$ como « coordenadas » independientes y el lagrangiano (14.17) se reduce a

$$L = -\frac{1}{4}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} \tag{14.18}$$

de acuerdo con la conocida expresión clásica del lagrangiano del campo electromagnético. Este lagrangiano, junto con el tensor $\psi_{\mu\nu}$, es invariante respecto de una transformación de contraste arbitraria de los « potenciales » ψ_μ. Se ve claramente la relación de esta circunstancia con el hecho de que la masa sea nula: el lagrangiano (14.17) no posee esta propiedad debido al término $m^2\psi_\mu\psi^\mu$.

§ 15. Ecuación de onda para partículas con mayores valores enteros del spin

Dado que las ecuaciones de onda (14.3-4) se siguen inmediatamente una vez se da la masa y el spin de la partícula, la utilización práctica del lagrangiano se reduce no tanto a deducir estas ecuaciones, como a la construcción de expresiones para la energía, el impulso y la carga del campo.

Para este fin, conforme ya se hizo notar, cabe utilizar en vez de (14.5) la expresión (14.7) y esta última se puede transformar todavía más. Utilizando (14.1), escribiremos (14.7) en la forma

$$L = -(\partial_\mu \psi^*_\nu)(\partial^\mu \psi^\nu) + (\partial_\nu \psi^*_\mu)(\partial^\mu \psi^\nu) + m^2 \psi_\mu \psi^{\mu *} =$$
$$= -(\partial_\mu \psi^*_\nu)(\partial^\mu \psi^\nu) + m^2 \psi^*_\mu \psi^\mu + \partial_\nu (\psi^*_\mu \partial^\mu \psi^\nu) - \psi^*_\mu \partial^\mu \partial_\nu \psi^\nu.$$

En virtud de (14.3), el último término se anula y el penúltimo es una divergencia. Prescindiendo de ella, obtendremos el lagrangiano

$$L' = -(\partial_\mu \psi^*_\nu)(\partial^\mu \psi^\nu) + m^2 \psi^*_\mu \psi^\mu. \tag{15.1}$$

Éste tiene la misma estructura que el lagrangiano (10.9) de una partícula con spin 0, difiriendo solamente en que el escalar ψ se substituye por el 4-vector ψ_μ y en el signo. Esto último se debe a que ψ_μ es un vector espacial, de modo que $\psi_\mu \psi^{\mu *} < 0$, mientras que para una partícula escalar se tiene $\psi \psi^* > 0$.

Si se construye el 4-tensor energía-impulso y el 4-vector corriente mediante el lagrangiano (15.1), obtendremos expresiones de la misma forma que en el caso de las expresiones (10.12) y (10.18) para un campo escalar:

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu \psi^{\lambda *} \cdot \partial_\nu \psi_\lambda - \partial_\nu \psi^{\lambda *} \cdot \partial_\mu \psi_\lambda - L' g_{\mu\nu}, \tag{15.2}$$

$$j_\mu = -i[\psi^*_\lambda \partial_\mu \psi^\lambda - (\partial_\mu \psi^*_\lambda)\psi^\lambda]. \tag{15.3}$$

Estas expresiones difieren de (14.8) y (14.10) también en una divergencia. Pero los valores locales de estas cantidades no tienen (como ya se subrayó anteriormente) un sentido físico profundo. Tan sólo importan las integrales de volumen P_μ (10.15) y Q (10.19), que coincidirán para ambas expresiones de $T_{\mu\nu}$ y de j_μ.

Esta manera de describir la situación se generaliza inmediatamente al caso de partículas con spin arbitrario (entero). La función de onda de una partícula de spin s es un 4-tensor irreducible de orden s, es decir, un tensor que es simétrico respecto de todos sus índices y que se anula al contraer respecto de cualquier par de ellos:

$$\psi_{..\mu..\nu..} = \psi_{..\nu..\mu..}, \quad \psi_{..\mu..}{}^{\mu}{}_{..} = 0. \tag{15.4}$$

Este tensor debe satisfacer la condición suplementaria de transversalidad en cuatro dimensiones:

$$p^\mu \psi_{..\mu..} = 0, \tag{15.5}$$

y cada una de sus componentes ha de ser solución de la ecuación de segundo orden

$$(p^2 - m^2)\psi \ldots = 0. \tag{15.6}$$

En el sistema de reposo, la condición (15.5) conduce a que se anulen todas las componentes del 4-tensor entre cuyos índices figure el 0. En otras palabras, la función de onda en el sistema de reposo (es decir, en el límite no-relativista) se reduce, como debía, a un 3-tensor irreducible de orden s cuyo número de componentes independientes es igual a $2s + 1$.

El lagrangiano, el tensor de energía impulso y el vector corriente para un campo de partículas de spin s difieren de (15.1-3) tan sólo en la substitución de ψ_λ por $\psi_{\lambda\mu\ldots}$.

Una onda plana normalizada se escribe:

$$\psi^{\mu\nu\ldots} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^{\mu\nu\ldots} e^{-ipx}, \quad u^*_{\mu\nu\ldots} u^{\mu\nu\ldots} = -1, \tag{15.7}$$

y en ella la amplitud de la onda satisface las condiciones

$$u^{\cdots\mu\cdots} p_\mu = 0. \tag{15.8}$$

Se tienen $2s + 1$ estados de polarización independientes.

La cuantificación del campo se efectúa mediante una generalización evidente a partir de los casos de spin 0 ó 1.

El esquema expuesto es por completo suficiente para el fin que nos habíamos fijado — la descripción de un campo de partículas libres. Otra cosa es el plantearse el problema de describir la interacción de partículas con el campo electromagnético. Esta interacción debería introducirse en un lagrangiano a partir del cual se podrían obtener todas las ecuaciones sin necesidad de imponer condiciones suplementarias (véase también más adelante la nota en la página 128). Sin embargo, de hecho resulta que una tal descripción de la interacción es aplicable tan sólo a los electrones — a partículas de spin 1/2 (véase § 2). Por ello, en el caso de otros valores del spin este problema podría tener tan sólo un interés metódico.

Hay que observar que para todos los valores del spin $s > 1$ (enteros y semienteros) resulta imposible formular un principio de variación a partir de una función solamente (tensorial o espinorial) cuyo orden corresponda al spin dado. Para conseguirlo resulta imprescindible introducir como elementos auxiliares otras cantidades tensoriales o espinoriales de orden inferior. El lagrangiano se elige entonces de tal manera que estas magnitudes auxiliares se anulan automáticamente en virtud de las ecuaciones del campo de partículas libres que se siguen del principio de variación *.

§ 16. Estados de helicidad de una partícula**

En la teoría relativista el momento cinético orbital $\boldsymbol{l}$ y el spin $\boldsymbol{s}$ de una partícula en movimiento no se conservan por separado. Únicamente se conserva el momento cinético total $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$. Por ello, tampoco se conserva la proyección del spin en una dirección dada cualquiera (eje z) y, en consecuencia, esta cantidad no sirve

* Véase M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Soc., **A173**, 211 (1939). En este trabajo se lleva a cabo el programa indicado para partículas con spin 3/2 y 2.

** El contenido de este párrafo se refiere a partículas de spin cualquiera (entero o semientero).

para enumerar los estados (espinoriales) de polarización de una partícula en movimiento.

Se conserva, sin embargo, la proyección del spin sobre la dirección orientada del impulso: dado que $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, el producto $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}$ coincide con el producto $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|)$ que sí se conserva. Esta magnitud se llama *helicidad* ★ (la hemos considerado ya para el fotón en el § 8). Sus valores propios los designaremos por λ ($\lambda = -s, \ldots, +s$) y los estados de una partícula con valores determinados de λ se llamarán estados de helicidad.

Sea $\psi_{\boldsymbol{p}\lambda}$ la función de onda (onda plana) que describe el estado de la partícula con valores determinados de $\boldsymbol{p}$ y λ, y $u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})$, su amplitud; para abreviar las notaciones no escribiremos los índices de las componentes de esta función (para spin entero, estos son los índices de un 4-tensor).

Vimos en los párrafos precedentes que en la descripción relativista de las partículas con spin (entero) no nulo es necesario introducir una función de onda con un número de componentes mayor que $2s + 1$. Sin embargo, el número de componentes independientes sigue siendo igual a $2s + 1$; las componentes « sobrantes » se eliminan imponiendo condiciones suplementarias en virtud de las cuales estas componentes se anulan en el sistema de reposo (en el capítulo que sigue veremos esto mismo para s semientero).

De acuerdo con las fórmulas de transformación del momento cinético (véase II, § 14), la helicidad es invariante respecto de las transformaciones de Lorentz que no modifiquen la dirección (orientada) de $\boldsymbol{p}$ sobre la cual se proyecta dicho momento. Por ello el número λ conserva en tales transformaciones su sentido de número cuántico y para estudiar las propiedades de simetría de los estados de helicidad cabe utilizar un sistema de referencia en el cual el impulso $|\boldsymbol{p}| \ll m$ (en el límite, el sistema de reposo). Entonces $\psi_{\boldsymbol{p}\lambda}$ se reduce a una función de onda no-relativista de $2s + 1$ componentes. Designemos su amplitud por $w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})$, indicando como argumento el versor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ a lo largo del cual se cuantifica el momento cinético. La amplitud $w^{(\lambda)}$ es función propia del operador $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{s}$:

$$(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{s})\, w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n}) = \lambda w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n}). \tag{16.1}$$

En la representación espinorial, $w^{(\lambda)}$ es un espinor simétrico contravariante de orden $2s$; según las fórmulas de correspondencia III (57.2) sus componentes se pueden numerar también de acuerdo con los valores de la proyección del spin σ sobre un eje fijo z★★.

★ En ruso, spiral'nost'.

★★ Las consideraciones desarrolladas (como también la enumeración de los posibles valores λ) se refieren a partículas de masa no nula. Para las partículas de masa cero no existe sistema de reposo y la helicidad puede tener únicamente dos valores $\lambda = \pm s$. Esto último está ligado con la circunstancia recordada ya en el § 8: los estados de una tal partícula se clasifican de acuerdo con su comportamiento respecto del grupo de simetría axil, grupo que admite tan sólo una degeneración doble de los niveles (desde el punto de vista de las propiedades de la ecuación de onda, esto significa que en el paso al límite $m \to 0$ el sistema de ecuaciones para una partícula de spin s se descompone en ecuaciones independientes que corresponden a partículas sin masa y con spins s, $s - 1, \ldots$). Así, para el fotón $\lambda = \pm 1$ y el papel de componentes $w^{(\lambda)}$ lo representan los vectores tridimensionales $\mathbf{e}^{(\pm 1)}$ (8.2).

En la representación de impulsos, las funciones de onda de los estados considerados coinciden en esencia con las amplitudes $u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})$. Concretamente,

$$\psi_{\boldsymbol{p}\lambda}(\boldsymbol{k}) = u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}) = u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}), \tag{16.2}$$

donde el impulso en tanto que variable independiente se ha designado por $\boldsymbol{k}$, para distinguirlo de su valor propio $\boldsymbol{p}$, y $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ para diferenciarlo de $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ *. En el límite no-relativista

$$\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = w^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}) = w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}). \tag{16.3}$$

De manera más detallada esta expresión debería escribirse en la forma

$$\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu},\ \sigma) = w_{\sigma}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu})\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}),$$

donde se indica explícitamente también la variable independiente discreta σ.

El operador helicidad $\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{n}$ conmuta con los operadores j_z y $\mathbf{j}^2$. En efecto, el operador momento cinético está ligado con una rotación infinitesimal del sistema de coordenadas, y el producto escalar de dos vectores es invariante respecto de cualquier rotación. En consecuencia, existen estados estacionarios en los que la partícula posee simultáneamente valores determinados del momento cinético j, de su proyección $j_z = m$ y de la helicidad λ. A tales estados los llamaremos *estados de helicidad esféricos.*

Determinemos las funciones de onda de estos estados en la representación de impulsos. Esto puede hacerse valiéndose de las fórmulas obtenidas en el §a del apéndice**. Junto con el sistema de coordenadas fijo en el espacio xyz (respecto del cual se definen las funciones $\psi_{jm\lambda}$) introduciremos también un sistema $\xi\eta\zeta$ « móvil » con el eje ζ a lo largo de $\boldsymbol{\nu}$. Substituyendo en la fórmula (a.2) el símbolo m' por λ escribamos

$$\psi_{jm\lambda}(\boldsymbol{k}) = \psi_{j\lambda}^{(0)} D_{\lambda m}^{(j)}(\boldsymbol{\nu}).$$

Dado que el eje ζ coincide con el eje de cuantificación del momento cinético en la función $\psi_{j\lambda}^{(0)}$, ésta coincide con la amplitud $u^{(\lambda)}$. La función de onda normalizada (véase más adelante) es

$$\psi_{jm\lambda}(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\, D_{\lambda m}^{(j)}(\boldsymbol{\nu}) u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}). \tag{16.4}$$

Se plantea aquí, sin embargo, una cuestión de elección de fases ligada con la siguiente falta de unicidad. La rotación del sistema de coordenadas $\xi\eta\zeta$ respecto del xyz se determina por tres ángulos α, β, γ; en cambio, la dirección orientada de $\boldsymbol{\nu}$, de la cual tan sólo puede depender la función de onda de la partícula, depende

* La función—δ $\delta^{(2)}$ se define de manera que $\int\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n})\,do_{\boldsymbol{\nu}} = 1$. En (16.2) [y en el caso análogo que sigue, (16.4)] se ha prescindido de la función—δ que garantiza que el valor de la energía es un valor dado.

** Las fórmulas obtenidas en el § *a* se basan solamente en propiedades de simetría respecto de los giros. Por ello, son aplicables a las funciones en la representación de impulsos en igual medida que lo son a las funciones de coordenadas.

únicamente de los dos ángulos esféricos $\alpha \equiv \varphi$, $\beta \equiv \theta$. En consecuencia, hay que llegar a un convenio acerca de cómo elegir el ángulo γ. Nosotros supondremos que $\gamma = 0$, es decir, definiremos $D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{v})$ por la relación

$$D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{v}) = D^{(j)}_{\lambda m}(\varphi,\ \theta,\ 0) = e^{im\varphi} d^{(j)}_{\lambda m}(\theta). \tag{16.5}$$

En virtud de (a.14) las funciones (16.5) satisfacen las condiciones de ortogonalidad y de normalización siguientes:

$$\int D^{(j_1)*}_{\lambda_1 m_1}(\mathbf{v}) D^{(j_2)}_{\lambda_2 m_2}(\mathbf{v}) \frac{do_{\mathbf{v}}}{4\pi} = \frac{1}{2j+1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \tag{16.6}$$

($do_{\mathbf{v}} = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$). En cuanto a la ortogonalidad de las funciones $\psi_{jm\lambda}$ respecto del índice λ, dicha ortogonalidad queda garantizada por el factor $u^{(\lambda)}$. De esta manera, las funciones $\psi_{jm\lambda}$ son ortogonales, como debía ser, respecto de todos sus índices $jm\lambda$ y con la elección (16.4) del coeficiente están normalizadas por la condición

$$\int |\psi_{jm\lambda}|^2 \, do_{\mathbf{v}} = 1. \tag{16.7}$$

Se supone aquí que las amplitudes $u^{(\lambda)}$ están normalizadas a la unidad: $u^{(\lambda)} u^{(\lambda)*} = 1$.

Veamos cómo se comportan las funciones de onda de los estados de helicidad respecto a la inversión de las coordenadas. El producto del vector polar $\mathbf{v}$ por el vector axil $\boldsymbol{j}$ es un pseudoescalar. Por lo tanto, es claro ya desde un principio que, como resultado de la inversión, un estado de helicidad λ pasa a ser un estado con helicidad $-\lambda$; falta solamente determinar los factores de fase en estas transformaciones.

En la inversión $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$. El vector $\mathbf{v}$ se determina por dos ángulos φ, θ y la transformación $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$ se realiza en la substitución $\varphi \to \varphi + \pi$, $\theta \to \pi - \theta$. Con ello se fija un nuevo eje ζ, pero queda sin determinar la situación de los ejes ξ y η que depende también del tercer ángulo de Euler γ; la transformación de θ y φ únicamente, no ofrece posibilidad alguna de distinguir, en este sentido, la reflexión del sistema de coordenadas de un giro de eje ζ. En términos de los tres ángulos de Euler la inversión se traduce en la transformación

$$\alpha \equiv \varphi \to \varphi + \pi, \quad \beta \equiv \theta \to \pi - \theta, \quad \gamma \to \pi - \gamma. \tag{16.8}$$

En consecuencia, si $D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{v})$ se define de acuerdo con (16.5) (es decir, con $\gamma = 0$) y la substitución $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$ se interpreta como resultado de la inversión, entonces será

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = D^{(j)}_{\lambda m}(\varphi + \pi,\ \pi - \theta,\ \pi). \tag{16.9}$$

Mediante las fórmulas (a.5), (a.9) y (a.11) encontraremos, por lo tanto,

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = e^{i\lambda\pi} d^{(j)}_{\lambda m}(\pi - \theta)\, e^{im(\varphi+\pi)} =$$
$$= (-1)^{j-\lambda} e^{im\varphi} d^{(j)}_{-\lambda m}(\theta) = (-1)^{j-\lambda} D^{(j)}_{-\lambda m}(\varphi,\ \theta,\ 0),$$

o bien

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\mathbf{v}) = (-1)^{j-\lambda} D^{(j)}_{-\lambda m}(\mathbf{v}) \tag{16.10}$$

($j - \lambda$ es un número entero).

Una fórmula análoga para el espinor $w^{(\lambda)}$ se puede obtener observando que sus componentes $w^{(\lambda)}_{\sigma}$ coinciden, salvo un factor, con las funciones

$$w^{(\lambda)}_{\sigma}(\mathbf{v}) \sim D^{(s)}_{\lambda\sigma}(\mathbf{v})^*. \tag{16.11}$$

En efecto, aplicando la fórmula de transformación (a.1) a las funciones propias de spin y suponiendo que su proyección-ζ posee un determinado valor λ (es decir, substituyendo en el segundo miembro de (a.1) $\psi_{jm'}$ por $\delta_{m'\lambda}$), se encuentra que las $D^{(s)}_{\lambda\sigma}(\mathbf{v})$ son funciones de onda de spin que corresponden a valores determinados de sus proyecciones z y ζ (σ y λ). El conjunto de estas funciones ($\sigma = -s, \ldots, +s$) constituye [según las fórmulas de correspondencia III (58.1)] un espinor covariante de orden $2s$. En cuanto a las componentes del espinor contravariante [al que corresponden según las fórmulas III (57.2) las componentes $w^{(\lambda)}_{\sigma}$], se transforman como las componentes conjugado-complejas de un espinor covariante del mismo orden.

De (16.10-11) se sigue

$$w^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = (-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\mathbf{v}) \tag{16.12}$$

($s - \lambda$ es un número entero). La operación inversión aplicada a $w^{(\lambda)}$ consiste, sin embargo, no sólo en la substitución $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$, sino en la multiplicación por un factor de fase común (la « paridad intrínseca » de la partícula), factor que designaremos por η:

$$\mathrm{P}w^{(\lambda)}(\mathbf{v}) = \eta w^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = \eta\,(-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\mathbf{v}). \tag{16.13}$$

Para la amplitud relativista $u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})$, en cambio, esta transformación se escribirá en la forma

$$\mathrm{P}u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) = \eta\beta u^{(\lambda)}(-\boldsymbol{k}) = \eta\,(-1)^{s-\lambda} u^{(-\lambda)}(\boldsymbol{k}), \tag{16.14}$$

donde β es una cierta matriz que se comporta como la matriz unidad respecto de las componentes $u^{(\lambda)}$ que subsisten en el límite $|\boldsymbol{p}| \to 0$. Es importante el hecho de que esta matriz no depende de los números cuánticos del estado y en este sentido la diferencia entre (16.13) y (16.14) carece de importancia *.

Aplicando (16.14) a (16.2), obtendremos la ley de transformación de las funciones de onda de los estados $|\boldsymbol{n}\lambda\rangle$:

$$\mathrm{P}\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\mathbf{v}) = \eta\,(-1)^{s-\lambda}\psi_{-\boldsymbol{n}-\lambda}(\mathbf{v}). \tag{16.15}$$

Para los estados de helicidad esféricos, utilizando (16.10) y (16.12) se obtendrá la ley de transformación:

---

* Así, para $s = 1$ las amplitudes $u^{(\lambda)}$ son los 4-vectores (16.21); en tal caso β es la matriz unidad respecto de los índices 4-vectoriales: $\beta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Para $s = 1/2$ (como veremos en el capítulo siguiente) $u^{(\lambda)}$ es un bispinor; en este caso el factor de fase es $\eta = i$ y β es la matriz de Dirac γ^0 [véase (21.10)].

$$P\psi_{jm\lambda}(\mathbf{v}) = \eta(-1)^{j-s}\psi_{jm-\lambda}(\mathbf{v}). \tag{16.16}$$

Según (16.16), los estados ψ_{jm0} se transforman entre sí, es decir, poseen una paridad determinada. Pero si $\lambda \neq 0$, sólo poseen paridad determinada las superposiciones de estados con helicidades opuestas:

$$\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{jm\lambda} \pm \psi_{jm-\lambda}). \tag{16.17}$$

En la inversión estos estados se transforman entre sí de acuerdo con

$$P\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\mathbf{v}) = \pm\eta(-1)^{j-s}\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\mathbf{v}). \tag{16.18}$$

Conviene prestar atención al hecho de que, en este párrafo, hemos procedido a una clasificación de los estados de una partícula libre que posee un momento cinético dado, operando solamente con magnitudes que se conservan y sin acudir al concepto de momento cinético orbital (utilizado, por ejemplo, en los párrafos 6 y 7 para clasificar los estados del fotón).

Consideremos como ejemplo el caso de spin 1. En el sistema de reposo, las amplitudes $u^{(\lambda)}$ (4-vectores) se reducen a vectores tridimensionales $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$, los cuales representan aquí precisamente el papel de las amplitudes $w^{(\lambda)}$. La acción del operador de spin 1 sobre la función vectorial $\boldsymbol{e}$ viene dada por la fórmula

$$(\mathbf{s}_i\boldsymbol{e})_k = -ie_{ikl}e_l \tag{16.19}$$

(III, § 58, problema 2). La ecuación (16.1) toma por ello la forma

$$i\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}^{(\lambda)} = \lambda\boldsymbol{e}^{(\lambda)}. \tag{16.20}$$

Sus soluciones (en el sistema de coordenadas $\xi\eta\zeta$ con el eje ζ a lo largo de $\boldsymbol{n}$) coinciden con los versores esféricos (7.14)*:

$$\boldsymbol{e}^{(0)} = i(0,\ 0,\ 1), \quad \boldsymbol{e}^{(\pm1)} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(1,\ \pm i,\ 0). \tag{16.21}$$

En el sistema de referencia en el que la partícula tiene impulso $\boldsymbol{p}$, las amplitudes de los estados de helicidad son 4-vectores

$$u^{(0)\mu} = \left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m},\ \frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{e}^{(0)}\right),\quad u^{(\pm1)\mu} = (0,\ \boldsymbol{e}^{(\pm1)}). \tag{16.22}$$

Si $\boldsymbol{e}$ es un vector polar, se tendrá $\eta = -1$. Entonces las funciones (16.17) (que para $s = 1$ son vectores tridimensionales) tienen las paridades siguientes:

$$\psi^{(+)}_{jm|\lambda|}:\ P = (-1)^j,$$
$$\psi^{(-)}_{jm|\lambda|}:\ P = (-1)^{j+1},$$
$$\psi_{jm0}\ :\ P = (-1)^j.$$

* La elección de los factores de fase se fija imponiendo la condición de que los elementos de matriz de los operadores de spin calculados mediante las funciones propias (16.21) correspondan a las definiciones generales dadas en III, §§ 27, 107.

Comparando con la definición de vectores esféricos (7.4), vemos que estas funciones coinciden idénticamente (salvo ciertos factores de fase) con las funciones $\boldsymbol{Y}^{(\mathrm{E})}_{jm}$, $\boldsymbol{Y}^{(\mathrm{M})}_{jm}$, $\boldsymbol{Y}^{(\mathrm{L})}_{jm}$, respectivamente. Determinando los factores de fase (digamos, por comparación con los valores en $\theta = 0$), obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}^{(\mathrm{E})}_{jm} &= i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\,(\boldsymbol{e}^{(1)}D^{(j)}_{1m} + \boldsymbol{e}^{(-1)}D^{(j)}_{-1m}),\\
\boldsymbol{Y}^{(\mathrm{M})}_{jm} &= i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\,(\boldsymbol{e}^{(1)\prime}D^{(j)}_{1m} + \boldsymbol{e}^{(-1)\prime}D^{(j)}_{-1m}),\\
\boldsymbol{Y}^{(\mathrm{L})}_{jm} &= i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\,\boldsymbol{e}^{(0)}D^{(j)}_{0m}
\end{aligned} \tag{16.23}$$

(¡j es un número entero!); $\boldsymbol{e}^{(\lambda)\prime} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}^{(\lambda)}$ son los versores circulares en los ejes $\xi'\eta'\zeta$ girados 90° en torno del eje ζ respecto de los ejes $\xi\eta\zeta$.

La última de las fórmulas (16.23) es equivalente a la expresión (a.17) para $d^{(j)}_{0m}(\theta)$. Por otra parte, de la primera (o de la segunda) fórmula se puede obtener una expresión simple para las funciones $d^{(j)}_{\pm 1m}$. Tenemos

$$i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}D^{(j)}_{\pm 1m} = \boldsymbol{Y}^{(\mathrm{E})}_{jm}\cdot\boldsymbol{e}^{(\pm 1)*} = \frac{1}{\sqrt{j\,(j+1)}}\,\boldsymbol{e}^{(\pm 1)*}\cdot\nabla Y_{jm}.$$

El producto escalar en el segundo miembro de la igualdad lo explicitaremos en el sistema $\xi\eta\zeta$, teniendo en cuenta que

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right) \to \left(\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Recordando la definición (7.2) de la función Y_{jm} y la definición (16.5), se obtiene el resultado

$$d^{(j)}_{\pm 1m}(\theta) = (-1)^{m+1}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!\,j\,(j+1)}}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m}{\operatorname{sen}\theta}\right)P^m_j(\cos\theta),\ m \geqslant 0. \tag{16.24}$$

CAPÍTULO 3

FERMIONES

§ 17. Espinores cuadridimensionales

En la teoría no relativista una partícula con spin arbitrario s se representa por una magnitud de $(2s + 1)$ componentes — por un espinor simétrico de orden $2s$. Desde el punto de vista matemático, éstos son magnitudes que sirven de bases para representaciones irreducibles del grupo de los giros espaciales.

En la teoría relativista este grupo interviene solamente como subgrupo del grupo más amplio de las rotaciones cuadridimensionales — del grupo de Lorentz. Se plantea con esto la necesidad de construir una teoría de los espinores cuadridimensionales (4-espinores), es decir, de magnitudes en las que se realicen las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz; a su exposición se dedican los párrafos 17-19. En los §§ 17, 18, se estudia solamente el grupo propio de Lorentz, que no contiene la inversión espacial; esta última se considerará en el § 19.

La teoría de los 4-espinores se construye de manera análoga a como se construye la teoría de los espinores tridimensionales (*B. L. van der Waerden*, 1929; *G. E. Uhlenbeck*, *O. Laporte*, 1931).

Un espinor ξ^α es una magnitud de dos componentes ($\alpha = 1, 2$); como componentes de la función de onda de una partícula de spin 1/2, ξ^1 y ξ^2 corresponden a los valores propios de la proyección-z del spin, igual a $+ 1/2$ y a $- 1/2$, respectivamente. En toda transformación del grupo (propio) de Lorentz las dos magnitudes ξ^1, ξ^2 se transforman entre sí:

$$\begin{aligned} \xi^{1'} &= \alpha\xi^1 + \beta\xi^2, \\ \xi^{2'} &= \gamma\xi^1 + \delta\xi^2. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Los coeficientes α, β, γ, δ son determinadas funciones de los ángulos de la rotación del 4-sistema de coordenadas sometidas a la condición

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{17.2}$$

es decir, el determinante de la transformación binaria (17.1) es igual a 1, al igual que el determinante de las transformaciones de coordenadas en el grupo de Lorentz.

En virtud de la condición (17.2), la forma bilineal $\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1$ (donde ξ^α y Ξ^α son dos espinores) es invariante respecto de la transformación (17.1) (corresponde a una partícula de spin 0 « compuesta » por dos partículas de spin 1/2). Para lograr una notación natural de tales expresiones invariantes, junto con las componentes « contravariantes » del espinor, ξ^α, se introducen también las componentes « covariantes » ξ_α. El paso de unas a otras se efectúa mediante el « espinor métrico » $g_{\alpha\beta}$ *:

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta, \tag{17.3}$$

donde

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17.4}$$

de modo que

$$\xi_1 = \xi^2, \quad \xi_2 = -\xi^1. \tag{17.5}$$

Entonces el invariante $\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1$ se escribe en forma de producto escalar $\xi^\alpha\Xi_\alpha$. Obsérvese que $\xi^\alpha\Xi_\alpha = -\xi_\alpha\Xi^\alpha$.

Hasta aquí las propiedades enumeradas coinciden formalmente con las propiedades de los espinores tridimensionales. La diferencie surge, sin embargo, al considerar los espinores complejo-conjugados.

En la teoría no relativista la suma

$$\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*}, \tag{17.6}$$

que determina la densidad de probabilidad de localización de las partículas en el espacio, debía ser un escalar y para esto las componentes $\psi^{\alpha*}$ habían de transformarse como componentes covariantes de un espinor; en otras palabras, la transformación (17.1) tenía que ser unitaria ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). En cambio, en la teoría relativista la densidad de partículas no es un escalar, sino que representa la componente temporal de un 4-vector. Como consecuencia, la condición indicada no tiene ya por qué quedar satisfecha y a los coeficientes de la transformación no se les impone ahora ninguna condición suplementaria [aparte la (17.2)]. Cuatro cantidades complejas α, β, γ, δ bajo la única condición (17.2) equivalen a $8 - 2 = 6$ parámetros reales — en correspondencia con el número de ángulos que determinan una rotación del 4-sistema de coordenadas (rotaciones en seis planos de coordenadas).

De esta manera, las transformaciones binarias complejo-conjugadas resultan ser esencialmente distintas, de modo que en la teoría relativista existen dos tipos de espinores. Para diferenciar estos tipos se adoptan notaciones especiales: como índices de los espinores que se transforman según las fórmulas conjugado-complejas de las fórmulas (17.1) se utilizan cifras con un punto encima de ellas *(índices puntados)*. Así, pues, por definición,

$$\eta^{\dot\alpha} \sim \xi^{\alpha*}, \tag{17.7}$$

donde el símbolo $\sim$ significa « se transforma como ». En otras palabras, las fórmulas de transformación de un espinor « puntado » son:

* Designaremos los índices espinoriales por las primeras letras del alfabeto griego: α, β, γ, ...

$$\eta^{\dot{1}\prime} = \alpha^* \eta^{\dot{1}} + \beta^* \eta^{\dot{2}}, \qquad \eta^{\dot{2}\prime} = \gamma^* \eta^{\dot{1}} + \delta^* \eta^{\dot{2}}. \tag{17.8}$$

Las operaciones de bajar y subir índices puntados se efectúan de la misma manera que en el caso de índices no puntados:

$$\eta_{\dot{1}} = \eta^{\dot{2}}, \quad \eta_{\dot{2}} = -\eta^{\dot{1}}. \tag{17.9}$$

Respecto de las rotaciones espaciales, el comportamiento de los 4-espinores coincide con el de los 3-espinores. En el caso de éstos, conforme sabemos, se tiene $\psi_\alpha^* \sim \psi^\alpha$. Por consiguiente, en virtud de la definición (17.7), el 4-espinor η_α se comporta en las rotaciones como el 3-espinor contravariante ψ^α. Como componentes de la función de onda de una partícula de spin 1/2, a los valores propios de la proyección del spin 1/2 y $-1/2$ corresponden, por ello, las componentes covariantes $\eta_{\dot{1}}$ y $\eta_{\dot{2}}$.

Los espinores de orden superior se definen como conjuntos de magnitudes que se transforman como los productos de componentes de un cierto número de espinores de primer orden. En este caso, entre los índices del espinor de orden superior pueden aparecer tanto índices puntados como no puntados. Así, existen tres tipos de espinores de segundo orden:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta, \quad \zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha \eta^{\dot{\beta}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sim \eta^{\dot{\alpha}} \mathrm{H}^{\dot{\beta}}.$$

En este sentido, indicar solamente el orden total de un espinor no basta para definir de manera unívoca este concepto; en consecuencia, cuando sea necesario indicaremos el orden mediante un par de números (k, l) — el número de índices no puntados y el número de índices puntados.

Dado que las transformaciones (17.1) y (17.8) son algebraicamente independientes, no hay necesidad de fijar el orden de los índices puntados y no puntados (en este sentido, por ejemplo, los espinores $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ y $\zeta^{\dot{\beta}\alpha}$ son exactamente el mismo).

Para que tenga carácter invariante, toda igualdad espinorial debe contener en uno y otro miembro los mismos números de índices no puntados y puntados; en el caso contrario, es evidente que dejaría de ser válida al pasar de un sistema de referencia a otro. Hay que recordar respecto de esto que el paso a la expresión conjugado-compleja presupone la substitución de índices puntados por índices no puntados, y recíprocamente. En consecuencia, la relación $\eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\xi^{\alpha\beta})^*$ entre dos espinores tiene carácter invariante.

La contracción de espinores o de sus productos se puede efectuar solamente con relación a un par de índices de igual especie — dos índices puntados o dos índices no puntados. En cambio, la suma respecto de un par de índices de diferente especie no es una operación invariante. Por ello, precisamente, a partir del espinor

$$\zeta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \ldots \dot{\beta}_l}, \tag{17.10}$$

simétrico respecto de sus k índices no puntados y sus l índices puntados, es imposible formar un espinor de orden inferior (recordemos que la contracción respecto de un par de índices con relación a los cuales el espinor es simétrico da como resul-

tado el valor cero). Esto significa que partiendo de las cantidades (17.10) no es posible formar un número menor de combinaciones lineales que se transformen entre sí en todas las transformaciones del grupo. En otras palabras, los 4-espinores simétricos son bases de representaciones irreducibles del grupo propio de Lorentz. Cada representación irreducible viene dada por el par de números (k, l).

Dado que cada índice espinorial toma dos valores, en (17.10) se tienen un conjunto de $k+1$ números $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ esencialmente distintos (que contienen 0, 1, 2, ..., k índices iguales a la unidad, y k, $k-1, \ldots, 0$ iguales a dos) y $l+1$ conjuntos de números $\dot\beta_1\dot\beta_2\ldots\dot\beta_l$. En total, por consiguiente, un espinor simétrico de orden (k, l) tiene $(k+1)(l+1)$ componentes independientes; este número es precisamente la dimensión de la representación irreducible de la que es base.

§ 18. Relación entre espinores y 4-vectores

Un espinor $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ con un índice puntado y otro no puntado tiene $2\cdot 2 = 4$ componentes independientes — tantas precisamente cuantas componentes posee un 4-vector. Es claro, por consiguiente, que tanto uno como otro son base de una misma representación irreducible del grupo propio de Lorentz y, en consecuencia, entre sus componentes debe existir una determinada correspondencia.

Para establecer ésta acudamos ante todo a la correspondencia análoga en el caso de tres dimensiones, teniendo en cuenta que, con relación a las rotaciones puramente espaciales, el comportamiento de los 3- y 4-espinores debe ser el mismo.

Para un espinor tridimensional $\psi^{\alpha\beta}$ valen determinadas fórmulas de correspondencia (véase III, § 58) que escribiremos aquí en la forma

$$a_x = \frac{1}{2}(\psi^{22} - \psi^{11}) = \frac{1}{2}(\psi^{2}{}_{1} + \psi^{1}{}_{2}),$$

$$a_y = -\frac{i}{2}(\psi^{22} + \psi^{11}) = \frac{i}{2}(\psi^{1}{}_{2} - \psi^{2}{}_{1}), \quad a_z = \frac{1}{2}(\psi^{12} + \psi^{21}) = \frac{1}{2}(\psi^{1}{}_{1} - \psi^{2}{}_{2}),$$

donde a_x, a_y, a_z son las componentes de un vector tridimensional $\boldsymbol{a}$. Pasando al caso de cuatro dimensiones, hay que substituir las componentes $\psi^{\alpha}{}_{\beta}$ por $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ y entender por a_x, a_y, a_z las componentes contravariantes a^1, a^2, a^3 de un 4-vector. En lo que concierne a la expresión para la cuarta componente del vector, a^0, su forma resulta evidente sin más que tener en cuenta la circunstancia que se hizo notar en el § 17: la cantidad (17.6) debe transformarse como a^0. Por lo tanto, $a^0 \sim \zeta^{1\dot1} + \zeta^{2\dot2}$ y el coeficiente de proporcionalidad se determina de manera que el escalar $\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\alpha\dot\beta}$ coincida con el escalar $a_\mu a^\mu \equiv a^2$.

De esta manera llegamos a las siguientes fórmulas de correspondencia

$$\begin{aligned} a^1 &= \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot2} + \zeta^{2\dot1}), \quad & a^2 &= \frac{i}{2}(\zeta^{1\dot2} - \zeta^{2\dot1}), \\ a^3 &= \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot1} - \zeta^{2\dot2}), \quad & a^0 &= \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot1} + \zeta^{2\dot2}). \end{aligned} \tag{18.1}$$

Las fórmulas inversas son

$$\begin{aligned} \zeta^{1\dot{1}} &= \zeta_{2\dot{2}} = a^3 + a^0, & \zeta^{2\dot{2}} &= \zeta_{1\dot{1}} = a^0 - a^3. \\ \zeta^{1\dot{2}} &= -\zeta_{2\dot{1}} = a^1 - ia^2, & \zeta^{2\dot{1}} &= -\zeta_{1\dot{2}} = a^1 + ia^2. \end{aligned} \tag{18.2}$$

Se tiene, además,

$$\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\,\zeta^{\alpha\dot{\beta}} = 2a^2. \tag{18.3}$$

Observemos también que

$$\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\,\zeta^{\gamma\dot{\beta}} = \delta_\alpha^\gamma\, a^2. \tag{18.4}$$

Esta última igualdad se sigue de que un espinor de segundo orden $\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta_\gamma^{\dot{\beta}}$ es antisimétrico respecto de los índices $\alpha\gamma$ y, por consiguiente, es proporcional al espinor métrico.

La correspondencia entre un espinor $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ y un 4-vector constituye un caso particular de una regla general: cualquier espinor simétrico de orden (k, k) es equivalente a un 4-tensor de orden k irreducible (es decir, tal que su contracción respecto de un par cualquiera de índices se anula).

La relación entre un espinor y un 4-vector se puede escribir en forma compacta mediante las matrices de segundo orden de Pauli *:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18.5}$$

Si designamos simbólicamente por ζ la matriz de las cantidades $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ con los índices superiores (colocando primero el no puntado), las fórmulas (18.2) se escriben así:

$$\zeta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma} + a^0 \tag{18.6}$$

(en el segundo miembro se supone, naturalmente, que a^0 es el producto de este número por la matriz unidad). Las fórmulas inversas son:

$$\boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\zeta\boldsymbol{\sigma}), \quad a^0 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\zeta. \tag{18.7}$$

Mediante las fórmulas (18.6-7) es posible establecer el ligamen entre las leyes de transformación de un 4-vector y de un espinor y, con ello, expresar la ley de transformación de un espinor en función de los parámetros de las rotaciones del 4-sistema de coordenadas.

Escribamos la transformación del espinor ξ^α en la forma

$$\xi^{\alpha'} = (\mathrm{B}\xi)^\alpha, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{18.8}$$

donde B es la matriz de segundo orden constituida por los coeficientes de la transformación binaria. Entonces la transformación de un espinor puntado es:

$$\eta^{\dot{\beta}'} = (\mathrm{B}^*\eta)^{\dot{\beta}} = (\eta\mathrm{B}^+)^{\dot{\beta}}, \tag{18.9}$$

* En III utilizamos las matrices $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$.

y la transformación de un espinor de segundo orden $\zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^{\alpha}\eta^{\dot{\beta}}$ la escribiremos simbólicamente en la forma $\zeta' = B\zeta B^{+}$ *. En una transformación infinitesimal $B = 1 + \lambda$, donde λ es una matriz pequeña, y con una precisión que alcanza a las cantidades pequeñas de primer orden, se tiene

$$\zeta' = \zeta + (\lambda\zeta + \zeta\lambda^{+}). \tag{18.10}$$

Consideremos primero la transformación de Lorentz que lleva a un sistema de referencia que se mueve con una velocidad infinitamente pequeña $\delta\boldsymbol{V}$ (sin cambiar las direcciones de los ejes espaciales). Un 4-vector $a^{\mu} = (a^0, \boldsymbol{a})$ se transforma entonces de acuerdo con

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - a^0\delta\boldsymbol{V}, \quad a^{0\prime} = a^0 - \boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{V}. \tag{18.11}$$

Utilicemos ahora las fórmulas (18.7). Por una parte, la transformación de a^0 se puede representar por

$$a^{0\prime} = a^0 - \boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{V} = a^0 - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\zeta\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{V}),$$

y, por otra parte, en la forma

$$a^{0\prime} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\zeta' = a^0 + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\lambda\zeta + \zeta\lambda^{+}) = a^0 + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\zeta\,(\lambda + \lambda^{+}).$$

Ambas expresiones deben coincidir idénticamente (es decir, para ζ arbitrario). De ello se deduce la siguiente igualdad:

$$\lambda + \lambda^{+} = -\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{V}.$$

De la misma manera, considerando la transformación de $\boldsymbol{a}$, obtendremos

$$\boldsymbol{\sigma}\lambda + \lambda^{+}\boldsymbol{\sigma} = -\delta\boldsymbol{V}.$$

Estas igualdades, interpretadas como ecuaciones en λ, tienen la siguiente solución:

$$\lambda = \lambda^{+} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{V}.$$

Así, pues, la transformación infinitesimal de Lorentz del espinor ξ^{α} se consigue con la matriz

$$B = 1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,\delta V, \tag{18.12}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el versor de la velocidad $\delta\boldsymbol{V}$. A partir de aquí es fácil hallar también la transformación para una velocidad finita $\boldsymbol{V}$. Recordemos para ello que una transformación de Lorentz representa (geométricamente) una rotación del 4-sistema de coordenadas en el plano t, $\boldsymbol{n}$ y de ángulo φ ligado con la velocidad V por la

* Para las componentes covariantes, se tiene:

$$\xi'_{\alpha} = (\tilde{B}^{-1}\xi)_{\alpha} = (\xi B^{-1})_{\alpha}, \quad \eta'^{\dot{\alpha}} = (\eta B^{*-1})^{\dot{\alpha}} \tag{18.8a}$$

(de modo que el producto de dos espinores $\xi_{\alpha}\Xi^{\alpha}$ se conserve invariante).

igualdad $\text{tgh}\varphi = V$*. A una transformación infinitesimal corresponde el ángulo $\delta\varphi = \delta V$ y la rotación de ángulo finito φ se consigue aplicando $\varphi/\delta\varphi$ veces la rotación de ángulo $\delta\varphi$. Elevando el operador (18.12) a la potencia $\varphi/\delta\varphi$ y pasando al límite $\delta\varphi \to 0$, obtendremos

$$\mathrm{B} = e^{-\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}. \tag{18.13}$$

El sentido matemático de la acción de este operador queda de manifiesto observando que, por las propiedades de las matrices de Pauli, todas las potencias pares de $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ son iguales a 1 y todas las potencias impares son iguales a $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$. Teniendo en cuenta que el cosh se desarrolla en potencias pares del argumento, mientras que senh contiene sólo potencias impares, se obtiene en definitiva

$$\mathrm{B} = \cosh\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{senh}\,\frac{\varphi}{2}\,, \quad \text{tgh}\,\varphi = V. \tag{18.14}$$

Obsérvese que las matrices B de las transformaciones de Lorentz resultan ser hermíticas: $\mathrm{B} = \mathrm{B}^{+}$.

Consideremos ahora una rotación infinitesimal de un sistema espacial de coordenadas. En tal caso, un vector tridimensional $\boldsymbol{a}$ se transforma de acuerdo con

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{a}\,, \tag{18.15}$$

donde $\delta\boldsymbol{\theta}$ es el vector del ángulo infinitesimal de rotación. La correspondiente transformación de un espinor se podría hallar de manera análoga. Sin embargo, ello no es necesario, puesto que, respecto de las rotaciones espaciales, el comportamiento de los 4-espinores coincide con el de los 3-espinores y para éstos se conoce ya la transformación a partir de la relación general del operador de spin con el operador de una rotación infinitesimal:

$$\mathrm{B} = 1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{\theta}. \tag{18.16}$$

El paso a una rotación de ángulo finito θ se efectúa de manera análoga al paso de (18.12) a (18.14):

$$\mathrm{B} = \exp\left(\frac{i\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\,, \tag{18.17}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el versor del eje de rotación. Esta matriz es unitaria ($\mathrm{B}^{+} = \mathrm{B}^{-1}$) como debía ser en tanto que rotación espacial.

§ 19. Inversión de espinores

Al exponer (en III) la teoría tridimensional de espinores no estudiamos su comportamiento respecto de la operación inversión espacial, puesto que en la teoría no-relativista esto no conduciría a ningún resultado físico nuevo. Sin embargo, analizaremos ahora esta cuestión para mejor aclarar el estudio que sigue acerca de las propiedades de los 4-espinores respecto de la inversión.

* Recordaremos que en los planos que contienen el eje del tiempo la métrica es pseudoeuclídea.

La operación inversión no cambia el signo de un vector axil, como lo es el vector spin. Por ello, no cambia tampoco el valor de su proyección s_z. Se sigue de aquí que en la inversión cada una de las componentes de un espinor ψ^α puede transformarse tan sólo en una función de sí misma, es decir, debe ser

$$\psi^\alpha \to P\psi^\alpha, \tag{19.1}$$

donde P es un coeficiente constante. Aplicando la inversión dos veces, volvemos al sistema de coordenadas de partida. En el caso de los espinores, sin embargo, el hecho de volver a la situación inicial se puede entender en dos sentidos distintos: como rotación del sistema de ángulo 0° o de ángulo 360°. Para los espinores estas dos definiciones no son equivalentes, ya que las ψ^α cambian de signo en una rotación de 360°. Así, pues, son posibles dos modalidades alternativas de la inversión: en un caso

$$P^2 = 1, \qquad P = \pm 1, \tag{19.2}$$

y en el otro

$$P^2 = -1, \qquad P = \pm i. \tag{19.3}$$

Es esencial en todo esto que el concepto de inversión se defina exactamente de la misma manera para todos los espinores. No es admisible que espinores diferentes se comporten en la inversión de maneras diferentes [según (19.2) o (19.3)], ya que entonces no sería posible construir un escalar (o un pseudoescalar) a partir de dos espinores cualesquiera: si el espinor ψ^α se transformara de acuerdo con (19.2), y el φ^α según (19.3), la cantidad $\psi^\alpha\varphi_\alpha$ quedaría multiplicada en la inversión por $\pm i$, en vez de conservarse invariable (o tan sólo cambiar de signo).

Hay que subrayar también que el atribuir a un espinor (cualquiera que sea la definición adoptada para la inversión) una determinada paridad P no tiene un sentido absoluto, puesto que los espinores cambian de signo en una rotación de ángulo 2π, rotación que siempre se puede aplicar a la vez que la inversión. Un carácter absoluto, sin embargo, sí lo tiene la « paridad relativa » de dos espinores, definida como paridad del escalar $\psi^\alpha\varphi_\alpha$ construido a partir de ellos; dado que en una rotación de ángulo 2π cambian de signo a la vez todos los espinores, la indeterminación ligada con ellos no se refleja en la paridad de dicho escalar.

Pasemos ahora a los espinores cuadridimensionales.

Observemos ante todo que en tanto la inversión cambia el signo de solamente tres (x, y, z) de las cuatro (t, x, y, z) coordenadas, esta operación conmuta con los giros espaciales, pero no con las transformaciones que cambian la dirección del eje t. Si L es la transformación de Lorentz que lleva al sistema de referencia que se mueve con la velocidad $\boldsymbol{V}$, se tiene PL = L'P, donde L' es la transformación que conduce al sistema que se mueve con velocidad $-\boldsymbol{V}$.

De aquí se sigue que en la inversión las componentes de un 4-espinor ξ^α no pueden transformarse entre sí. Si la inversión del espinor ξ^α se redujera, como antes, a las transformaciones (19.1) (es decir, se representara por una matriz pro-

porcional a la matriz unidad), conmutaría con absolutamente todas las transformaciones de Lorentz, lo que evidentemente no debe ocurrir (ya que las operaciones L y L′ no coinciden, evidentemente, en su aplicación a ξ^α).

De esta manera, la inversión ha de transformar las componentes ξ^α del espinor en otras cantidades. Éstas pueden ser tan sólo las componentes de algún otro espinor $\eta^{\dot\alpha}$ que no coincida por sus propiedades de transformación con ξ^α. Dado que la inversión no cambia (como ya se hizo notar) la proyección-z del spin, las componentes ξ^1 y ξ^2 pueden pasar a ser en la inversión tan sólo las componentes $\eta_{\dot 1}$ y $\eta_{\dot 2}$ correspondientes a los mismos valores $s_z = 1/2$ y $s_z = -1/2$. Entendiendo por inversión la operación que da 1 al ser aplicada dos veces, se puede definir su acción por las fórmulas

$$\xi^\alpha \to \eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to \xi^\alpha \tag{19.4}$$

[para las componentes covariantes ξ_α y contravariantes $\eta^{\dot\alpha}$ estas transformaciones tienen signo opuesto:

$$\xi_\alpha \to -\eta^{\dot\alpha}, \qquad \eta^{\dot\alpha} \to -\xi_\alpha, \tag{19.4a}$$

ya que el bajar y subir un mismo índice se efectúa con signos distintos, véase (17.5) y (17.9)★]. Pero si la inversión se entiende en el sentido de que $P^2 = -1$, su acción se define por las fórmulas

$$\xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha \tag{19.5}$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$\xi_\alpha \to -i\eta^{\dot\alpha}, \qquad \eta^{\dot\alpha} \to -i\xi_\alpha \tag{19.5a}$$

Una cierta diferencia en el carácter de las dos definiciones de la inversión consiste en que, en la segunda, los espinores conjugado-complejos se transforman de la misma manera: si $\Xi_\alpha = \eta^*_{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha} = \xi^{\alpha *}$, entonces de (19.5) se deduce que $\Xi_\alpha \to -iH^{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha} \to -i\Xi_\alpha$, es decir, la misma regla que para ξ_α, $\eta^{\dot\alpha}$. En cambio, según la definición (19.4) obtendríamos la transformación $\Xi_\alpha \to H^{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha} \to \Xi_\alpha$, cuyo signo es opuesto al de la transformación de los espinores ξ_α, $\eta^{\dot\alpha}$. Volveremos a considerar esta cuestión en el § 27 para examinar los posibles aspectos físicos de esta diferencia.

En lo que sigue y para concretar adoptaremos siempre como definición la (19.5).

Respecto del subgrupo de los giros, los espinores ξ^α y $\eta_{\dot\alpha}$ se transforman, conforme sabemos, de la misma manera. Formando con sus componentes las combinaciones

$$\xi^\alpha \pm \eta_{\dot\alpha}, \tag{19.6}$$

obtendríamos cantidades que se transforman en la inversión según (19.1) con

---

* La definición (19.4), naturalmente, es, por lo que ya sabemos, un puro convenio, lo que está ligado con la independencia de las cantidades ξ^α y $\eta_{\dot\alpha}$. Así, introduciendo en vez de $\eta_{\dot\alpha}$ un nuevo espinor $\eta'_{\dot\alpha} = e^{i\delta}\eta_{\dot\alpha}$ obtendremos en lugar de (19.4) la definición equivalente

$$\xi^\alpha \to e^{-i\delta}\eta'_{\dot\alpha}, \qquad \eta'_{\dot\alpha} \to e^{i\delta}\xi^\alpha.$$

$P = \pm i$. Estas combinaciones, sin embargo, no se comportan como espinores respecto de todas las transformaciones del grupo de Lorentz.

De esta manera, incluir la inversión en el grupo de simetría exige considerar a la vez pares de espinores $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$; un tal par se llama *bispinor* (de primer orden). Las cuatro componentes de un bispinor son base de una de las representaciones irreducibles del grupo ampliado de Lorentz.

El producto escalar de dos bispinores $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$ y $(\Xi^\alpha, \mathrm{H}_{\dot\alpha})$ se puede formar de dos maneras. La cantidad

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha + \eta_{\dot\alpha} \mathrm{H}^{\dot\alpha} \tag{19.7}$$

no cambia en la inversión, es decir, es un escalar en sentido estricto. La cantidad

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha - \eta_{\dot\alpha} \mathrm{H}^{\dot\alpha} \tag{19.8}$$

es también invariante respecto de las rotaciones del 4-sistema de coordenadas, pero cambia de signo en la inversión; en otras palabras, es un pseudoescalar.

De dos maneras se puede definir también un espinor de segundo orden $\zeta^{\alpha\dot\beta}$. Definiéndolo por la ley de transformación

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha \mathrm{H}^{\dot\beta} + \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta}, \tag{19.9}$$

obtendremos una cantidad que en la inversión se transforma de acuerdo con

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \to \zeta_{\dot\alpha\beta}. \tag{19.10}$$

Entonces el 4-vector a^μ, al que equivale dicho espinor, se transforma [en correspondencia con las fórmulas (18.1)] según la ley $(a^0, \boldsymbol{a}) \to (a^0, -\boldsymbol{a})$, es decir, es un 4-vector en sentido estricto (y el vector tridimensional $\boldsymbol{a}$, un vector polar).

Sin embargo, cabe también definir $\zeta^{\alpha\beta}$ de acuerdo con

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha \mathrm{H}^{\dot\beta} - \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta}. \tag{19.11}$$

Entonces *

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \to -\zeta_{\dot\alpha\beta}. \tag{19.12}$$

A un espinor de este tipo corresponde un 4-vector para el cual la inversión significa la transformación $(a^0, \boldsymbol{a}) \to (-a^0, \boldsymbol{a})$, es decir, un 4-pseudovector (siendo el vector tridimensional $\boldsymbol{a}$ un vector axil).

Los espinores simétricos de segundo orden con índices de la misma especie se definen por las leyes de transformación:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta + \xi^\beta \Xi^\alpha, \qquad \eta_{\dot\alpha\dot\beta} \sim \eta_{\dot\alpha} \mathrm{H}_{\dot\beta} + \eta_{\dot\beta} \mathrm{H}_{\dot\alpha}. \tag{19.13}$$

En la inversión se transforman entre sí:

---

* Hay que subrayar que las leyes de transformación (19.10) y (19.12), que difieren una de otra en el signo del segundo miembro, no son en modo alguno equivalentes, puesto que en ambos miembros aparecen las componentes del mismo espinor (cf. la nota de la pág. 75).

$$\xi^{\alpha\beta} \to -\eta_{\dot\alpha\dot\beta}. \tag{19.14}$$

El par $(\xi^{\alpha\beta}, \eta_{\dot\alpha\dot\beta})$ constituye un bispinor de segundo orden. El número de sus componentes independientes es igual a $3 + 3 = 6$. Pero el mismo número de componentes independientes posee un 4-tensor antisimétrico de segundo orden $a^{\mu\nu}$. Por ello, entre uno y otro debe existir una determinada correspondencia (ambos son base de representaciones irreducibles equivalentes del grupo completo de Lorentz).

Dado que con relación al grupo propio de Lorentz los espinores $\xi^{\alpha\beta}$ y $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$ se transforman independientemente, también a partir de las componentes del 4-tensor $a^{\mu\nu}$ se pueden formar dos grupos de cantidades que se transforman exclusivamente entre sí en todas las rotaciones del 4-sistema de coordenadas. Esta duplicación se presenta de la siguiente manera.

Introduzcamos un vector polar tridimensional $\boldsymbol{p}$ y un vector axil de tres dimensiones $\boldsymbol{a}$ ligados con las componentes del 4-tensor $a^{\mu\nu}$ por

$$a^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \equiv (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) \tag{19.15}$$

[$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ es una abreviatura que emplearemos para designar las componentes de un tal tensor]. Aquí es $a_{\mu\nu} = (-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ y de las dos cantidades

$$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{p}^2 = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} a^{\mu\nu}, \qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p} = \frac{1}{2} e_{\mu\nu\rho\sigma} a^{\mu\nu} a^{\rho\sigma}$$

la primera es un escalar, y la segunda, un pseudoescalar; respecto del grupo propio de Lorentz, tanto uno como otra son invariantes. Junto con ellas, son también invariantes los cuadrados de los vectores tridimensionales $\boldsymbol{f}^{\pm} = \boldsymbol{p} \pm i\boldsymbol{a}$. Esto significa que cualquier rotación en el 4-espacio es equivalente para los vectores $\boldsymbol{f}^{\pm}$a una « rotación » en el espacio de tres dimensiones, en general, de ángulo complejo (a los seis ángulos de rotación en el 4-espacio corresponden tres « ángulos de rotación » complejos del sistema tridimensional). La operación de inversión espacial, que cambia el signo de $\boldsymbol{p}$ (pero no el de $\boldsymbol{a}$), transforma entre sí los vectores $\boldsymbol{f}^{+}$ y $-\boldsymbol{f}^{-}$. Las componentes de estos vectores constituyen precisamente los dos grupos buscados dé cantidades formadas mediante las componentes del tensor $a^{\mu\nu}$.

Con esto resulta evidente también la correspondencia entre las componentes del 4-tensor $a^{\mu\nu}$ y los espinores $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$. Dado que en el grupo de Lorentz figuran como subgrupos los giros espaciales, las relaciones entre las componentes de un espinor y las componentes de un vector tridimensional deben ser las mismas que para los espinores tridimensionales:

$$\begin{aligned} f_x^{+} &= \tfrac{1}{2}(\xi^{22} - \xi^{11}), & f_y^{+} &= \tfrac{i}{2}(\xi^{22} + \xi^{11}), & f_z^{+} &= \xi^{12}; \\ f_x^{-} &= \tfrac{1}{2}(\eta_{\dot2\dot2} - \eta_{\dot1\dot1}), & f_y^{-} &= \tfrac{i}{2}(\eta_{\dot2\dot2} + \eta_{\dot1\dot1}), & f_z^{-} &= \eta_{\dot1\dot2}. \end{aligned} \tag{19.16}$$

PROBLEMA

Establecer la correspondencia general entre espinores de orden par y 4-tensores.

Solución. Todos los espinores para las que $k + l$ es par son base de representaciones irreducibles unívocas del grupo ampliado de Lorentz y, por ello, son equivalentes a 4-tensores, que son también base de tales representaciones*.

Un espinor de orden (k, k) se transforma en la inversión de acuerdo con

$$\zeta^{\alpha\beta\ldots\dot{\gamma}\dot{\delta}\ldots} \rightarrow \pm\, \zeta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\ldots\gamma\delta\ldots} \tag{1}$$

Dicho espinor es equivalente a un 4-tensor simétrico irreducible de orden k — tensor en sentido estricto o pseudotensor—, según sea el signo en (1).

Los espinores de órdenes (k, l) y (l, k), que son bispinores, se transforman en la inversión como sigue:

$$\zeta^{\overbrace{\alpha\beta\ldots}^{k}\,\overbrace{\dot{\gamma}\dot{\delta}\ldots}^{l}} \rightarrow (-1)^{\frac{k-l}{2}}\, \chi_{\underbrace{\dot{\alpha}\dot{\beta}\ldots}_{k}\,\underbrace{\gamma\delta\ldots}_{l}}. \tag{2}$$

Para $l = k + 2$ el bispinor es equivalente a un 4-tensor $a_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots}$ irreducible de orden $k + 2$, antisimétrico respecto de los índices $[\mu\nu]$ y simétrico con relación a todos los demás. La irreducibilidad de este tensor significa que es cero el resultado de su contracción respecto de cualquier par de índices y que también es nulo el resultado de formar el dual respecto de tres índices cualesquiera (es decir, $e^{\lambda\mu\nu\rho}a_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots} = 0$); esta última condición significa que es cero el resultado de la suma cíclica con relación a los índices $\mu\nu$ y uno (cualquiera) de los restantes.

Para $l = k + 4$ el bispinor es equivalente a un 4-tensor irreducible $a_{[\lambda\mu]\,[\nu\rho]\sigma\tau\ldots}$ de orden $k + 4$ con las siguientes propiedades: es antisimétrico respecto de los pares de índices $[\lambda\mu]$ y $[\nu\rho]$, simétrico con relación a los demás, simétrico respecto de la permutación del par $[\lambda\mu]$ con el par $[\nu\rho]$, conduce al valor cero al contraer un par cualquiera de índices y da también cero al formar el dual para una terna cualquiera de índices.

De manera general, para $l = k + 2n$ el bispinor es equivalente a un 4-tensor irreducible de orden $k + 2n$ antisimétrico respecto de n pares de índices y simétrico con relación a los k índices restantes**.

§ 20. La ecuación de Dirac en la representación espinorial

Una partícula de spin 1/2 se representa en su sistema de reposo por una función de onda de dos componentes —por un espinor tridimensional—. Por su «origen cuadridimensional», éste puede ser tanto un 4-espinor no puntado como puntado. En la descripción de la partícula en un sistema de referencia arbitrario intervienen ambos 4-espinores; los designaremos por ξ^a y $\eta_{\dot{a}}$***.

* Los espinores de orden impar, en cambio, son base de representaciones bivalentes del grupo: una rotación espacial de 360° cambia el signo de los espinores, de modo que a cada elemento del grupo corresponden dos matrices de signos opuestos.

** Los 4-tensores antisimétricos para un número mayor de índices (respecto de tres, de cuatro, etc.) no aparecen en esta clasificación por una razón evidente: un tensor antisimétrico de tercer orden es equivalente (es dual) de un pseudovector y un tensor antisimétrico de cuarto orden se reduce a un escalar (es proporcional al pseudotensor unidad $e^{\lambda\mu\nu\rho}$); la antisimetría con relación a un número mayor de índices es totalmente imposible en el espacio de cuatro dimensiones.

*** Un espinor tridimensional de primer orden puede «proceder» también de 4-espinores de órdenes impares más elevados que, en el sistema de reposo, pasan a ser antisimétricos respecto de un par de índices o más de uno. Tales variantes, sin embargo, conducirían a ecuaciones de órdenes más elevados (cf. la nota de la pág. 39).

Para una partícula libre, el único operador que interviene en la ecuación de onda puede ser (como ya se indicó en el § 10) tan sólo el operador 4-impulso $p_\mu = i\partial_\mu$. En la notación espinorial, a este 4-vector corresponde un operador espinorial $p_{\alpha\dot{\beta}}$ tal que

$$\begin{aligned} p^{1\dot{1}} &= p_{2\dot{2}} = p_z + p_0, & p^{2\dot{2}} &= p_{1\dot{1}} = p_0 - p_z, \\ p^{1\dot{2}} &= -p_{2\dot{1}} = p_x - ip_y, & p^{2\dot{1}} &= -p_{1\dot{2}} = p_x + ip_y. \end{aligned} \tag{20.1}$$

La ecuación de onda es una relación diferencial lineal entre componentes de los espinores formada mediante el operador $p_{\alpha\dot{\beta}}$. La condición de invariancia relativista fija el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} &= m\xi^\alpha, \\ p_{\dot{\beta}\alpha}\xi^\alpha &= m\eta_{\dot{\beta}}, \end{aligned} \tag{20.2}$$

donde m es una constante sin dimensiones. Introducir en estas dos ecuaciones constantes distintas m_1 y m_2 (o cambiar el signo de m) carecería de objeto, ya que las ecuaciones se podrían en cualquier caso reconducir a la forma primitiva sin más que redefinir ξ^α o $\eta_{\dot{\alpha}}$.

Eliminemos de las ecuaciones (20.2) uno de los dos espinores substituyendo la expresión de $\eta_{\dot{\beta}}$ dada por la segunda ecuación en la primera:

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} = \frac{1}{m}p^{\alpha\dot{\beta}}p_{\gamma\dot{\beta}}\xi^\gamma = m\xi^\alpha.$$

Pero, según (18.4), $p^{\dot{\alpha}\beta}p_{\gamma\dot{\beta}} = p^2\delta^\alpha_\gamma$, de modo que

$$(p^2 - m^2)\xi^\gamma = 0, \tag{20.3}$$

donde se ve que m es la masa de la partícula.

Obsérvese que la necesidad de introducir una masa en la ecuación de onda exige considerar a la vez dos espinores (ξ^α y $\eta_{\dot{\alpha}}$): es imposible construir con uno solo de ellos una ecuación relativísticamente invariante que contenga un parámetro sin dimensiones. Por ello mismo, la función de onda resulta automáticamente invariante con relación a la inversión espacial si se define la transformación de la función de onda mediante

$$\mathrm{P}: \qquad \xi^\alpha \to i\eta_{\dot{\alpha}}, \qquad \eta_{\dot{\alpha}} \to i\xi^\alpha. \tag{20.4}$$

Es fácil ver que al aplicar esta substitución [y a la vez la substitución $p^{\dot{\alpha}\beta} \to p_{\alpha\dot{\beta}}$, que es evidente teniendo en cuenta las fórmulas (20.1)] las dos ecuaciones (20.2) se transforman entre sí. Dos espinores que en la inversión se transforman el uno en el otro constituyen una magnitud con cuatro componentes — un bispinor.

La ecuación de onda relativista representada por el sistema (20.2) se llama *ecuación de Dirac* (establecida por Dirac en 1928). Para un futuro estudio y aplicación de esta ecuación, consideraremos las diferentes formas en que se puede presentar.

Mediante la fórmula (18.6) escribiremos las ecuaciones (20.2) en la forma

$$(p_0 + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\eta = m\xi,$$
$$(p_0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\xi = m\eta. \tag{20.5}$$

Los símbolos ξ y η representan aquí cantidades con dos componentes — los espinores

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{20.6}$$

(el primero con superíndices y el segundo con subíndices), y en la multiplicación de las matrices σ por cualquier cantidad de dos componentes f aquí y en lo que sigue se entenderá siempre la multiplicación de acuerdo con la regla matricial ordinaria

$$(\sigma f)_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} f_\beta. \tag{20.7}$$

Escribir f en forma de columna corresponde al hecho de que en (20.7) cada fila de σ se multiplica por la columna f.

Para facilitar ulteriores referencias, escribamos aquí una vez más las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{20.8}$$

y recordemos sus propiedades fundamentales:

$$\sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i = 2\delta_{ik},$$
$$\sigma_i\sigma_k = ie_{ikl}\sigma_l + \delta_{ik} \tag{20.9}$$

(véase III, § 55).

Escribamos también la ecuación de onda a que satisface la función de onda conjugado-compleja construida a partir de los espinores

$$\xi^* = (\xi^{1*},\ \xi^{2*}), \qquad \eta^* = (\eta_1^*,\ \eta_2^*). \tag{20.10}$$

Dado que todos los operadores p_μ contienen el factor i, se tiene $p_\mu^* = -p_\mu$. Al formar las expresiones conjugado-complejas de ambos miembros de las ecuaciones (20.5), hay que tener también en cuenta que, en virtud del carácter hermítico de las matrices σ ($\sigma^* = \sigma$) es

$$(\sigma f)_\alpha^* = \sigma_{\alpha\beta}^* f_\beta^* = f_\beta^* \sigma_{\beta\alpha} = (f^*\sigma)_\alpha,$$

y obtenemos las ecuaciones en la forma

$$\eta^*(p_0 + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = -m\xi^*,$$
$$\xi^*(p_0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = -m\eta^*. \tag{20.11}$$

Al utilizar esta notación se conviene en que los operadores p^μ actúan sobre la fun-

ción que aparece a la izquierda de los mismos. Escribir ξ^* y η^* en forma de fila corresponde a la multiplicación matricial en estas ecuaciones: la fila f se multiplica por las columuas de las matrices σ:

$$(f^*\sigma)_\alpha = f_\beta^* \sigma_{\beta\alpha} \,. \tag{20.12}$$

La transformación inversión para ξ^*, η^* se define como conjugado-compleja de la transformación (20.4):

$$\mathrm{P}: \quad \xi^{\alpha *} \to -i\eta_\alpha^*, \quad \eta_\alpha^* \to -i\xi^{\alpha *}. \tag{20.13}$$

§ 21. Forma simétrica de la ecuación de Dirac

La forma espinorial de escribir la ecuación de Dirac es la más natural en el sentido de que pone de manifiesto, de manera inmediata, su invarancia relativista. Sin embargo, en las aplicaciones pueden resultar más convenientes otras representaciones de la ecuación de onda que se obtienen mediante otra elección de las cuatro componentes independientes de la función de onda.

Representaremos la función de onda de cuatro componentes por el símbolo ψ (con componentes ψ_i, $i = 1, 2, 3, 4$). En la representación espinorial, esta cantidad es el bispinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{21.1}$$

Pero con igual derecho cabe elegir como componentes independientes ψ cuatro combinaciones linealmente independientes cualesquiera de las componentes de los espinores ξ y η*. Al hacerlo, convendremos en limitar las transformaciones lineales admisibles tan sólo por la condición de que sean unitarias; tales transformaciones no cambian las formas bilineales formadas a partir de ψ y ψ^* (§ 28).

En el caso general de una elección arbitraria de las componentes de ψ, la ecuación de Dirac se puede presentar en la forma

$$\mathrm{p}_\mu \gamma_{ik}^\mu \psi_k = m\psi_i,$$

donde γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) son ciertas matrices 4×4 *(matrices de Dirac)*. De ordinario, escribiremos esta ecuación de forma simbólica prescindiendo de los índices matriciales:

$$(\gamma \mathrm{p} - m)\psi = 0, \tag{21.2}$$

donde

$$\gamma \mathrm{p} \equiv \gamma^\mu \mathrm{p}_\mu = \mathrm{p}_0 \gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3).$$

Así, a la forma espinorial de la ecuación con las componentes de ψ dadas por (21.1) corresponden las matrices**

* Para abreviar, llamaremos también bispinor a la cantidad de cuatro componentes ψ en sus representaciones no espinoriales.

** Aquí y en lo que sigue utilizamos una notación abreviada de las matrices 4×4 expresándolas en función de matrices 2×2: cada símbolo en las expresiones (21.3) es una matriz de este último tipo.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{21.3}$$

como es fácil ver escribiendo las ecuaciones (20.5) en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & p_0 + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

y comparando con (21.2).

En el caso general las matrices γ deben satisfacer tan sólo las condiciones que garanticen que se cumple la igualdad $p^2 = m^2$. Para poner en claro cuáles son estas condiciones, multipliquemos la ecuación (21.2) a la izquierda por γp. Se tiene

$$(\gamma^\mu p_\mu)(\gamma^\nu p_\nu)\psi = m(p_\mu \gamma^\mu)\psi = m^2\psi.$$

Dado que $p_\mu p_\nu$ es un tensor simétrico (todos los operadores p_μ conmutan entre sí), esta igualdad se puede escribir también en la forma

$$\frac{1}{2} p_\mu p_\nu (\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi = m^2\psi,$$

donde se ve que ha de tenerse

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{21.4}$$

Así, pues, todos los pares de matrices γ^μ diferentes anticonmutan y los cuadrados de ellas valen:

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \quad (\gamma^0)^2 = 1. \tag{21.5}$$

En una transformación unitaria cualquiera de las componentes de ψ ($\psi' = U\psi$, donde U es una matriz unitaria 4×4) las matrices γ se transforman de acuerdo con

$$\gamma' = U\gamma U^{-1} = U\gamma U^+ \tag{21.6}$$

[de modo que la ecuación $(\gamma p - m)\psi = 0$ pasa a ser la $(\gamma' p - m)\psi' = 0$]. Las relaciones de conmutación (21.4), naturalmente, se conservan así invariables.

La matriz γ^0 de (21.3) es hermítica, y las matrices $\boldsymbol{\gamma}$, antihermíticas. Estas propiedades se conservan también en cualquier transformación unitaria (21.6), de modo que siempre se tendrá*:

$$\boldsymbol{\gamma}^+ = -\boldsymbol{\gamma}, \quad \gamma^{0+} = \gamma^0. \tag{21.7}$$

Escribamos también la ecuación para la función conjugado-compleja ψ^*. Formando la ecuación conjugado-compleja de la (21.2) y teniendo en cuenta, al hacerlo, las propiedades (21.7), se obtendrá

$$(-p_0\tilde{\gamma}_0 - \mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - m)\psi^* = 0.$$

---

* Estas igualdades se pueden escribir todas juntas en la forma

$$\gamma^{\lambda+} = \gamma^0\gamma^\lambda\gamma^0. \tag{21.7a}$$

Permutemos ψ^* teniendo en cuenta que $\tilde{\gamma}^\mu\psi^* = \psi^*\gamma^\mu$ y multipliquemos luego a la izquierda toda la ecuación por γ^0; observando que $\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ e introduciendo el nuevo bispinor

$$\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0, \quad \psi^* = \bar{\psi}\gamma^0, \tag{21.8}$$

obtendremos

$$\bar{\psi}(\gamma p + m) = 0. \tag{21.9}$$

Al igual que en (20.11), se supone aquí que el operador p actúa sobre la función que aparece a su izquierda. La función $\bar{\psi}$ se llama *conjugada de Dirac* (o conjugada relativista) de la función ψ. El sentido de que aparezca el factor γ^0 en su definición consiste en que (en la representación espinorial) este operador permuta los espinores ξ^* y η^* de modo que en $\bar{\psi} = (\eta^*, \xi^*)$ el primero (como en ψ) es el no puntado, y el segundo, el puntado. Por esta razón precisamente $\bar{\psi}$ constituye una « pareja » más natural que ψ^* cuando, por ejemplo, uno y otro figuran juntos en las diferentes combinaciones bilineales (véase § 28).

La transformación inversión aplicada a la función de onda se puede presentar en la forma

$$\mathrm{P}: \quad \psi \to i\gamma^0\psi, \quad \bar{\psi} \to -i\bar{\psi}\gamma^0. \tag{21.10}$$

En la representación espinorial de ψ, la matriz γ^0 permuta, como debe ocurrir en la inversión, las componentes ξ y η. La invariancia de la ecuación de Dirac respecto de la transformación (21.10) es también evidente de manera directa en el caso general: substituyendo en la ecuación (21.2) $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ y a la vez $\psi \to i\gamma^0\psi$, obtendremos

$$(p_0\gamma^0 + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)\gamma^0\psi = 0.$$

Multiplicando esta ecuación a la izquierda por γ^0 y teniendo en cuenta que γ^0 y $\boldsymbol{\gamma}$ anticonmutan, volvemos a la ecuación de partida.

Multiplicando a la izquierda la ecuación $(\gamma p - m)\psi = 0$ por $\bar{\psi}$, la ecuación $\bar{\psi}(\gamma p + m) = 0$ a la derecha por ψ y sumando los resultados, se obtendrá

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(p_\mu\psi) + (p_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = p_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0,$$

donde los paréntesis indican sobre qué función actúa el operador p. La igualdad obtenida tiene la forma de una ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$, de modo que la magnitud

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^*\psi,\ \psi^*\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\psi) \tag{21.11}$$

constituye el 4-vector densidad de corriente de las partículas. Observemos que su componente temporal $j^0 = \psi^*\psi$ es definida positiva.

La ecuación de Dirac puede representarse en una forma en la que aparece despejada la derivada respecto del tiempo:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathrm{H}\psi, \tag{21.12}$$

donde H es el hamiltoniano de la partícula *. Para esto basta multiplicar la ecuación (21.2) a la izquierda por γ^0. La expresión que se obtiene para el hamiltoniano es:

$$\mathrm{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m, \tag{21.13}$$

donde se ha introducido la notación ordinaria para las matrices que figuran en ella:

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \quad \beta = \gamma^0. \tag{21.14}$$

Observemos que

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}, \quad \beta\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\beta = 0, \quad \beta^2 = 1, \tag{21.15}$$

es decir, todas las matrices $\boldsymbol{\alpha}$, β anticonmutan entre sí y sus cuadrados son iguales a 1; todas ellas son hermíticas. En la representación espinorial

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21.16}$$

En el caso límite de pequeñas velocidades, la partícula debe representarse, al igual que en la teoría no-relativista, por un solo espinor de dos componentes. En efecto, pasando en las ecuaciones (20.5) al límite $\boldsymbol{p} \to 0$, $\varepsilon \to m$, obtendremos $\xi = \eta$, es decir, los dos espinores que constituyen el bispinor coinciden. Sin embargo, se pone aquí de manifiesto un inconveniente de la forma espinorial de escribir la ecuación de Dirac: en el paso al límite, se conservan distintas de cero las cuatro componentes de ψ, a pesar de que efectivamente tan sólo dos de ellas son independientes. Resulta por ello más cómoda la representación de la función de onda ψ en la que, en el límite, se anulan dos de sus componentes.

Conforme a esto, introduzcamos en vez de ξ y η sus combinaciones lineales φ y χ:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta). \tag{21.17}$$

Entonces, para una partícula en reposo es $\chi = 0$. Esta representación de ψ la llamaremos *representación típica*. En la inversión φ y χ se transforman en funciones de sí mismas de acuerdo con

$$\mathrm{P}: \quad \varphi \to i\varphi, \quad \chi \to -i\chi. \tag{21.18}$$

Las ecuaciones para φ y χ se obtienen sumando y restando las ecuaciones (20.5):

* Para una partícula de spin 0, la ecuación de onda no pudo representarse en esta forma: la ecuación (10.5) para el escalar ψ es de segundo orden respecto del tiempo y el sistema (10.4) de ecuaciones de primer orden para la magnitud de cinco componentes (ψ, ψ_μ) no contiene derivadas respecto del tiempo de todas las componentes.

$$\begin{aligned} p_0\varphi - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi &= m\varphi, \\ -p_0\chi + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi &= m\chi. \end{aligned} \tag{21.19}$$

Es claro por esto que a la representación típica corresponden las matrices

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{21.20}$$

Dado que en (21.17) se suman por separado las primeras y las segundas componentes de ξ y η, en la representación típica, como también en la espinorial, las componentes ψ_1 y ψ_3 corresponden a los valores propios $+1/2$ de la proyección del spin, y las ψ_2 y ψ_4, a la proyección $-1/2$. En ambas representaciones, por consiguiente, la matriz $(1/2)\boldsymbol{\Sigma}$, donde

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{21.21}$$

es el operador tridimensional de spin: al aplicar $(1/2)\Sigma_z$ a un bispinor que contiene tan sólo las componentes ψ_1, ψ_3 o las componentes ψ_2, ψ_4, el bispinor queda multiplicado por $+1/2$ o por $-1/2$, respectivamente. En una representación arbitraria esta matriz se puede escribir en la forma

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 = -\frac{i}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha} \tag{21.22}$$

[la definición de γ^5 véase más adelante (22.14)].

PROBLEMAS

1. Hallar las fórmulas de transformación de la función de onda en una transformación de Lorentz infinitesimal y en un giro espacial infinitamente pequeño.

Solución. En la representación espinorial de ψ, en una transformación de Lorentz infinitesimal se tiene

$$\xi' = \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{V}\right)\xi, \quad \eta' = \left(1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{V}\right)\eta$$

[véase (18.8), (18.8a), (18.10)]. Ambas fórmulas pueden escribirse juntas en la forma

$$\psi' = \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\delta\boldsymbol{V}\right)\psi. \tag{1}$$

De manera análoga, la ley de transformación correspondiente a un giro infinitamente pequeño es

$$\psi' = \left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\delta\boldsymbol{\theta}\right)\psi. \tag{2}$$

En esta forma las fórmulas son válidas en cualquier representación de ψ, si por $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ se entienden las matrices en la misma representación.

Es fácil comprobar que las matrices $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ constituyen las componentes de un «4-tensor matricial» antisimétrico

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = (\boldsymbol{\alpha},\ i\boldsymbol{\Sigma})$$

[las componentes se han numerado de acuerdo con la regla (19.15)]. Introduzcamos también el tensor antisimétrico infinitesimal $\delta\varepsilon^{\mu\nu} = (\delta \boldsymbol{V}, \delta \boldsymbol{\theta})$. Entonces

$$\sigma^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} = 2i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\delta\boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\alpha}\cdot\delta\boldsymbol{V},$$

y ambas fórmulas (1-2) se pueden escribir en una forma única:

$$\psi' = \left(1 + \frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\right)\psi. \tag{3}$$

2. Escribir la ecuación de Dirac en una representación tal que en ella no aparezcan coeficientes imaginarios (*E. Majorana*, 1937).

Solución. En la representación típica, en la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + im\beta\right)\psi = 0$$

son imaginarias tan sólo las matrices α_y e $i\beta$. Este carácter imaginario desaparece aplicando una transformación $\psi' = U\psi$ tal que, como resultado de la misma, se permutan la matriz imaginaria α_y y la matriz real β. Para esto hay que hacer

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_y + \beta) = U^{-1}.$$

Entonces

$$\alpha'_x = U\alpha_x U = -\alpha_x, \quad \alpha'_y = \beta, \quad \alpha'_z = -\alpha_z, \quad \beta' = \alpha_y,$$

y la ecuación de Dirac toma la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + im\alpha_y\right)\psi' = 0,$$

en la que todos los coeficientes son reales.

§ 22. Álgebra de las matrices de Dirac

En los cálculos en los que interviene la ecuación de Dirac hay que utilizar a menudo las matrices γ sin acudir a su forma concreta en una u otra representación determinada. Las reglas de operación con estas matrices están por completo determinadas por las relaciones de conmutación

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \tag{22.1}$$

que fijan todas sus propiedades generales.

En este párrafo presentamos una serie de fórmulas y reglas del álgebra de las matrices γ que son útiles en diferentes cálculos.

El « producto escalar » de las matrices γ por sí mismas es: $g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4$. Para abreviar la notación y por analogía con las componentes covariantes de los 4-vectores, introduciremos los símbolos $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Entonces

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4. \tag{22.2}$$

Pero si las matrices γ_μ y γ^μ están separadas por uno o por varios factores γ, mediante una o varias permutaciones con estos factores [y con ayuda de la regla (22.1)] γ_μ y γ^μ pueden llevarse a posiciones contiguas, hecho lo cual la suma (respecto de μ)

se efectúa de acuerdo con (22.2). De esta manera se obtienen las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu &= -2\gamma^\nu,\\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu &= 4g^{\lambda\nu},\\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu &= -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda,\\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu &= 2(\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma).
\end{aligned} \tag{22.3}$$

De ordinario, los factores γ^μ, ... figuran combinados con diferentes 4-vectores en forma de « productos escalares ». En lo que sigue utilizaremos frecuentemente la notación

$$\hat{a} = \gamma a \equiv \gamma^\mu a_\mu. \tag{22.4}$$

Para tales productos, las fórmulas (22.1) pasan a ser

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = 2(ab), \quad \hat{a}\hat{a} = a^2, \tag{22.5}$$

y las fórmulas (22.3),

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\hat{a}\gamma^\mu &= -2\hat{a},\\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\gamma^\mu &= 4(ab),\\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma^\mu &= -2\hat{c}\hat{b}\hat{a},\\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}\gamma^\mu &= 2(\hat{d}\hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{c}\hat{b}\hat{a}\hat{d}).
\end{aligned} \tag{22.6}$$

Una operación que se aplica con frecuencia es la de formar la traza del producto de un cierto número de matrices γ. Consideremos la cantidad

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \equiv \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ \ldots\ \gamma^{\mu_n}). \tag{22.7}$$

En virtud de la conocida propiedad de la traza de un producto de matrices, este tensor es simétrico respecto de las permutaciones cíclicas de los índices $\mu_1\mu_2\ \ldots\ \mu_n$.

Dado que las matrices γ tienen la misma forma en cualquier sistema de referencia, también las cantidades T son independientes del sistema elegido. Por ello, forman un tensor que se expresa exclusivamente en función del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que goza de esta propiedad.

Pero a partir del tensor de segundo orden $g_{\mu\nu}$ se puede construir tan sólo tensores de orden par. De aquí se sigue, sin más, que la traza del producto de un número impar cualquiera de factores γ es igual a cero. En particular, es igual a cero cada una de las trazas de las γ *

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0. \tag{22.8}$$

La traza de la matriz unidad 4×4 [implícita en el segundo miembro de la relación de conmutación (22.1)] es igual a 4. Por ello, tomando la traza de ambos miembros de la igualdad (22.1), se sigue que

* La traza de una matriz es invariante respecto de las transformaciones $\gamma = U\gamma U^{-1}$. Por lo tanto, (22.8) es también evidente sin más que tener en cuenta las expresiones concretas (21.3) de dichas matrices.

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \tag{22.9}$$

La traza del producto de cuatro matrices es

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}. \tag{22.10}$$

Esta fórmula se puede obtener, por ejemplo, « arrastrando » el factor γ^λ hacia la derecha en $\mathrm{Tr}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$ mediante la relación de conmutación (22.1); con cada permutación aparece uno de los términos que figuran en (22.10):

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho}$$

etcétera. Efectuadas todas estas permutaciones, en el segundo miembro aparece $-T^{\mu\nu\rho\lambda} = -T^{\lambda\mu\nu\rho}$, término que pasaremos al primer miembro. Siguiendo este mismo método, el cálculo de la traza del producto de seis γ se reduce al de las trazas de productos de cuatro factores, etc. Así,

$$T^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho\sigma\tau} - g^{\lambda\nu}T^{\mu\rho\sigma\tau} + g^{\lambda\rho}T^{\mu\nu\sigma\tau} - g^{\lambda\sigma}T^{\mu\nu\rho\tau} + g^{\lambda\tau}T^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{22.11}$$

Observemos que todas las trazas $T^{\lambda\mu\cdots}$ son reales y que son distintas de cero tan sólo si cada una de las matrices γ^0, γ^1, ... aparece en el producto un número par de veces; tanto lo uno como lo otro es evidente si se tiene en cuenta las fórmulas obtenidas. De aquí, a su vez, es fácil concluir que la traza no varía al cambiar el orden de todos los factores en el orden opuesto *:

$$T^{\lambda\mu\ldots\rho\sigma} = T^{\sigma\rho\ldots\mu\lambda}. \tag{22.12}$$

Conforme se recordó ya, los factores γ figuran de ordinario como factores en productos « escalares » junto con diferentes 4-vectores. En tales casos, por ejemplo, las fórmulas (22.9) y (22.10) significan que

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\hat{a}\,\hat{b} = ab,$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}\,\hat{d} = (ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc). \tag{22.13}$$

Un papel especial lo representa el producto $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Para él se suele adoptar el símbolo:

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{22.14}$$

Es fácil ver que

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \qquad (\gamma^5)^2 = 1, \tag{22.15}$$

es decir, la matriz γ^5 anticonmuta con todas las γ^μ. En relación con las matrices α y β se tienen en cambio las reglas

$$\alpha\gamma^5 - \gamma^5\alpha = 0, \qquad \beta\gamma^5 + \gamma^5\beta = 0 \tag{22.16}$$

---

* En efecto, dado que, para una matriz cualquiera M, es $\mathrm{Tr}M = \mathrm{Tr}\widetilde{M}$, resulta (teniendo también en cuenta el carácter real de la traza): $\mathrm{Tr}\,(\gamma^\lambda \ldots \gamma^\nu) = \mathrm{Tr}\,(\gamma^\lambda \ldots \gamma^\nu)^+ = \mathrm{Tr}\,(\gamma^{\nu+} \ldots \gamma^{\lambda+})$, y puesto que cada una de las matrices es o hermítica o antihermítica ($\gamma^{\mu+} = \pm\gamma^\mu$) y aparece en el producto un número par de veces, vale evidentemente (22.12).

(la conmutabilidad con $\boldsymbol{\alpha}$ se sigue del hecho que $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ es el producto de dos matrices γ^μ).

La matriz γ^5 es hermítica; en efecto,

$$\gamma^{5+} = i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = -i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0,$$

y dado que la sucesión 3, 2, 1, 0 se reduce a la sucesión 0, 1, 2, 3 mediante un número par de transposiciones, será

$$\gamma^{5+} = \gamma^5. \tag{22.17}$$

Daremos también la forma de esta matriz en dos representaciones concretas:

$$\begin{aligned} &\text{espinorial} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ &\text{típica} \qquad\quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22.18}$$

La traza de la matriz γ^5 es igual a cero:

$$\operatorname{Tr} \gamma^5 = 0 \tag{22.19}$$

[esto se ve directamente en (22.18)]. También son iguales a cero las trazas de los productos $\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu$. En cambio, para los productos de γ^5 por los cuatro factores γ^μ, se tiene

$$\frac{1}{4}\operatorname{Tr} \gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = ie^{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{22.20}$$

Otra fórmula interesante es:

$$\hat{N} = i\gamma^5\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}, \qquad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho}a_\mu b_\nu c_\rho. \tag{22.21}$$

Ésta se sigue de la definición (22.14) escrita en la forma

$$e^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\lambda = i\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho.$$

PROBLEMA

Hallar $(1/4)\operatorname{Tr} \gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau \equiv A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$.

Solución. Utilizando la regla de conmutación (22.1) y la fórmula (22.20), reducimos la traza buscada a la forma

$$A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = -2iB^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} + A^{\nu\mu\lambda\tau\sigma\rho},$$

donde

$$B^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = e^{\lambda\mu\nu\rho}g^{\sigma\tau} - e^{\lambda\mu\nu\sigma}g^{\rho\tau} + e^{\lambda\mu\nu\tau}g^{\rho\sigma} - e^{\nu\tau\sigma\rho}g^{\lambda\mu} + e^{\mu\tau\sigma\rho}g^{\lambda\nu} - e^{\lambda\tau\sigma\rho}g^{\mu\nu}.$$

En virtud de las propiedades cíclicas y de (22.12), se tiene $A^{\nu\mu\lambda\tau\sigma\rho} = A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$. Así, pues,

$$A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = -iB^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$$

§ 23. Ondas planas

El estado de una partícula libre con valores determinados del impulso y de la

energía se representa por una onda plana que escribiremos en la forma

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx} \tag{23.1}$$

El subíndice p indica el valor del 4-impulso; la amplitud de la onda u_p es un bispinor normalizado de determinada manera.

Con vistas a aplicar más adelante la segunda cuantificación, necesitamos, junto con las funciones de onda (23.1), las funciones con « frecuencia negativa » que aparecen en la teoría relativista, conforme se explicó en el § 11, en relación con el carácter bivalente de la raíz $\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Al igual que en el § 11, entenderemos siempre por ε la cantidad positiva $\varepsilon = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, de modo que la « frecuencia negativa » es $-\varepsilon$; cambiando también el signo de $\boldsymbol{p}$, obtendremos una función que es natural designar por ψ_{-p}:

$$\psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx} \tag{23.2}$$

El sentido de estas funciones se pondrá en claro en el § 26. En lo que sigue escribiremos en paralelo las formas para ψ_p y para ψ_{-p}.

Las componentes de las amplitudes bispinoriales u_p y u_{-p} satisfacen los sistemas de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)\, u_p &= 0, \\ (\hat{p} + m)\, u_{-p} &= 0, \end{aligned} \tag{23.3}$$

que se obtienen substituyendo (23.1-2) en la ecuación de Dirac (lo que equivale a substituir en ésta el operador p por $\pm p$)*. La relación $p^2 = m^2$ representa en este caso la condición de compatibilidad de cada uno de estos sistemas. Normalizaremos siempre las amplitudes bispinoriales por las condiciones invariantes

$$\begin{aligned} \bar{u}_p u_p &= 2m, \\ \bar{u}_{-p} u_{-p} &= -2m \end{aligned} \tag{23.4}$$

(donde el trazo sobre una letra significa, como siempre, el paso a la conjugada de Dirac: $\bar{u} = u^* \gamma^0$). Multiplicando las ecuaciones (23.3) a la izquierda por $\bar{u}_{\pm p}$, obtendremos $(\bar{u}_{\pm p} \gamma u_{\pm p})\, p = 2m^2 = 2p^2$, de donde resulta evidente que

$$\bar{u}_p \gamma u_p = \bar{u}_{-p} \gamma u_{-p} = 2p. \tag{23.5}$$

Obsérvese que se pasa de las fórmulas para u_p a las fórmulas para u_{-p} cambiando el signo de m.

El 4-vector densidad de corriente es:

$$j = \bar{\psi}_{\pm p} \gamma \psi_{\pm p} = \frac{1}{2\varepsilon} \bar{u}_{\pm p} \gamma u_{\pm p} = \frac{p}{\varepsilon}, \tag{23.6}$$

---

* Mencionaremos también los sistemas análogos que se obtienen a partir de la ecuación de Dirac (21.9) para la función conjugado-compleja:

$$\bar{u}_p (\hat{p} - m) = 0, \qquad \bar{u}_{-p} (\hat{p} + m) = 0. \tag{23.3a}$$

es decir, $j^\mu = (1, \boldsymbol{v})$, donde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/\varepsilon$ es la velocidad de la partícula. Es claro, por ello, que las funciones ψ_p están normalizadas « a una partícula en el volumen $V = 1$».

En virtud de las ecuaciones (23.3), las componentes de la amplitud de onda están ligadas entre sí por ciertas relaciones cuya forma concreta depende, claro está, de la representación concreta de ψ. Determinémosla para la representación típica.

De las ecuaciones (21.19) se sigue para una onda plana

$$\begin{aligned}(\varepsilon - m)\varphi - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi = 0,\\ (\varepsilon + m)\chi - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi = 0.\end{aligned} \tag{23.7}$$

De estas igualdades se deduce la relación entre φ y χ en dos formas equivalentes:

$$\varphi = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon - m}\chi, \qquad \chi = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon + m}\varphi \tag{23.8}$$

(es evidente que estas fórmulas son equivalentes: multiplicando la primera a la izquierda por $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/(\varepsilon + m)$ y teniendo en cuenta que $(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{p}^2$ y que $\varepsilon^2 - m^2 = \boldsymbol{p}^2$, obtenemos la segunda). En cuanto al factor común en φ y χ lo elegiremos de tal manera que satisfaga la condición de normalización (23.4). En definitiva obtendremos para u_p (y de manera análoga para u_{-p}) las siguientes expresiones:

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, w \\ \sqrt{\varepsilon - m}\, (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, w \end{pmatrix}, \qquad u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m}\, (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, w' \\ \sqrt{\varepsilon + m}\, w' \end{pmatrix} \tag{23.9}$$

[la segunda fórmula se obtiene a partir de la primera cambiando el signo de m y aplicando la substitución $w \to (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})w'$]. Aquí, $\boldsymbol{n}$ es el versor de $\boldsymbol{p}$, y w una cantidad arbitraria de dos componentes que sujeta tan sólo a la condición de normalización

$$w^* w = 1. \tag{23.10}$$

Para $\bar{u} = u^*\gamma^0$[γ^0 de (21.20)] se sigue

$$\begin{aligned}\bar{u}_p &= (\sqrt{\varepsilon + m}\, w^*, \quad -\sqrt{\varepsilon - m}\, w^* (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})),\\ \bar{u}_{-p} &= (\sqrt{\varepsilon - m}\, w'^* (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \quad -\sqrt{\varepsilon + m}\, w'^*),\end{aligned} \tag{23.11}$$

y multiplicando comprobamos que, efectivamente, $\bar{u}_{\pm p} u_{\pm p} = \pm 2m$.

En el sistema de reposo, es decir, para $\varepsilon = m$, tenemos

$$u_p = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{-p} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ w' \end{pmatrix}, \tag{23.12}$$

esto es, w representa el espinor tridimensional a que se reduce en el límite no-relativista la amplitud de cada una de las ondas. Obsérvese que para el bispinor u_{-p} se anulan, en el sistema de reposo, las primeras componentes, no las segundas. Esta propiedad de las soluciones de la ecuación de Dirac con « frecuencias negativas » era evidente a priori: haciendo en (23.7) $\boldsymbol{p} = 0$ y substituyendo ε por $-m$, obtendremos $\varphi = 0$*.

* En cambio, en la representación de spin tenemos $\xi = -\eta$ en vez de la relación $\xi = \eta$, que es válida en el sistema de reposo para las soluciones con « frecuencias positivas ».

La amplitud de una onda plana contiene una cantidad arbitraria de dos componentes. En otras palabras, para un impulso dado existen dos estados independientes distintos en correspondencia con los dos valores posibles de la proyección del spin. Sin embargo, la proyección del spin sobre un eje cualquiera z no puede, en estas condiciones, tener un valor determinado. Esto se ve teniendo en cuenta que el hamiltoniano de una partícula con un $\boldsymbol{p}$ determinado (es decir, la matriz $\mathrm{H} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m$) no conmuta con la matriz $\Sigma_z = -i\alpha_x\alpha_y$. De acuerdo con lo dicho de una manera general en el § 16, se conserva, con todo, la helicidad λ — es decir, la proyección del spin sobre la dirección orientada de $\boldsymbol{p}$: el hamiltoniano conmuta con la matriz $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$.

A los estados de helicidad corresponden ondas planas en las cuales el espinor tridimensional $w = w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})$ es función propia del operador $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, w^{(\lambda)} = \lambda w^{(\lambda)}. \tag{23.13}$$

La forma explícita de estos espinores es:

$$w^{(\lambda=1/2)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad w^{(\lambda=-1/2)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{23.14}$$

donde θ y φ son el ángulo polar y el acimut de $\boldsymbol{n}$ respecto de los ejes fijos xyz *.

Otra posible elección de dos estados independientes de una partícula libre con $\boldsymbol{p}$ dado (más simple, aunque menos intuitiva) corresponde a los dos valores de la proyección-z del spin en el sistema de reposo; representémosla por σ. Los correspondientes espinores son:

$$w^{(\sigma=1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w^{(\sigma=-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23.15}$$

En cuanto a las soluciones linealmente independientes con « frecuencia negativa », elegiremos para ellas ondas planas en las que los espinores tridimensionales son

$$w^{(\sigma)\prime} = -\sigma_y w^{(-\sigma)} = 2\sigma i w^{(\sigma)} \tag{23.16}$$

(el sentido de esta elección se explicará en el § 26).

PROBLEMAS

1. Obtener la función de onda (23.9) mediante una transformación de Lorentz directamente a partir del sistema de reposo.

Solución. La fórmula de transformación para una velocidad finita $\boldsymbol{V}$ del sistema de referen-

* La solución de las ecuaciones (23.13) puede multiplicarse por un factor de fase arbitrario, lo que está ligado con la posibilidad de efectuar una rotación cualquiera en torno de la dirección de $\boldsymbol{n}$. A esta posibilidad corresponde el hecho de que el ángulo γ sea arbitrario en la transformación (a. 3) [para obtener (23.14) partiendo de las fórmulas (a. 3) hay que hacer en estas últimas iguales a $\binom{1}{0}$ o a $\binom{0}{1}$ las componentes con apóstrofo del espinor, lo que corresponde a determinados valores de la proyección del spin sobre el eje ζ, y los ángulos α, β, γ hay que substituirlos por φ, θ, 0].

cia K' respecto del sistema K, se obtiene a partir de la fórmula (1) del problema 1 del § 21 de la misma manera como se obtiene (18.13) partiendo de (18.12):

$$\psi' = e^{-\frac{\varphi}{2}\nu\alpha}\psi = \left(\cosh\frac{\varphi}{2} - \nu\cdot\alpha\operatorname{senh}\frac{\varphi}{2}\right)\psi,$$

donde ν es el versor de V y $\operatorname{tgh}\varphi = |V|$; según la misma fórmula se transforma también la amplitud bispinorial u. Si K es el sistema de reposo de la partícula, y en el sistema K' ésta tiene el impulso p, se tendrá $V = -p/\varepsilon$, de donde

$$\cosh\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2m}},\quad \operatorname{senh}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{2m}}.$$

Tomando u de (23.12) y utilizando la matriz α de la representación típica, obtendremos para u' la expresión (23.9).

2. En el sistema de reposo se conserva el spin de una partícula libre y su función de onda (en la representación típica) tiene tan sólo dos componentes, que corresponden a los valores $\pm 1/2$ de la proyección del spin sobre el eje z dado. Hallar la representación en la cual la función de onda (onda plana) tiene únicamente dos componentes en cualquier sistema de referencia, componentes que corresponden a valores determinados de una misma característica física del estado — la proyección del spin en el sistema de reposo (*L. Foldy, S. A. Wouthuysen*, 1950).

Solución. Partiendo de la amplitud u_p en la representación típica (23.9), busquemos la transformación unitaria incógnita en la forma $U = e^{W\gamma\cdot n}$, donde n es el versor de p y W una cantidad real (dado que $\gamma^+ = -\gamma$, automáticamente es entonces $U^+ = U^{-1}$). Desarrollando en serie y teniendo en cuenta que $(\gamma\cdot n)^2 = -1$, representaremos U en la forma

$$U = \cos W + \gamma\cdot n \operatorname{sen} W.$$

De la condición de que en la amplitud transformada $u_p' = Uu_p$ se anulen las dos segundas componentes, se deduce que $\operatorname{tg} W = |p|/(m+\varepsilon)$, o bien

$$W = \operatorname{arctg}\frac{|p|}{m+\varepsilon} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{|p|}{m}.$$

En la nueva representación se tiene:

$$u_p = \sqrt{2\varepsilon}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$$

y en ella el hamiltoniano de la partícula toma la forma

$$H' = U(\alpha\cdot p + \beta m)U^{-1} = \beta\varepsilon$$

(todas las matrices β, α, γ son las de la representación típica). Este hamiltoniano conmuta con la matriz

$$\Sigma = -\alpha\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

que en la nueva representación es el operador de una magnitud física que se conserva — el spin en el sistema de reposo.

§ 24. Ondas esféricas

Las funciones de onda de los estados de una partícula libre (de spin 1/2) con valores determinados j del momento cinético son ondas esféricas espinoriales. Determinemos su forma, para lo cual recordaremos antes las fórmulas análogas de la teoría no-relativista.

La función de onda no-relativista es un espinor tridimensional $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$ Para un estado con valores determinados de la energía ε (y, con ella, también del módulo del impulso, p^*), del momento cinético orbital l, del momento cinético total j y de su proyección m, la función de onda tiene la forma

$$\psi = R_{pl}(r)\,\Omega_{jlm}(\theta, \varphi). \tag{24.1}$$

Su parte angular Ω_{jlm} son espinores tridimensionales cuyas componentes (para los dos valores $j = l \pm 1/2$ posibles para un valor dado l) vienen dadas por las fórmulas

$$\begin{aligned} \Omega_{l+1/2,\,l,\,m} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}}\, Y_{l,\,m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}}\, Y_{l,\,m+1/2} \end{pmatrix}, \\ \Omega_{l-1/2,\,l,\,m} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\, Y_{l,\,m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\, Y_{l,\,m+1/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24.2}$$

(véase III, pág. 471). Llamaremos a Ω_{jlm} *espinores esféricos*. Están normalizados por la condición

$$\int \Omega^*_{jlm}\Omega_{j'l'm'}\,do = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{24.3}$$

En cuanto a las funciones radiales R_{pl}, son un factor común a ambas componentes del espinor ψ y vienen dadas por la fórmula III (33.9):

$$R_{pl} = \sqrt{\frac{p}{r}}\, J_{l+1/2}(pr). \tag{24.4}$$

Están normalizadas por la condición

$$\int_0^\infty r^2 R_{p'l}R_{pl}\,dr = \delta(p' - p). \tag{24.5}$$

Volviendo al caso relativista, recordaremos ante todo que para una partícula en movimiento no existen leyes separadas de conservación del spin y del momento cinético orbital: ninguno de los operadores $\mathbf{s}$ y $\mathbf{l}$ conmuta por separado con el hamiltoniano. Sin embargo, por lo visto antes se conserva (para una partícula libre) la paridad de un estado. Por ello, el número cuántico l pierde el sentido de índice de un determinado valor del momento cinético orbital, pero pasa a fijar (véase más adelante) la paridad del estado.

Convengamos en considerar la función de onda buscada (bispinor) en la repre-

* En este párrafo p representa el $|\boldsymbol{p}|$.

sentación típica: $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$. Respecto de las rotaciones, φ y χ se comportan como espinores tridimensionales. En consecuencia, su dependencia angular viene dada por los mismos espinores esféricos Ω_{jlm}. Supongamos que $\varphi \backsim \Omega_{jlm}$, donde l es uno (determinado) de los dos valores $j + 1/2$ o $j - 1/2$. En la inversión $\varphi(\boldsymbol{r}) \to i\varphi(-\boldsymbol{r})$ [véase (21.18)] y dado que $\Omega_{jlm}(-\boldsymbol{n}) = (-1)^l \Omega_{jlm}(\boldsymbol{n})$, será

$$\varphi(\boldsymbol{r}) \to i(-1)^l \varphi(\boldsymbol{r}).$$

En cambio, las componentes χ se comportan en la inversión de acuerdo con $\chi(\boldsymbol{r}) \to -i\chi(-\boldsymbol{r})$. Para que un estado posea determinada paridad (es decir, para que en la inversión todas las componentes queden multiplicadas precisamente por un mismo factor) es necesario, por consiguiente, que la dependencia angular de χ sea la de un espinor esférico $\Omega_{jl'm}$ con otro valor de l (de los dos posibles): dado que estos valores difieren en 1, se tendrá $(-1)^{l'} = -(-1)^l$.

Además, la dependencia radial de φ y χ se determinará por las mismas funciones R_{pl} y $R_{pl'}$ (con valores l y l' que corresponden a los órdenes de los armónicos esféricos que figuran en Ω_{jlm}). Esto es claro, ya que cada una de las componentes de ψ satisface la ecuación de segundo orden $(\mathrm{p}^2 - m^2)\psi = 0$, la cual, para un valor dado de $|\boldsymbol{p}|$, tiene la forma

$$(\Delta + \boldsymbol{p}^2)\psi = 0,$$

que coincide formalmente con la ecuación no-relativista de Schrödinger para una partícula libre.

Así, pues. se tiene

$$\varphi = AR_{pl}\Omega_{jlm}, \quad \chi = BR_{pl'}\Omega_{jl'm}, \tag{24.6}$$

y quedan por determinar los coeficientes constantes A y B. Para ello, consideraremos una región alejada en la cual la onda esférica se pueda considerar como plana. De acuerdo con la fórmula asintótica III (33.10) es

$$R_{pl} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2ir} \left\{ e^{i\left(pr - \frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(pr - \frac{\pi l}{2}\right)} \right\}, \tag{24.7}$$

de modo que φ representa la diferencia de dos ondas planas que se propagan en las direcciones $\pm \boldsymbol{n} (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r)$. Para cada una de ellas tenemos, según (23.8),

$$\chi = \frac{p}{\varepsilon + m} (\pm \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \varphi .$$

De lo dicho más arriba, en (24.6), es claro, sin más, que $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\Omega_{jlm} = a\Omega_{jl'm}$, donde a es una constante. Es fácil determinarla comparando los valores de ambos miembros de la igualdad para $m = 1/2$ y la dirección $\boldsymbol{n}$ a lo largo del eje z. Aplicando (7.2a), se encuentra

$$(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\Omega_{jlm} = i^{l'-l}\Omega_{jl'm}. \tag{24.8}$$

Juntando las fórmulas escritas y comparando con (24.6), obtendremos

$$B = -\frac{p}{\varepsilon + m} A.$$

Finalmente, el coeficiente A se determina por la normalización general de ψ. Normalizando ψ por la condición

$$\int \psi^*_{pjlm} \psi_{p'j'l'm'} dV = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(p - p'), \tag{24.9}$$

se encuentra finalmente

$$\psi_{pjlm} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, R_{pl} \Omega_{jlm} \\ -\sqrt{\varepsilon - m}\, R_{pl'} \Omega_{jl'm} \end{pmatrix}, \quad l' = 2j - l. \tag{24.10}$$

De esta manera, para valores dados de j y de m (y de la energía ε) existen dos estados que difieren en su paridad. Esta última queda unívocamente determinada por el número l, que toma los valores $j \pm 1/2$: en la inversión, el bispinor (24.10) se multiplica por $i(-1)^l$. Las componentes de este bispinor, sin embargo, contienen armónicos esféricos de los dos órdenes l y l', en lo que se refleja la falta de un valor determinado del momento cinético orbital.

Cuando $r \to \infty$, en cada región pequeña del espacio las ondas esféricas (24.7) se pueden considerar como planas y correspondientes al impulso $\boldsymbol{p} = \pm p\boldsymbol{n}$. Por ello es claro que las funciones de onda en la representación de impulsos difieran esencialmente de (24.10) tan sólo en que en las primeras no aparecen factores radiales y en el significado de versor del impulso atribuido a $\boldsymbol{n}$.

Para pasar directamente a la representación de impulsos hay que aplicar el desarrollo de Fourier:

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \int \psi(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}} d^3x. \tag{24.11}$$

La integral se calcula mediante las fórmulas de desarrollo de una onda plana en ondas esféricas *:

$$e^{ipr} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l R_{pl}(r)\, Y^*_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{p}}{p}\right) Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{24.12}$$

Representando el factor $e^{-i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}}$ de (24.11) mediante este desarrollo y teniendo en cuenta (24.5), para las componentes de Fourier de la función

$$\psi(\boldsymbol{r}) = R_{pl}(r)\, \Omega_{jlm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

se obtendrá

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p} \delta(p' - p)\, i^{-l} Y_{lm'}\left(\frac{\boldsymbol{p}'}{p'}\right) \int \Omega_{jlm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) Y^*_{lm'}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) do.$$

La integral que aquí aparece es igual a los coeficientes de los armónicos esféricos

* Esta fórmula es la generalización de la fórmula III (34.1) al caso en que no se presupone una determinada elección de la dirección del eje z. Véase también (46.3-4).

en la definición (24.2) de los espinores esféricos y, junto con el factor $Y_{lm'}(\boldsymbol{p}'/p')$ conduce de nuevo al mismo espinor esférico, pero ahora como función del argumento $\boldsymbol{p}'/p'$:

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p}\,\delta(p'-p)\,i^{-l}\Omega_{jlm}\left(\frac{\boldsymbol{p}'}{p'}\right)$$

Aplicando este resultado a la función de onda bispinorial (24.10), se obtiene su representación de impulsos:

$$\psi_{pjlm}(\boldsymbol{p}') = \delta(p'-p)\frac{(2\pi)^{3/2}}{p\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\;i^{-l}\Omega_{jlm}(\boldsymbol{p}'/p')\\ \sqrt{\varepsilon-m}\;i^{-l'}\Omega_{jl'm}(\boldsymbol{p}'/p')\end{pmatrix}. \tag{24.13}$$

Los estados $|pjlm\rangle$ coinciden con los estados $|pjm|\lambda|\rangle$ considerados en el § 16 (donde $|\lambda| = 1/2$): unos y otros poseen valores determinados de pjm y de la paridad. Por ello, los espinores esféricos Ω_{jlm} están ligados de manera determinada con las funciones $D^{(j)}_{\lambda m}$ (unas y otras con $\boldsymbol{p}/p$ como argumento). Cuando $p \to 0$, las funciones de onda (24.13) se reducen a los espinores tridimensionales Ω_{jlm}, cuyas paridades son $P = \eta(-1)^l$ (donde $\eta = i$ es la « paridad intrínseca » del espinor). La comparación con los resultados del § 16 conduce a la siguiente fórmula:

$$\Omega_{jlm} = i^l\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\left(w^{(-1/2)}D^{(j)}_{-\,1/2\,m} \pm w^{(1/2)}D^{(j)}_{1/2\,m}\right) \tag{24.14}$$

(para $l = j \mp 1/2$), donde $w^{(\lambda)}$ es el espinor de tres dimensiones (23.14).

§ 25. Relación del spin con la estadística

La segunda cuantificación de un campo de partículas de spin 1/2 (campo espinorial) se lleva a cabo exactamente de la misma manera como en el caso del campo escalar en el § 11.

Sin repetir de nuevo todos los razonamientos, escribamos directamente las expresiones de los operadores del campo, que son del todo análogas a las fórmulas (11.2):

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{p\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(a_{p\sigma}u_{p\sigma}e^{-ipx} + b^{+}_{p\sigma}u_{-p-\sigma}e^{ipx}\right),\\ \overline{\psi} &\equiv \psi^{+}\gamma^{0} = \sum_{p\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(a^{+}_{p\sigma}\bar{u}_{p\sigma}e^{ipx} + b_{p\sigma}\bar{u}_{-p-\sigma}e^{-ipx}\right);\end{aligned} \tag{25.1}$$

la suma se extiende a todos los valores del impulso $\boldsymbol{p}$ y a los valores $\sigma = \pm 1/2$. Los operadores de aniquilación de antipartículas $b_{p\sigma}$ (como también los operadores de aniquilación de partículas $a_{p\sigma}$) aparecen como coeficientes de funciones que, por su dependencia respecto de las coordenadas (e^{ipr}), corresponden a estados con impulso $\boldsymbol{p}$ *.

* Tanto unas funciones como otras corresponden también a los mismos valores σ de la proyección del spin en el sistema de reposo; para las funciones $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ esto se demostrará en el § 26 — véase (26.10).

Para el cálculo del hamiltoniano del campo espinorial, no es necesario determinar su tensor de energía impulso (como hicimos para el campo escalar) dado que, en el presente caso, existe ya el hamiltoniano de la partícula mediante el cual se puede escribir la ecuación de onda (ecuación de Dirac) (21.12). La energía media de la partícula en un estado cuya función de onda es ψ viene dada por la integral

$$\int \psi^* H \psi d^3x = i \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x = i \int \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x. \tag{25.2}$$

Conviene observar que la « densidad de energía » (el integrando) no es aquí una magnitud definida positiva.

Substituyendo en (25.2) las funciones ψ y $\bar{\psi}$ por sus operadores-ψ, teniendo en cuenta la ortogonalidad dos a dos de las funciones de onda con diferentes $\boldsymbol{p}$ o σ y también la relación $\bar{u}_{\pm p\sigma} \gamma^0 u_{\pm p\sigma} = 2\varepsilon$ para las amplitudes de onda, obtendremos el hamiltoniano del campo en la forma

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon \, (a^+_{p\sigma} a_{p\sigma} - b_{p\sigma} b^+_{p\sigma}). \tag{25.3}$$

Se sigue de aquí que, en el caso presente, la cuantificación ha de efectuarse en el sentido de Fermi:

$$\{a_{p\sigma}, \; a^+_{p\sigma}\}_+ = 1, \quad \{b_{p\sigma}, \; b^+_{p\sigma}\}_+ = 1, \tag{25.4}$$

mientras que todos los demás pares de operadores a, a^+, b, b^+ anticonmutan entre sí (véase III, § 65). En efecto, el hamiltoniano (25.3) puede escribirse también en la forma

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon \, (a^+_{p\sigma} a_{p\sigma} + b^+_{p\sigma} b_{p\sigma} - 1),$$

y los valores de la energía (restando, como siempre, una constante aditiva infinita) son:

$$E = \sum_{p\sigma} \varepsilon \, (N_{p\sigma} + \overline{N}_{p\sigma}), \tag{25.5}$$

es decir, resultan ser, como debían, cantidades definidas positivas. En cambio, si se aplicara la cuantificación de Bose, obtendríamos a partir de (25.3) valores propios no definidos positivos, carentes de sentido, por lo tanto:

$$\sum \varepsilon \, (N_{p\sigma} - \overline{N}_{p\sigma}).$$

Una expresión análoga a (25.5)

$$\boldsymbol{P} = \sum_{p\sigma} \boldsymbol{p} \, (N_{p\sigma} + \overline{N}_{p\sigma}) \tag{25.6}$$

se obtiene también para el impulso del sistema — valores propios del operador $\int \boldsymbol{\psi}^+ \mathbf{p} \boldsymbol{\psi} \, \boldsymbol{d^3x}$.

El operador 4-corriente es

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \tag{25.7}$$

y para el operador « carga » del campo obtenemos

$$Q = \int \bar{\psi}\gamma^0\psi d^3x = \sum_{p\sigma} (a^+_{p\sigma}a_{p\sigma} + b_{p\sigma}b^+_{p\sigma}) = \sum_{p\sigma} (a^+_{p\sigma}a_{p\sigma} - b^+_{p\sigma}b_{p\sigma} + 1), \quad (25.8)$$

y sus valores propios son

$$Q = \sum_{p\sigma} (N_{p\sigma} - \bar{N}_{p\sigma}). \quad (25.9)$$

De esta manera, llegamos de nuevo a una representación de las partículas y de las antipartículas para la que vale todo lo dicho acerca de ellas en el § 11.

Pero mientras que las partículas de spin cero son bosones, las partículas de spin 1/2 resultan ser fermiones. Si se busca el origen formal de esta diferencia, veremos que procede de la diferencia en el carácter de las expresiones de la « densidad de energía » para los campos escalar y espinorial. En el primer caso, esta expresión es definida positiva, como consecuencia de lo cual en el hamiltoniano (11.3) ambos términos (a^+a y bb^+) aparecen con el signo más. Para poder asegurar el carácter positivo de los valores propios de la energía, la substitución de bb^+ por b^+b debe efectuarse entonces sin cambio de signo, es decir, de acuerdo con la regla de conmutación de Bose. En el caso del campo espinorial, en cambio, la « densidad de energía » no es una cantidad definida positiva, lo que conduce a que en el hamiltoniano (25.3) el término bb^+ aparece con el signo menos y para obtener valores propios positivos la substitución de bb^+ por b^+b debe ir acompañada del cambio de signo, es decir, debe efectuarse según la regla de conmutación de Fermi.

Por otra parte, la forma de la densidad de energía está vinculada directamente con las propiedades de transformación de la función de onda y con la condición de invariancia relativista. En este sentido cabe decir que también el ligamen del spin con la estadística a la que obedecen las partículas es asimismo una consecuencia directa de estas condiciones.

Del hecho de que las partículas de spin 1/2 son fermiones se sigue también una aserción general: todas las partículas con spin semientero son fermiones, y las partículas con spin entero son bosones (incluido lo demostrado en el § 11 para partículas de spin 0) *.

Esto es evidente si se observa que una partícula de spin s se puede representar como « compuesta » de $2s$ partículas de spin 1/2. Si el número s es semientero, $2s$ es impar, y si s es entero, será par. Pero una partícula « compuesta » que contiene un número par de fermiones, es un bosón, y la que contiene un número impar de fermiones, es un fermión **.

* El origen de la relación entre el spin de una partícula y la estadística a que obedece fue explicado por primera vez por Pauli (1940).

** En estos razonamientos se presupone que todas las partículas con igual spin deben obedecer a la misma estadística (con toda independencia de la manera como se las ha «compuesto»). Que efectivamente así es se puede ver por razonamientos análogos. Así, si existieran fermiones con spin 0, mediante un fermión de spin 0 y un fermión de spin 1/2 sería posible formar una partícula de spin 1/2 que sería un bosón — en contradicción con el resultado general demostrado para el caso de spin 1/2 .

Si el sistema está formado por partículas de diferente especie, para cada tipo de partículas deben introducirse sus propios operadores de creación y aniquilación. Al hacerlo, los operadores que se refieren a diferentes bosones, o a bosones y a fermiones, conmutan entre sí. En lo que concierne a los operadores que se refieren a fermiones diferentes, en los límites de la teoría no-relativista sería posible considerarlos o bien como operadores que conmutan, o bien como operadores que anticonmutan (III, § 65). Pero en la teoría relativista, que permite la transformación de unas partículas en otras, hay que considerar los operadores de creación y aniquilación de los diferentes fermiones como operadores que anticonmutan, al igual que los operadores que se refieren a los diferentes estados de fermiones del mismo tipo.

PROBLEMA

Hallar el lagrangiano del campo espinorial.

Solución. La función de Lagrange que corresponde a la ecuación de Dirac viene dada por la expresión escalar real

$$L = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\cdot\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi. \qquad (1)$$

Interpretando como « coordenadas generalizadas » q las componentes ψ y $\bar{\psi}$, es fácil comprobar que las correspondientes ecuaciones de Lagrange (10.10) coinciden con las ecuaciones de Dirac para $\bar{\psi}$ y ψ. El signo del lagrangiano (como también su coeficiente) es, en este caso, convencional. Dado que L contiene las derivadas de ψ y $\bar{\psi}$ linealmente, la acción $S = \int L d^4x$ no puede en ningún caso presentar ni mínimo ni máximo. La condición $\delta S = 0$ determina ahora únicamente un punto estacionario, pero no un extremo de la integral.

El lagrangiano del campo espinorial se obtiene substituyendo en (1) ψ por el operador $\boldsymbol{\psi}$. Aplicando a este lagrangiano la fórmula (12.12) obtendremos el operador corriente (25.7).

§ 26. Conjugación de carga e inversión de los espinores respecto del tiempo

Los factores $\psi_{p\sigma} = u_{p\sigma}e^{-ipx}$ que en (25.1) multiplican a los operadores $a_{p\sigma}$, son funciones de onda de partículas libres (nos referiremos a electrones) con impulsos $\boldsymbol{p}$ y polarizaciones σ:

$$\psi^{(e)}_{p\sigma} = \psi_{p\sigma}.$$

Los factores $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$, en cambio, que multiplican a los operadores $b_{p\sigma}$, deben considerarse como funciones de onda de positones con los mismos $\boldsymbol{p}$, σ. Sin embargo, con esto resulta que las funciones de electrón y de positón se expresan en diferentes representaciones bispinoriales. Esto es claro teniendo en cuenta que ψ y $\bar{\psi}$ son distintos en cuanto a sus propiedades de transformación y que sus componentes satisfacen a sistemas de ecuaciones diferentes. Para evitar este inconveniente hay que aplicar a las componentes $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ una determinada transformación unitaria tal que la nueva función de cuatro componentes satisfagan la misma ecuación que $\psi_{p\sigma}$ *. Esta función precisamente es la que llamaremos función de onda del positón (con

* Para partículas de spin 0 esta cuestión no se planteaba en absoluto, ya que las funciones escalares ψ y ψ^* satisfacen la misma ecuación y ψ^*_p coincide simplemente con ψ_p.

impulso $\boldsymbol{p}$ y polarización σ). Designando por U_C la matriz de la transformación unitaria que buscamos, escribiremos

$$\psi^{(p)}_{p\sigma} = U_C \bar{\psi}_{-p-\sigma}. \tag{26.1}$$

La operación C mediante la cual se construye esta función a partir de $\psi_{-p-\sigma}$ se llama *conjugación de carga* de la función de onda (*H. Kramers*, 1937). Este concepto no queda limitado, claro está, a su aplicación a las ondas planas. Para una función ψ cualquiera existe la función « conjugada de carga »

$$C\psi(t, \boldsymbol{r}) = U_C \bar{\psi}(t, \boldsymbol{r}), \tag{26.2}$$

que se transforma como ψ y que satisface a la misma ecuación.

Las propiedades de la matriz U_C se siguen de esta definición. Si ψ es una solución de la ecuación de Dirac $(\gamma p - m)\psi = 0$, $\bar{\psi}$ satisface la ecuación

$$\bar{\psi}(\gamma p + m) = 0, \text{ o bien } (\tilde{\gamma} p + m)\bar{\psi} = 0.$$

Multiplicando esta ecuación a la izquierda por U_C, queda

$$U_C \tilde{\gamma} p \bar{\psi} + m U_C \bar{\psi} = 0;$$

impongamos la condición de que la función $U_C\bar{\psi}$ satisfaga la misma ecuación que ψ:

$$(\gamma p - m) U_C \bar{\psi} = 0.$$

Comparando ambas ecuaciones se encuentra la siguiente « relación de conmutación » entre U_C y las matrices γ^μ *:

$$U_C \tilde{\gamma}^\mu = -\gamma^\mu U_C. \tag{26.3}$$

Supondremos, además, que las funciones de onda se dan en las representaciones espinorial o típica (al caso general de una transformación arbitraria volveremos únicamente al final de este párrafo). En estas representaciones es

$$\begin{gathered} \gamma^{0,2} = \tilde{\gamma}^{0,2}, \quad \gamma^{1,3} = -\tilde{\gamma}^{1,3}, \\ (\gamma^{0,1,3})^* = \gamma^{0,1,3}, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2. \end{gathered} \tag{26.4}$$

Entonces, las condiciones (26.3) quedan satisfechas por la matriz $U_C = \eta_C \gamma^2 \gamma^0$ con una constante arbitraria η_C. De la condición $C^2 = 1$ se sigue que $|\eta_C|^2 = 1$, de modo que la matriz U_C queda definida salvo un factor de fase. En lo que sigue eligiremos $\eta_C = 1$, de modo que

$$U_C = \gamma^2 \gamma^0 = -\alpha_y. \tag{26.5}$$

Observando también que $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 \psi^* = \gamma^0 \psi^*$, la acción del operador C se puede representar de la siguiente manera:

$$C\psi = \gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi} = \gamma^2 \psi^*. \tag{26.6}$$

* Obsérvese también la igualdad que se sigue de aquí

$$U_C \tilde{\gamma}^5 = \gamma^5 U_C \tag{26.3a}$$

En forma explícita, la transformación (26.6) para la representación espinorial es

$$C: \quad \xi^{\alpha} \longrightarrow -i\eta^{\dot{\alpha}*}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \longrightarrow -i\xi^{*}_{\alpha}, \tag{26.7a}$$

o, lo que es lo mismo,

$$C: \quad \xi_{\alpha} \longrightarrow -i\eta^{*}_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \longrightarrow -i\xi^{\alpha *}. \tag{26.7b}$$

La transformación de conjugación de carga para ondas planas $\psi_{\pm p\sigma}$ se puede efectuar fácilmente utilizando sus expresiones explícitas (23.9) y la matriz U_C en en la representación típica:

$$U_C = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}. \tag{26.8}$$

Observando que

$$\sigma_y \boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma_y,$$

en la definición de $w^{(\sigma)\prime}$, de acuerdo con (23.16), obtendremos

$$U_C \bar{u}_{-p-\sigma} = u_{p\sigma}, \quad U_C u_{-p-\sigma} = \bar{u}_{p\sigma} \tag{26.9}$$

De esta manera

$$C\psi_{-p-\sigma} = \psi_{p\sigma}, \tag{26.10}$$

de modo que las funciones $\psi_{-p-\sigma}$ que figuran en los operadores-ψ (25.1) junto con los operadores $b_{p\sigma}$, corresponden en efecto a estados de una partícula con impulso $\boldsymbol{p}$ y polarización σ. Vemos también que los estados de electrón y de positón se representan por las mismas funciones exactamente:

$$\psi^{(e)}_{p\sigma} = \psi^{(P)}_{p\sigma} = \psi_{p\sigma}\,.$$

Esto es del todo natural, ya que las funciones $\psi_{p\sigma}$ nos informan solamente acerca del impulso y la polarización de una partícula.

De manera análoga se puede considerar la operación inversión del tiempo. El cambio de signo del tiempo debe ir acompañado por el paso de la función de onda a la conjugado-compleja. Para obtener como resultado de la « inversión respecto del tiempo » la función de onda ($T\psi$) en la misma representación que la función de partida ψ hay que aplicar a las componentes ψ^* (o $\bar{\psi}$) una determinada transformación unitaria. Según esto, y de manera análoga al caso de la ecuación (26.2), representaremos la acción del operador T sobre ψ en la forma

$$T\psi(t, \boldsymbol{r}) = U_T \bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}), \tag{26.11}$$

donde U_T es una matriz unitaria.

De nuevo escribamos la ecuación de Dirac a que satisface ψ:

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m\right)\psi(t, \boldsymbol{r}) = 0,$$

y la ecuación para $\bar{\psi}$:

$$\left(i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\nabla + m\right)\bar{\psi}(t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

Cambiemos en esta última $t \to -t$ y multipliquémosla a la izquierda por U_T:

$$\left(iU_T\tilde{\gamma}^0\frac{\partial}{\partial t} - iU_T\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\nabla\right)\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) - mU_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

Queremos que la función $U_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r})$ satisfaga la misma ecuación a que satisface $\psi(t, \boldsymbol{r})$:

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)U_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) - mU_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

Comparando ambas ecuaciones, se encuentra que la matriz U_T debe satisfacer las condiciones

$$U_T\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 U_T, \quad U_T\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\gamma}U_T. \tag{26.12}$$

En las representaciones espinorial y típica, éstas quedan satisfechas por la matriz*

$$U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0. \tag{26.13}$$

Así, pues, la acción del operador T viene dada por la fórmula

$$T\psi(t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^3\gamma^1\psi^*(-t, \boldsymbol{r}). \tag{26.14}$$

En forma explícita, esta transformación en la representación espinorial se escribe

$$T: \quad \xi^\alpha \to -i\xi^*_\alpha, \quad \eta^*_{\dot{\alpha}} \to i\eta^{\dot{\alpha}*} \tag{26.15a}$$

o bien

$$T: \quad \xi_\alpha \to i\xi^{\alpha*}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \to -i\eta^*_{\dot{\alpha}}. \tag{26.15b}$$

En la representación típica es

$$U_T = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}. \tag{26.16}$$

Determinemos el resultado de la acción sobre ψ de las tres operaciones P, T y C. Para ello, escribamos sucesivamente:

$$T\psi(t, \boldsymbol{r}) = -i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \boldsymbol{r}),$$
$$PT\psi(t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^0(T\psi) = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, -\boldsymbol{r}),$$
$$CPT\psi(t, \boldsymbol{r}) = \gamma^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*)^* = \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t, -\boldsymbol{r}),$$

o bien

$$CPT\psi(t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^5\psi(-t, -\boldsymbol{r}). \tag{26.17}$$

En la representación espinorial

$$CPT: \quad \xi^\alpha \to -i\xi^\alpha, \quad \eta^*_{\dot{\alpha}} \to i\eta^*_{\dot{\alpha}} \tag{26.18}$$

[lo que se comprueba fácilmente de manera directa a partir de las reglas de transformación (20.4), (26.7) y (26.15)]**.

---

* La elección del factor de fase (26.13) está ligada con la elección correspondiente a (26.5) por consideraciones que se indican más adelante, en la nota de la pág. 106.

** La notación CPT supone la aplicación de los operadores en el orden de derecha a izquierda. El signo en (26.17-18) depende de este orden dado el carácter no conmutativo de T con C y P (en su acción sobre un bispinor).

Las expresiones escritas más arriba para las matrices U_C y U_T suponían que la representación de ψ era la espinorial o la típica. Veamos, finalmente, qué propiedades de estas expresiones se conservan en una representación arbitraria de ψ.

Si se somete ψ a una transformación unitaria:

$$\psi' = U\psi, \quad \gamma' = U\gamma U^{-1}, \quad \bar{\psi}' = \psi'^{*}\gamma^{0\prime} = \bar{\psi}U^{+} = \bar{\psi}U^{-1}, \tag{26.19}$$

en la nueva representación se tendrá

$$(C\psi)' = U(C\psi) = UU_C\bar{\psi} = UU_C(\bar{\psi}'U) = UU_C\tilde{U}\bar{\psi}'.$$

Comparando con la definición de la matriz U'_C en la nueva representación $[(C\psi)' = U'_C\bar{\psi}']$, se encuentra

$$U'_C = UU_C\tilde{U}. \tag{26.20}$$

La transformación (26.20) coincide con la transformación de las matrices γ tan sólo para matrices U reales. Por ello, también la expresión (26.5) es válida únicamente en las representaciones que se obtienen a partir de la espinorial o de la típica mediante una transformación real.

La matriz (26.5) es unitaria y cambia de signo al transponerla:

$$U_C U_C^{+} = 1, \quad \tilde{U}_C = -U_C. \tag{26.21}$$

Estas propiedades son invariantes respecto de la transformación (26.20) y, por ello, valen en cualquier representación. La matriz (26.5) es también hermítica ($U_C = U_C^{+}$), pero esta propiedad se pierde en el caso general al aplicar la transformación (26.20).

Todo lo dicho [en particular (26.21)] vale asimismo para las propiedades de la matriz U_T.

En el formalismo de segunda cuantificación, las transformaciones C, P, T para los operadores-ψ deben formularse como reglas de transformación de los operadores de creación y de aniquilación de las partículas. Estas reglas pueden establecerse (de manera análoga a como se hizo en el § 13 para partículas de spin 0) partiendo de la condición de que los operadores-ψ transformados pueden representarse en la forma

$$\begin{aligned} \psi^{C}(t, \boldsymbol{r}) &= U_C\bar{\psi}(t, \boldsymbol{r}), \\ \psi^{P}(t, \boldsymbol{r}) &= i\gamma^{0}\psi(t, -\boldsymbol{r}), \\ \psi^{T}(t, \boldsymbol{r}) &= U_T\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}). \end{aligned} \tag{26.22}$$

Cálculos efectuados con ayuda de las fórmulas obtenidas prueban que a estas condiciones satisfacen las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} a^{C}_{p\sigma} &= b_{p\sigma}, & b^{C}_{p\sigma} &= a_{p\sigma}; \\ a^{P}_{-p\sigma} &= ia_{p\sigma}, & b^{P}_{-p\sigma} &= ib_{p\sigma}; \\ a^{T}_{-p-\sigma} &= 2\sigma i a^{+}_{p\sigma}, & b^{T}_{-p-\sigma} &= 2\sigma i b^{+}_{p\sigma}. \end{aligned} \tag{26.23}$$

PROBLEMA

Hallar el operador de conjugación de carga en la representación de Majorana (véase el problema 2 § 21).

Solución. La matriz U'_C en la representación de Majorana se obtiene a partir de la matriz $U_C = -\alpha_y$ en la representación típica mediante la transformación (26.20) con $U = (\alpha_y + \beta)/\sqrt{2}$ y es igual a $U'_C = \alpha_y$ (α_y y β son matrices de la representación típica). Designando por (′) las cantidades en la representación de Majorana, tenemos $C\psi' = U'_C(\psi'^*\beta')$ y dado que $\beta' = \alpha_y$, será

$$C\psi' = \alpha_y(\psi'^*\alpha_y) = \alpha_y\tilde{\alpha}_y\psi'^* = \psi'^*,$$

es decir, la conjugación de carga equivale a la conjugación compleja.

§ 27. Simetría intrínseca de las partículas y antipartículas

La función de onda de una partícula de spin 1/2 se reduce, en su sistema de reposo, a un espinor tridimensional (designémoslo por Φ^α). Con el comportamiento de este espinor en la inversión está ligado el concepto de paridad intrínseca de la partícula. Sin embargo (como se indicó ya en el § 19), aunque son posibles dos leyes de transformación para los espinores tridimensionales ($\Phi^\alpha \to \pm i\Phi^\alpha$) y que éstas no son equivalentes entre sí, con todo, el atribuir a un espinor una determinada paridad carece de sentido absoluto. En consecuencia, carece también de sentido hablar de paridad intrínseca de una partícula de spin 1/2. Cabe, sin embargo, hablar de paridad intrínseca relativa de dos de tales partículas.

Con dos espinores (tridimensionales) $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ es posible construir un escalar $\Phi^{(1)}_\alpha \Phi^{(2)\alpha}$. Si éste es un escalar en sentido estricto, se dice de las partículas representadas por ellos que tienen la misma paridad; pero si dicho producto es un pseudoescalar, se habla de partículas de paridad intrínseca opuesta.

Vamos a demostrar que las paridades intrínsecas de una partícula y de una antipartícula (de spin 1/2) son opuestas (*V. B. Berestetskiĭ*, 1948).

Para ello, observemos que si a ambos miembros de la transformación P (19.5) (en la representación espinorial)

$$\text{P:}\quad \xi^\alpha \to i\eta^{\dot{\alpha}}_\alpha, \qquad \eta^{\dot{\alpha}}_\alpha \to i\xi^\alpha \tag{27.1}$$

se aplica la operación C (26.7), obtendremos

$$\eta^{c\dot{\alpha}*} \to i\xi^{c*}_\alpha, \ \xi^{c*}_\alpha \to i\eta^{c\dot{\alpha}*},$$

donde el índice c designa las componentes del bispinor $\psi^c = \begin{pmatrix} \xi^c \\ \eta^c \end{pmatrix}$, conjugado de carga del bispinor $\psi = \binom{\xi}{\eta}$. Pasando a las expresiones conjugadas complejas y cambiando la posición de los índices, se encuentra

$$\text{P:}\quad \eta^c_{\dot{\alpha}} \to i\xi^{c\alpha}, \qquad \xi^{c\alpha} \to i\eta^c_{\dot{\alpha}} \tag{27.2}$$

Vemos así que los bispinores conjugados de carga se transforman en la inversión de acuerdo con la misma ley.

Sea $\psi^{(e)}$ la función de onda de una partícula (de un electrón) y $\psi^{(p)}$ la función

de onda de una antipartícula (positón). Esta última es un bispinor conjugado de carga de una determinada solución de la ecuación de Dirac con « frecuencia negativa ». En el sistema de reposo cada una de ellas se reduce a un cierto espinor tridimensional:

$$\xi^{(e)\alpha} = \eta_\alpha^{(e)} = \Phi^{(e)\alpha}, \qquad \xi^{(p)\alpha} = \eta_\alpha^{(p)} = \Phi^{(p)\alpha}.$$

Según (27.1-2), estos espinores se transforman en la inversión de acuerdo con la ley

$$\Phi^\alpha \to i\Phi^\alpha, \tag{27.3}$$

la misma para $\Phi^{(e)}$ y $\Phi^{(p)}$. En cambio, el producto $\Phi^{(e)}\,\Phi^{(p)}$ cambia de signo, como queríamos demostrar.

En el formalismo de segunda cuantificación, el carácter opuesto de la paridad de las partículas y de las antipartículas se traduce en el cambio de signo de los productos de operadores en la inversión: $a_{p\sigma}b_{p\sigma} \to -a_{p\sigma}b_{p\sigma}$ [véase (26.23)].

Se califica de realmente neutra una partícula que « coincide » con su antipartícula (§ 12). El operador-ψ del campo de tales partículas satisface la condición

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \psi^C(t, \boldsymbol{r}).$$

Para partículas de spin 1/2 esto equivale a las condiciones (en la representación espinorial)

$$\xi^\alpha = -i\eta^{\dot\alpha +}, \qquad \eta_{\dot\alpha} = -i\xi_\alpha^+. \tag{27.4}$$

Al igual que cualquier relación que exprese propiedades físicas, estas condiciones son invariantes respecto de la transformación CPT *. Es fácil comprobar que, en efecto, son invariantes no sólo con respecto a la transformación CPT, sino también con relación a cada una de las tres transformaciones por separado.

En el § 19 convinimos en definir la inversión de los espinores como una transformación para la cual es $P^2 = -1$ y hasta aquí nos hemos atenido a esta definición. Es fácil ver que los resultados obtenidos acerca de la paridad relativa de las partículas y de las antipartículas es independiente, como debe ser, de la manera como se defina la inversión.

Si la inversión se define de manera que $P^2 = 1$, en vez de (27.1) será

$$P: \quad \xi^\alpha \to \eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to \xi^\alpha. \tag{27.5}$$

La función conjugada de carga se transforma entonces según la ley

$$\xi^{c\alpha} \to -\eta_{\dot\alpha}^c, \qquad \eta_{\dot\alpha}^c \to -\xi^{c\alpha},$$

que difiere de (27.5) en el signo. De acuerdo con esto, los espinores tridimensionales Φ se transformarán según las leyes

$$\Phi^{(e)\alpha} \to \Phi^{(e)\alpha}, \qquad \Phi^{(p)\alpha} \to -\Phi^{(p)\alpha},$$

de modo que el producto $\Phi^{(e)}\,\Phi^{(p)}$ será, al igual que antes, un pseudoescalar.

* Mejor dicho, la transformación CPT debe definirse en este caso de manera que deje invariantes las relaciones del tipo (27.4). Esto se consigue mediante una elección adecuada del factor de fase en la definición de la matriz U_T (véase la nota en la pág. 103).

La única diferencia posible en las consecuencias físicas que se siguen de ambas definiciones de la inversión consiste en que en la definición (27.5) la condición de que el campo sea realmente neutro no sería invariante respecto de esta transformación (o de la transformación CP): cambiaría el signo relativo de los dos miembros de las igualdades (27.4). De hecho, no se conocen partículas realmente neutras de spin 1/2 y hoy es imposible decir si tiene o no un sentido físico real la diferencia que hemos señalado entre las dos definiciones de la inversión *.

PROBLEMA

Hallar la paridad de carga del positonio (sistema hidrogenoide formado por un electrón y un positón).

Solución. La función de onda del sistema de los dos fermiones debe ser antisimétrica respecto de la permutación simultánea de las coordenadas, de los spines y de las variables de carga de las partículas (cf. el problema del § 13). La permutación de las primeras multiplica la función por $(-1)^l$, la de las segundas, por $(-1)^{l+S}$ (donde $S = 0$ ó 1 es el spin total del sistema), la de las terceras, por el factor C buscado. De la condición $(-1)^l\,(-1)^{l+S}C = -1$ se deduce

$$C = (-1)^{l+S}.$$

Dado que la paridad intrínseca del electrón y del positón son opuestas, la paridad espacial del sistema es $P = (-1)^{l+1}$. La paridad combinada vale: $CP = (-1)^{S+1}$.

§ 28. Formas bilineales

Consideremos las propiedades de transformación de las diferentes formas bilineales que se pueden construir a partir de las componentes de las funciones ψ y ψ^*. Tales formas poseen de manera general una gran importancia en mecánica cuántica; entre ellas figura el 4-vector densidad de corriente (21.11).

Dado que ψ y ψ^* tienen cada una cuatro componentes, a partir de ellas se pueden formar $4 \times 4 = 16$ combinaciones bilineales independientes. La clasificación de estas magnitudes de acuerdo con sus propiedades de transformación es ya evidente en las distintas maneras de multiplicar dos bispinores cualesquiera (como son en este caso ψ y ψ^*) enumeradas en el § 19. Es posible, a saber, formar un escalar (llamémosle S), un pseudoescalar (P), un espinor mixto de segundo orden, equivalente a un 4-vector V^μ (cuatro cantidades independientes), un espinor mixto de segundo orden, equivalente a 4-pseudovector A^μ (4 cantidades) y un bispinor de segundo orden que equivale a un 4-tensor antisimétrico $T^{\mu\nu}$ (6 cantidades).

En forma simétrica (para cualquier representación ψ) estas combinaciones se escriben de la siguiente manera:

$$S = \bar{\psi}\psi, \quad P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi,$$
$$V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \tag{28.1}$$

donde

* *G. Racah*, 1937, hizo notar la incompleta equivalencia de las dos definiciones de la inversión.

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = (\alpha, i\Sigma) \tag{28.2}$$

[la numeración de las componentes en (28.2), de acuerdo con (19.15)] *. Todas las expresiones que preceden son reales.

El carácter escalar y pseudoescalar de las magnitudes S y P es evidente en su representación espinorial:

$$S = \xi^*\eta + \eta^*\xi, \quad P = i(\xi^*\eta - \eta^*\xi),$$

lo que corresponde precisamente a las expresiones (19.7) y (19.8). La naturaleza vectorial de las magnitudes V^{μ} es evidente en la ecuación de Dirac teniendo en cuenta lo que precede: multiplicando la igualdad $p_{\mu}\gamma^{\mu}\psi = m\psi$ a la izquierda por $\bar{\psi}$, se obtendrá

$$(\bar{\psi}p_{\mu}\gamma^{\mu}\psi) = m\bar{\psi}\psi;$$

dado que en el segundo miembro figura un escalar, escalar debe ser también la expresión que aparece en el primer miembro.

La regla de formación de las magnitudes (28.1) es evidente: se forman como si las matrices γ^{μ} constituyen un 4-vector, γ^5 fuese un pseudoescalar y las funciones ψ y $\bar{\psi}$ que encontramos a uno y otro lados formasen, juntas, un escalar**. El hecho de que no existan formas bilineales que tengan el carácter de un 4-tensor simétrico, hecho evidente en la representación espinorial, lo es asimismo teniendo en cuenta esta regla: dado que la combinación simétrica de matrices γ^{μ} es tal que $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\,g^{\mu\nu}$, dicha forma se reduciría esencialmente a un escalar.

Las formas bilineales se obtienen en la segunda cuantificación substituyendo en (28.1) las funciones-ψ por operadores-ψ. Para mayor generalidad, supondremos que los dos operadores-ψ se refieren a campos de partículas diferentes; los distinguiremos por los índices a y b. Veamos cómo se transforman dichas formas de operadores en la conjugación de carga. Observando que***

$$\boldsymbol{\psi}^C = U_C\bar{\boldsymbol{\psi}}, \qquad \bar{\boldsymbol{\psi}}^C = U_C^{+}\boldsymbol{\psi}, \tag{28.3}$$

tenemos, aplicando (26.3) y (26.21),

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}_a^C\boldsymbol{\psi}_b^C = (U_C^{+}\boldsymbol{\psi}_a)(U_C\bar{\boldsymbol{\psi}}_b) = \boldsymbol{\psi}_a U_C^{*}U_C\bar{\boldsymbol{\psi}}_b = -\boldsymbol{\psi}_a U_C^{+}U_C\bar{\boldsymbol{\psi}}_b = -\boldsymbol{\psi}_a\bar{\boldsymbol{\psi}}_b,$$

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}_a^C\gamma^{\mu}\boldsymbol{\psi}_b^C = \boldsymbol{\psi}_a U_C^{*}\gamma^{\mu}U_C\bar{\boldsymbol{\psi}}_b = -\boldsymbol{\psi}_a U_C^{+}\gamma^{\mu}U_C\bar{\boldsymbol{\psi}}_b = \boldsymbol{\psi}_a\tilde{\gamma}^{\mu}\bar{\boldsymbol{\psi}}_b.$$

---

* En una transformación unitaria de ψ (cambio de representación) tenemos: $\psi \to U\psi$, $\gamma \to U\gamma U^{-1}$, $\bar{\psi} \to \bar{\psi}U^{-1}$, con lo que es evidente la invariancia de las formas bilineales en dichas transformaciones.

** El propio carácter « pseudoescalar » de γ^5 corresponde a estas reglas, dado que

$$\gamma^5 = \frac{i}{24}\,e_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}.$$

*** Para obtener la segunda igualdad a partir de la primera hacemos

$$\bar{\psi}^C = [U_C^{*}(\psi\gamma^{0*})]\,\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 U_C^{*}\gamma^0\psi = -\tilde{\gamma}^0 U_C^{+}\gamma^0\psi = \tilde{\gamma}^0\gamma^{0*}U_C^{+}\psi = U_C^{+}\psi$$

[teniendo en cuenta (26.3), (26.21) y el carácter hermítico de γ^0].

Al permutar los operadores con relación al orden de partida ($\bar{\psi}$ a la izquierda de ψ), en virtud de las reglas de conmutación de Fermi (25.4) cambia el signo del producto (y, además, aparecen términos que no dependen del estado del campo, términos de los que prescindiremos como en las conclusiones análogas del § 13). De esta manera obtenemos

$$\bar{\psi}^C_a \psi^C_b = \bar{\psi}_b \psi_a, \qquad \bar{\psi}^C_a \gamma^\mu \psi^C_b = -\bar{\psi}_b \gamma^\mu \psi_a.$$

Transformando también de manera análoga las restantes formas, se encuentra que al conjugar respecto de la carga se tiene *

$$\text{C: } S_{ab} \to S_{ba},\ P_{ab} \to P_{ba},\ V^\mu_{ab} \to -V^\mu_{ba},\ A^\mu_{ab} \to A^\mu_{ba},\ T^{\mu\nu}_{ab} \to -T^{\mu\nu}_{ba}. \tag{28.4}$$

Análogamente se explica el comportamiento de dichas formas al cambiar el sentido del tiempo. Al hacerlo, hay que recordar (véase § 13) que esta operación está ligada con el cambio de orden de los operadores y, en consecuencia, por ejemplo,

$$(\bar{\psi}_a \psi_b)^T = \psi^T_b \bar{\psi}^T_a.$$

Substituyendo aquí

$$\psi^T = U_T \bar{\psi}, \quad \bar{\psi}^T = -U^+_T \psi, \tag{28.5}$$

tendremos

$$(\psi_a \psi_b)^T = -(U_T \bar{\psi}_b)(U^+_T \psi_a) = -\bar{\psi}_b \tilde{U}_T U^+_T \psi_a = \bar{\psi}_b U_T U^+_T \psi_a = \bar{\psi}_b \psi_a.$$

Considerando igualmente las restantes formas, se obtendrá

$$\text{T: } \begin{array}{l} S_{ab} \to S_{ba},\quad P_{ab} \to -P_{ba},\quad (V^0, \mathbf{V})_{ab} \to (V^0, -\mathbf{V})_{ba}, \\ (A^0, \mathbf{A})_{ab} \to (A^0, -\mathbf{A})_{ba},\quad T^{\mu\nu}_{ab} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab} \to (\mathbf{p}, -\mathbf{a})_{ba} \end{array} \tag{28.6}$$

[$\mathbf{p}$, $\mathbf{a}$ son los vectores tridimensionales equivalentes a las componentes $T^{\mu\nu}$ según (19.15)].

En la inversión espacial, en cambio, y en correspondencia con el carácter tensorial de esas magnitudes, resulta

$$\text{P: } \begin{array}{l} S_{ab} \to S_{ab},\quad P_{ab} \to -P_{ab},\quad (V^0, \mathbf{V})_{ab} \to (V^0, -\mathbf{V})_{ab}, \\ (A^0, \mathbf{A})_{ab} \to (-A^0, \mathbf{A})_{ab},\quad T^{\mu\nu}_{ab} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab} \to (-\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab}. \end{array} \tag{28.7}$$

Finalmente, la aplicación conjunta de estas tres operaciones da **

$$\text{CPT: } S_{ab} \to S_{ab},\ P_{ab} \to P_{ab},\ V^\mu_{ab} \to -V^\mu_{ab},\ A^\mu_{ab} \to -A^\mu_{ab},\ T^{\mu\nu}_{ab} \to T^{\mu\nu}_{ab} \tag{28.8}$$

que corresponde precisamente al significado de esta transformación en tanto que

---

* Conviene observar que para las formas bilineales construidas a partir de las funciones-ψ (y no de los operadores -ψ), las transformaciones (28.4) tendrían signo contrario, ya que al volver los factores $\bar{\psi}$ y ψ a su orden inicial no se produciría ningún cambio de signo.

** Para evitar malentendidos recordaremos que las transformaciones T y P exigen también el cambio de los argumentos de la función; los segundos miembros (formas transformadas) en (22.6-8) son funciones de

$$x^T = (-t, \mathbf{r}), \quad x^P = (t, -\mathbf{r}), \quad x^{CPT} = (-t, -\mathbf{r}),$$

respectivamente, si los primeros miembros son funciones de $x = (t, \mathbf{r})$.

4-inversión: dado que la 4-inversión equivale a una rotación del 4-sistema de coordenadas, no existe con relación a ella diferencia alguna entre los tensores y los pseudotensores cualquiera que sea su orden.

Consideremos los productos dos a dos de formas bilineales construidas a partir de cuatro funciones distintas ψ^a, ψ^b, ψ^c, ψ^d. Obtendremos un resultado diferente según sea el par de estas funciones que se multiplican entre sí. Resulta posible, sin embargo, reducir cualquiera de estos productos a productos de formas bilineales con pares fijos de factores (*W. Pauli, M. Fierz*, 1936). Deduzcamos la relación que se encuentra en la base de esta reducción.

Consideremos el conjunto de matrices 4×4

$$1, \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu, \quad i\gamma^\mu\gamma^5, \quad i\sigma^{\mu\nu} \tag{28.9}$$

(1 es la matriz unidad). Numerando estas 16 ($= 1 + 1 + 4 + 4 + 6$) matrices formando con ellas una sucesión determinada cualquiera, las designaremos por γ^A ($A = 1, \ldots, 16$), y por γ_A, las mismas matrices con subíndices 4-tensoriales (μ, ν). Estas matrices gozan de las siguientes propiedades:

$$\begin{gathered} \operatorname{Tr} \gamma^A = 0 \quad (\gamma^A \neq 1), \\ \gamma^A\gamma_A = 1, \quad \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \gamma^A\gamma_B = \delta^A_B. \end{gathered} \tag{28.10}$$

En virtud de la última de éstas, las matrices γ^A son linealmente independientes, pero dado que su número es igual al número (4×4) de elementos de una matriz 4×4, las matrices γ^A constituyen un sistema completo y una matriz 4×4 arbitraria Γ se puede representar como combinación lineal de las mismas:

$$\Gamma = \sum_A c_A\gamma^A, \quad c_A = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \gamma_A\Gamma, \tag{28.11}$$

o en forma explícita con índices matriciales ($i, k = 1, 2, 3, 4$):

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{4} \sum_A \Gamma_{lm}\gamma^A_{ml}\gamma_{Aik}.$$

Suponiendo, en particular, que la matriz Γ contiene tan sólo un elemento diferente de cero (Γ_{lm}), obtendremos la relación buscada (« condición de carácter completo »)

$$\delta_{il}\delta_{km} = \frac{1}{4} \sum_A \gamma_{Aik}\gamma^A_{ml}. \tag{28.12}$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $\bar\psi^a_i\psi^b_k\bar\psi^c_m\psi^d_l$, se obtiene

$$(\bar\psi^a\psi^d)(\bar\psi^c\psi^b) = \frac{1}{4} \sum_A (\bar\psi^a\gamma_A\psi^b)(\bar\psi^c\gamma^A\psi^d). \tag{28.13}$$

Esta es una de las igualdades del tipo indicado más arriba: reduce el producto de

dos formas bilineales escalares a productos de formas construidas a partir de otros pares de factores*.

Otras igualdades de este tipo se pueden obtener de (28.13) substituyendo

$$\psi^d \to \gamma^B \psi^d, \quad \psi^b \to \gamma^C \psi^b$$

y utilizando el desarrollo

$$\gamma^A \gamma^B = \sum_R c_R \gamma^R, \quad c_R = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \gamma^A \gamma^B \gamma_R$$

(véanse los problemas).

Señalaremos aquí también, para futuras referencias, la relación análoga a la (28.12) para matrices 2×2. Un sistema completo de matrices 2×2 linealmente independientes $\sigma^A (A = 1, \ldots, 4)$ es el formado por

$$1, \ \sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z. \tag{28.14}$$

Para ellas

$$\begin{gathered} \operatorname{Tr} \sigma^A = 0 \qquad (\sigma^A \neq 1), \\ \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma^A \sigma^B = \delta_{AB}. \end{gathered} \tag{28.15}$$

La condición de carácter completo es

$$\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} = \frac{1}{2} \sum_A \sigma^A_{\alpha\beta} \sigma^A_{\delta\gamma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \tag{28.16}$$

($\alpha, \beta, \ldots = 1, 2$) o, de otra manera,

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\delta\beta} + \frac{3}{2} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta}. \tag{28.17}$$

PROBLEMAS

1. Deducir las fórmulas análogas a (28.13) para los productos escalares de dos formas bilineales P, V, A, T.

Solución. Hagamos:

$$J_S = (\bar{\psi}^a \psi^b)(\bar{\psi}^c \psi^d), \quad J_P = (\bar{\psi}^a \gamma^5 \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma^5 \psi^d),$$
$$J_V = (\bar{\psi}^a \gamma^\mu \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^d), \quad J_A = (\bar{\psi}^a i\gamma^\mu \gamma^5 \psi^b)(\bar{\psi}^c i\gamma_\mu \gamma^5 \psi^d),$$
$$J_T = (\bar{\psi}^a i\sigma^{\mu\nu} \psi^b)(\bar{\psi}^c i\sigma_{\mu\nu} \psi^d),$$

y designemos con las mismas letras con apóstrofo los productos que se obtienen de aquí permutando ψ^b y ψ^d. Siguiendo el método indicado en el texto, obtendremos:

$$\begin{aligned} 4J'_S &= J_S + J_V + J_T + J_A + J_P, \\ 4J'_V &= 4J_S - 2J_V + 2J_A - 4J_P, \\ 4J'_T &= 6J_S - 2J_T + 6J_P, \\ 4J'_A &= 4J_S + 2J_V - 2J_A - 4J_P, \\ 4J'_P &= J_S - J_V + J_T - J_A + J_P \end{aligned}$$

[la primera fila corresponde a la fórmula (28.13)].

* Para evitar posibles equívocos recordaremos que aquí estamos considerando formas construidas a partir de funciones-ψ. Para formas obtenidas mediante operadores-ψ que anticonmutan, el signo de la transformación sería el opuesto.

2. Demostrar que

$$J^{ab,\,cd} = -J^{ad,\,cb},$$

donde

$$J^{ab,\,cd} = (\bar{\psi}^a \gamma^\mu (1+\gamma^5)\psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_\mu (1+\gamma^5)\psi^d).$$

Solución. Las magnitudes J consideradas son escalares respecto de las 4-rotaciones, pero no poseen una paridad determinada respecto de la inversión. La manera más fácil de obtener la igualdad buscada se basa en la representación espinorial. Observando que

$$\gamma^\mu (1+\gamma^5) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^\mu (1+\gamma^5)$$

y que

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_\alpha \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\psi(1-\gamma^5) = \begin{pmatrix} \eta^*_{\dot\alpha} \\ 0 \end{pmatrix},$$

vemos que el «escalar» $J^{ab,cd}$ debe expresarse en función de un espinor de 2.° orden

$$\zeta^{(ab)}_{\alpha\dot\beta} = \eta^{a*}_{\dot\alpha}\eta^b_{\dot\beta}, \quad \zeta^{(cd)}_{\alpha\dot\beta} = \eta^{c*}_{\dot\alpha}\eta^d_{\dot\beta}$$

y, por ello, ha de ser de la forma

$$J^{ab,\,cd} \propto \zeta^{(ab)}_{\alpha\dot\beta}\zeta^{(cd)\,\alpha\dot\beta} = \eta^{a*}_{\dot\alpha}\eta^{c\dot\alpha *}\eta^b_{\dot\beta}\eta^{d\dot\beta}.$$

Permutando los índices b y d y observando que

$$\eta^b_{\dot\beta}\eta^{d\dot\beta} = -\eta^{b\dot\beta}\eta^d_{\dot\beta},$$

se obtiene el resultado buscado.

§ 29. Matriz densidad de polarización

La dependencia de la función de onda ψ respecto de las coordenadas, función que representa un movimiento libre de impulso $\boldsymbol{p}$ (onda plana), se reduce al factor común $e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$ mientras que la amplitud $u_{\boldsymbol{p}}$ representa el papel de función de onda espinorial. En un tal estado (puro), la partícula está por completo polarizada (véase III, § 59). En la teoría no-relativista, esto significa que el spin de la partícula tiene en el espacio una dirección y sentido determinados (más precisamente, existe una dirección orientada a lo largo de la cual la proyección del spin tiene el valor determinado $+1/2$). En la teoría relativista, es imposible una caracterización semejante del estado en un sistema de referencia arbitrario como consecuencia de la no conservación del vector spin (de la que se habló ya en el § 23). Que el estado sea puro significa solamente que el spin posee una determinada dirección en el sistema de reposo de la partícula.

En un estado de polarización parcial no existe una determinada amplitud, sino tan sólo una *matriz densidad de polarización* ρ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$ son índices bispinoriales). Definiremos esta matriz de tal manera que se reduzca, en un estado puro, a los productos

$$\rho_{ik} = u_{pi}\bar{u}_{pk}. \tag{29.1}$$

De acuerdo con esto, la matriz ρ se normaliza por la condición

$$\mathrm{Tr}\,\rho = 2m \tag{29.2}$$

[cf. (23.4)].

En un estado puro el valor medio del spin se determina por la cantidad

$$\bar{s} = \frac{1}{2}\int \psi^* \boldsymbol{\Sigma}\,\psi\, d^3x = \frac{1}{4\varepsilon}\, u_p^* \boldsymbol{\Sigma} u_p = \frac{1}{4\varepsilon}\,\bar{u}_p \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} u_p. \tag{29.3}$$

La correspondiente expresión para un estado de polarización parcial es:

$$\bar{s} = \frac{1}{4\varepsilon}\,\mathrm{Tr}\,(\rho\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{4\varepsilon}\,\mathrm{Tr}\,(\rho\gamma^5 \boldsymbol{\gamma}). \tag{29.4}$$

Las amplitudes u_p, $\bar{u}_p$ satisfacen los sistemas de ecuaciones algebraicas $(\hat{p} - m)u_p = 0$, $\bar{u}_p(\hat{p} - m) = 0$. Por ello, la matriz (29.1) satisface la ecuación

$$(\hat{p} - m)\rho = \rho(\hat{p} - m) = 0. \tag{29.5}$$

A las mismas ecuaciones lineales debe obedecer la matriz densidad en el caso general de un estado mezclado (respecto del spin) (cf. el razonamiento análogo en III, § 14).

Si se considera una partícula libre en su sistema de reposo, a ella es aplicable la teoría no-relativista. Pero en esta teoría un estado de polarización parcial queda por completo determinado por tres parámetros — las componentes del vector que representa el valor medio del spin $\bar{\boldsymbol{s}}$ (véase III, § 59). Es claro, por lo tanto, que estos mismos parámetros definirán también el estado de polarización después de aplicar una transformación de Lorentz cualquiera, es decir, para la partícula en movimiento.

Designemos por $\boldsymbol{\zeta}$ el doble del vector valor medio del spin en el sistema de reposo (en un estado puro es $|\boldsymbol{\zeta}| = 1$, en una mezcla se tiene $|\boldsymbol{\zeta}| < 1$). En la descripción cuadridimensional de un estado de polarización, conviene introducir el 4-vector a^μ que coincide, en el sistema de reposo, con el vector de tres dimensiones $\boldsymbol{\zeta}$; dado que $\boldsymbol{\zeta}$ es un vector axil, a^μ será un 4-pseudovector. Este 4-vector es ortogonal al 4-impulso en el sistema de reposo [donde $a^\mu = (0, \boldsymbol{\zeta})$, $p^\mu = (m, 0)$] y, por consiguiente, también lo será en un sistema arbitrario de referencia

$$a^\mu p_\mu = 0. \tag{29.6}$$

En un sistema de referencia cualquiera se tendrá también

$$a_\mu a^\mu = -\boldsymbol{\zeta}^2. \tag{29.7}$$

Las componentes del 4-vector a^μ en el sistema de referencia en el cual la partícula se mueve con velocidad $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/\varepsilon$, se encuentran mediante una transformación de Lorentz aplicada al sistema de reposo y valen

$$a^0 = \frac{|p|}{m}\zeta_{||}, \quad a_\perp = \zeta_\perp, \quad a_{||} = \frac{\varepsilon}{m}\zeta_{||}, \tag{29.8}$$

donde los subíndices $||$ y $\perp$ representan las componentes de los vectores ζ y a paralelas y perpendiculares a la dirección orientada de p *. Estas fórmulas se pueden escribir en forma vectorial:

$$a = \zeta + \frac{p(\zeta \cdot p)}{m(\varepsilon + m)}, \qquad a^0 = \frac{a \cdot p}{\varepsilon} = \frac{p \cdot \zeta}{m}, \tag{29.9}$$
$$a^2 = \zeta^2 + \frac{(p \cdot \zeta)^2}{m^2}.$$

Consideremos primero un estado no polarizado ($\zeta = 0$). La matriz densidad puede contener como parámetros en este caso tan sólo el 4-impulso p. La única forma de una tal matriz que satisfaga las ecuaciones (29.5) es

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m) \tag{29.10}$$

(*I. E. Tamm*, 1930; *H. B. C. Casimir*, 1933). El coeficiente constante se elige de acuerdo con la condición de normalización (29.2).

En el caso general de polarización parcial ($\zeta \neq 0$), buscaremos la matriz densidad en la forma

$$\rho = \frac{1}{4m}(\hat{p} + m)\rho'(\hat{p} + m), \tag{29.11}$$

que satisface automáticamente las ecuaciones (29.5). Para $\zeta = 0$ la matriz auxiliar ρ' debe reducirse a la unidad; dado que $(\hat{p} + m)^2 = 2m(\hat{p} + m)$, (29.11) coincide entonces con la expresión (29.10). Además, debe contener linealmente el 4-vector a como parámetro, es decir, ha de tener la forma

$$\rho' = 1 - A\gamma^5\hat{a}; \tag{29.12}$$

en el segundo término figura el producto «escalar» del pseudovector a y del «4-pseudovector matricial» $\gamma^5\gamma$. Para determinar el coeficiente A escribamos la matriz densidad en el sistema de reposo:

$$\rho = \frac{m}{4}(1 + \gamma^0)(1 + A\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\zeta})(1 + \gamma^0) = \frac{m}{2}(1 + \gamma^0)(1 + A\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\zeta})$$

y calculemos, de acuerdo con (29.4), el valor medio del spin. Utilizando las reglas

* Por sus propiedades de transformación, las componentes del vector spin medio $\bar{s}$ (al igual que cualquier momento cinético) son en mecánica relativista las componentes espaciales de un tensor antisimétrico $S^{\lambda\mu}$. El 4-vector a^λ está ligado con este tensor por

$$S^{\lambda\mu} = \frac{1}{2m}e^{\lambda\mu\nu\rho}a_\nu p_\rho, \quad a^\lambda = -\frac{2}{m}e^{\lambda\mu\nu\rho}S_{\mu\nu}p_\rho.$$

Hay que subrayar que, en un sistema de referencia arbitrario, la parte espacial $\boldsymbol{a}$ del 4-vector a^λ no coincide en modo alguno con el vector $2\bar{\boldsymbol{s}}$. Es fácil ver que

$$2\bar{s}_{||} = \frac{1}{m}(a_{||}\varepsilon - a^0|p|) = \zeta_{||}, \quad 2\bar{\boldsymbol{s}}_\perp = \frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{a}_\perp = \frac{\varepsilon}{m}\zeta_\perp.$$

señaladas en el § 22, llegamos fácilmente a la conclusión de que el único término distinto de cero en la traza buscada es:

$$2\bar{s} = \frac{1}{2m} \operatorname{Tr} (\rho\gamma^5\gamma) = -\frac{A}{4} \operatorname{Tr} ((\gamma\cdot\zeta)\gamma) = A\zeta.$$

Igualando esta expresión a ζ, resulta $A = 1$. La expresión definitiva para ρ se obtiene substituyendo (29.12) y (29.11) y permutando los factores ρ' y $(\hat{p} + m)$; en virtud de la ortogonalidad de a y p el producto γp anticonmuta con γa:

$$\hat{a}\hat{p} = 2ap - \hat{p}\hat{a} = -\hat{p}\hat{a},$$

y conmuta así con $\gamma^5\hat{a}$.

De esta manera, la matriz densidad de un electrón parcialmente polarizado viene dada por la expresión

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)(1 - \gamma^5\hat{a}) \tag{29.13}$$

(*L. Michel, A. S. Wightman*, 1955). Si se conoce la matriz ρ, el 4-vector a que caracteriza al estado (y, con él, también el vector ζ) se puede hallar mediante la fórmula

$$a^\mu = \frac{1}{2m} \operatorname{Tr} (\rho\gamma^5\gamma^\mu). \tag{29.14}$$

Las fórmulas para la matriz densidad de un positón son del todo análogas a las fórmulas para el electrón. Si el positón (con 4-impulso p) se describiera por la amplitud de positón y por la matriz densidad $u_p^{(\mathrm{pos})}$ determinada de acuerdo con dicha amplitud, no existiría diferencia alguna respecto del caso del electrón y la matriz $\rho^{(\mathrm{pos})}$ vendría dada por la misma fórmula (29.13). Sin embargo, en los cálculos de secciones eficaces de procesos de dispersión en los que participan positones, hay que manejar de hecho (como veremos más adelante) no $u_p^{(\mathrm{pos})}$, sino las amplitudes de « frecuencia negativa » u_{-p}. De acuerdo con esto, también la matriz densidad de polarización (designémosla por $\rho^{(-)}$) debe definirse de manera que para un estado puro se reduzca a $u_{-pi}\bar{u}_{-pk}$.

Según (26.1) la amplitud de positón es $u_p^{(\mathrm{pos})} = \mathrm{U_C}\bar{u}_{-p}$. Recíprocamente:

$$u_{-p} = \mathrm{U_C}\bar{u}_p^{(\mathrm{pos})}, \qquad \bar{u}_{-p} = \mathrm{U_C^+}u_p^{(\mathrm{pos})} = u_p^{(\mathrm{pos})}\mathrm{U_C^*}$$

[cf. (28.3)]. Si

$$\rho_{ik}^{(-)} = u_{-pi}\bar{u}_{-pk}, \qquad \rho_{ik}^{(\mathrm{pos})} = u_{pi}^{(\mathrm{pos})}\bar{u}_{pk}^{(\mathrm{pos})},$$

mediante estas fórmulas obtendremos

$$\rho^{(-)} = \mathrm{U_C}\rho^{(\mathrm{pos})}\mathrm{U_C^*}. \tag{29.15}$$

Substituyendo aquí en vez de $\rho^{(\mathrm{pos})}$ la expresión (29.13) y efectuando [mediante (26.3) y (26.21)] simples transformaciones, se obtendrá

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\hat{p} - m)(1 - \gamma^5 \hat{a}). \tag{29.16}$$

En particular, para un estado no polarizado es

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\hat{p} - m). \tag{29.17}$$

En lo que sigue, al hablar de matrices densidad para positones, nos referiremos a las matrices $\rho^{(-)}$ y prescindiremos del superíndice (—) en ellas (en cambio, no es necesario en la práctica utilizar las matrices $\rho^{(\mathrm{pos})}$).

En los diferentes cálculos a menudo deberemos promediar respecto de los estados de spin expresiones de la forma $\bar{u}Fu(\equiv \bar{u}_i F_{ik} u_k)$, donde F es una cierta matriz (4×4) y u es la amplitud bispinorial de un estado con 4-impulso determinado p. Dicho promedio es equivalente a substituir los productos $u_k \bar{u}_i$ por la matriz densidad ρ_{ki} de un estado de polarización parcial.

En particular, el promedio total respecto de dos estados de spin independientes equivale al paso a un estado no-polarizado; se tiene entonces, según (29.10),

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} \bar{u}_p F u_p = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\hat{p} + m) F. \tag{29.18}$$

De manera análoga, para las funciones de onda de frecuencia negativa es polar

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} \bar{u}_{-p} F u_{-p} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\hat{p} - m) F. \tag{29.19}$$

Si se trata, no de un promedio, sino de la suma respecto de estados de spin, el resultado es igual al doble del primero.

Veamos cómo la matriz densidad (29.13) tiende al límite correspondiente a su expresión no-relativista. Para ello, pasemos al sistema de reposo del electrón. En la representación típica de las funciones de onda, las amplitudes u_p en dicho sistema pasan a tener dos componentes; junto con ellas, debe reducirse a una matriz 2×2 la matriz densidad. En efecto, en el sistema de reposo tenemos

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0 + 1)(1 - \gamma^5 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\zeta}),$$

y mediante las expresiones de las matrices γ (21.20) y (22.18) se encuentra

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{\text{nor}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\text{nor}} = m(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \tag{29.20}$$

(los ceros representan matrices nulas 2×2). Si se adopta la normalización de la matriz densidad a 1 ($\operatorname{Tr} \rho_{\text{nor}} = 1$), habitual en la teoría no-relativista, en vez de la normalización a $2m$, esta expresión se deberá dividir por $2m$, de modo que

$$\frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta})$$

de acuerdo con III (59.4-5).

De manera análoga, el límite no-relativista de la matriz densidad de un positón es:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{nor} \end{pmatrix}, \quad \rho_{nor} = -m(1 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\zeta}).$$

Finalmente, escribamos la expresión simplificada de la matriz densidad en el caso ultrarrelativista. Haciendo en (29.8) $|\boldsymbol{p}| \approx \varepsilon$ [con lo cual prescindimos de cantidades del orden de $(m/\varepsilon)^2$], substituyendo estas expresiones en (29.13) o (29.16) y eligiendo el eje x en la dirección de $\boldsymbol{p}$, escribiremos

$$\rho = \frac{1}{2}[\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1) \pm m]\left[1 - \gamma^5\left(\frac{\varepsilon}{m}(\gamma^0 - \gamma^1)\zeta_\parallel + \boldsymbol{\zeta}_\perp\cdot\boldsymbol{\gamma}_\perp\right)\right],$$

donde el signo superior se refiere al caso del electrón, y el inferior, al del positón. Efectuando el producto, desaparecen en él los términos principales y los términos de orden siguiente darán

$$\rho = \frac{1}{2}\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1)[1 - \gamma^5(\pm\zeta_\parallel + \boldsymbol{\zeta}_\perp\cdot\boldsymbol{\gamma}_\perp)]$$

o volviendo de la notación $\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1)$ a la forma $\hat{p}$,

$$\rho = \frac{1}{2}\hat{p}[1 - \gamma^5(\pm\zeta_\parallel + \boldsymbol{\zeta}_\perp\cdot\boldsymbol{\gamma}_\perp)]. \tag{29.21}$$

Esta es precisamente la expresión buscada de la matriz densidad en el caso ultrarrelativista. Conviene observar que todas las componentes del vector polarización $\boldsymbol{\zeta}$ intervienen en ella en plan de igualdad como términos del mismo orden de magnitud. Recordemos que $\zeta_\parallel$ es la componente de este vector paralela (para $\zeta_\parallel > 0$) o antiparalela (para $\zeta_\parallel < 0$) al impulso de la partícula. En particular, para un estado de helicidad de la partícula se tiene $\zeta_\parallel = 2\lambda = \pm 1$; la matriz densidad toma entonces la forma particularmente simple*:

$$\rho = \frac{1}{2}\hat{p}(1 \mp 2\lambda\gamma^5). \tag{29.22}$$

§ 30. El neutrino

Vimos en el § 20 que la necesidad de describir las partículas de spin 1/2 mediante dos espinores (ξ y η) se debe al hecho de que la partícula posee una masa. Si ésta es nula, desaparece aquella necesidad. La ecuación de onda que describe una partícula de estas características puede establecerse ya con un solo espinor, por ejemplo, un espinor puntado η:

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} = 0, \tag{30.1}$$

o lo que es lo mismo

* Que coincide, como debía ser, con la forma de la matriz densidad del neutrino o del antineutrino — que son partículas de masa nula y helicidad determinada — (véase a continuación, § 30).

$$(p_0 + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\eta = 0. \tag{30.2}$$

En el § 20 se hizo observar también que la ecuación de onda que contiene una masa m resulta automáticamente simétrica respecto de la inversión (transformación $\xi \leftrightarrow \eta$). Pero cuando se describe la partícula mediante un solo espinor, se pierde dicha simetría. Ésta, sin embargo, no es necesaria, puesto que la simetría respecto de la inversión no es una propiedad universal de la naturaleza.

La energía y el impulso de una partícula con $m = 0$ están ligados por la relación $\varepsilon = |\boldsymbol{p}|$. En consecuencia, para una onda plana ($\eta_p \sim e^{-ipx}$) la ecuación (30.2) da

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\eta_p = -\eta_p, \tag{30.3}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el versor de $\boldsymbol{p}$. La misma ecuación

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\eta_{-p} = -\eta_{-p} \tag{30.4}$$

vale también para una onda con « frecuencia negativa » ($\eta_{-p} \sim e^{ipx}$).

El operador-ψ de segunda cuantificación es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \sum_p (\eta_p a_p + \eta_{-p} b_p^+) \\ \boldsymbol{\eta}^+ &= \sum_p (\eta_p^* a_p^+ + \eta_{-p}^* b_p) \end{aligned} \tag{30.5}$$

De aquí se sigue, como de ordinario, que η_{-p}^* son funciones de onda de una antipartícula.

De la definición de los operadores $p^{\alpha\dot{\beta}}$ (20.1) resulta que $p^{\alpha\dot{\beta}*} = -p^{\dot{\alpha}\beta}$. Por ello, el espinor conjugado de carga η^* satisface la ecuación $p^{\dot{\alpha}\beta}\eta_{\dot{\beta}}^* = 0$ o, lo que es lo mismo,

$$p_{\dot{\alpha}\beta}\eta^{\dot{\beta}*} = 0.$$

Introduzcamos la notación $\eta^{\dot{\beta}*} = \xi^{\beta}$, expresando mediante ella el hecho de que la conjugación de carga transforma un espinor puntado en otro no puntado. De esta manera, las funciones de onda de una antipartícula satisfacen la ecuación

$$p_{\dot{\alpha}\beta}\xi^{\beta} = 0, \tag{30.6}$$

o bien

$$(p_0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\xi = 0. \tag{30.7}$$

Para una onda plana deducimos de aquí que

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\xi_p = \xi_p. \tag{30.8}$$

Ahora bien, $(1/2)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ es el operador proyección del spin sobre la dirección orientada del movimiento. Por lo tanto, las ecuaciones (30.3) y (30.8) significan que los estados de una partícula con determinado impulso resultan ser automáticamente de helicidad definida — la proyección del spin en la dirección orientada

del movimiento posee en ellos un valor determinado —. En estas condiciones, si el spin de una partícula es opuesto al impulso (helicidad -1/2), el spin de la antipartícula tiene la dirección y sentido del impulso (helicidad + 1/2).

Partículas con tales propiedades lo son, al parecer, los *neutrinos* que existen en la naturaleza. En este caso, se suele llamar neutrino a la partícula con helicidad — 1/2, y antineutrino, a la partícula con helicidad + 1/2 *.

En relación con el carácter no-degenerado de los estados del neutrino respecto de la orientación del spin, recordaremos la observación hecha en el § 8 según la cual una partícula de masa 0 posee solamente la simetría axil con relación al impulso. En el caso de una partícula realmente neutra — el fotón —, en esta simetría intervienen tanto las rotaciones en torno del eje, como la reflexión en planos que pasen por el mismo. Pero en el caso del neutrino la simetría respecto de las reflexiones no existe, y hemos de considerar solamente el grupo de rotaciones en torno del eje, grupo que conserva el valor de la proyección del momento cinético sobre el mismo, pero que no cambia su signo. La simetría en las reflexiones existe únicamente bajo condición de que se permuten a la vez las partículas y las antipartículas entre sí.

Hay que observar también que el hecho de que la polarización sea necesariamente longitudinal significa que en el neutrino el spin no se puede separar del momento cinético orbital (como en el caso del fotón, en el que la polarización es necesariamente transversal, véase § 6).

A partir de un solo spinor η (o ξ) se pueden formar en total cuatro combinaciones bilineales, que, juntas, forman un cuadrivector

$$j^{\mu} = (\eta^* \eta,\ \eta^* \boldsymbol{\sigma} \eta). \tag{30.9}$$

Es fácil comprobar que, en virtud de las ecuaciones

$$(p_0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\, \eta = 0, \qquad \eta^* (p_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 0$$

se cumple la ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$, es decir, j^μ representa el papel de 4-vector densidad de corriente de las partículas.

Conviene normalizar las ondas planas de neutrino de manera análoga a como se hizo en el § 24 para partículas con masa no nula:

$$\eta_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}, \qquad \eta_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}, \tag{30.10}$$

normalizando las amplitudes espinoriales por la condición invariante

$$u^*_{\pm p} (1,\ \boldsymbol{\sigma})\, u_{\pm p} = 2\, (\varepsilon,\ \boldsymbol{p}). \tag{30.11}$$

En estas condiciones, la densidad de partículas y su densidad de corriente son: $j^0 = 1$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{p}/\varepsilon = \boldsymbol{n}$.

* La existencia del neutrino fue prevista teóricamente por Pauli para explicar las propiedades de la desintegración-β (1931). La ecuación (30.1) fue estudiada por primera vez por *H. Weyl* (1929). La teoría del neutrino basada en estas ecuaciones fue formulada por *L. D. Landau*, *T. D. Lee*, *C. N. Yang* y *A. Salam* (1957).

Dado que un neutrino libre con impulso dado está siempre totalmente polarizado, no existe en este caso el concepto de estado mezclado (respecto del spin). Con todo, puede resultar cómodo introducir una matriz « densidad » de polarización 2×2, definida simplemente como espinor de segundo orden

$$\rho_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = u_{\dot{\alpha}} u^*_{\dot{\beta}} \tag{30.12}$$

(con lo cual $\mathrm{Tr}\rho = 2\varepsilon$). La expresión de esta matriz puede escribirse observando que ha de satisfacer las ecuaciones

$$(\varepsilon + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\rho = \rho\,(\varepsilon + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Se ve así que

$$\rho = \varepsilon - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{30.13}$$

Al considerar los diferentes procesos de interacción, los neutrinos pueden figurar junto con otras partículas (de spin 1/2) que posean masa no nula y que, por ello, se representan por funciones de onda con cuatro componentes. En tales casos conviene adoptar notaciones comunes, introduciendo formalmente también para el neutrino una función de onda « bispinorial », dos de cuyas componentes, sin embargo, son iguales a cero: $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. Pero una tal forma de ψ se pierde, en general, al pasar a otra representación (no espinorial). Esta complicación puede soslayarse observando que en la representación espinorial se tiene idénticamente

$$\frac{1+\gamma^5}{2}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad (\eta^*\xi^*)\,\frac{1-\gamma^5}{2} = (\eta^* 0),$$

donde ξ es un espinor « de lastre » arbitrario que desaparece del resultado [la matriz γ^5 es la de (22.18)]. Por ello, la condición de una pura « representación con dos componentes » del neutrino dejará de cumplirse al representarlo por un ψ de cuatro componentes en una representación cualquiera, si se entiende por ψ una solución de la ecuación de Dirac con $m = 0$:

$$\hat{p}\psi = 0, \tag{30.14}$$

sometida a la condición suplementaria $^1/_2(1 + \gamma^5)\psi = \psi$, o bien

$$\gamma^5\psi = \psi. \tag{30.15}$$

Esta condición puede tenerse en cuenta conviniendo en substituir ψ y $\bar{\psi}$ en todas las ecuaciones en que deberían intervenir por las expresiones siguientes:

$$\psi \to \frac{1+\gamma^5}{2}\psi, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\,\frac{1-\gamma^5}{2}. \tag{30.16}$$

Así, el 4-vector densidad de corriente se escribe en la forma (substituyendo (30.16) en la expresión $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$)

$$j^\mu = \frac{1}{4}\,\bar{\psi}\,(1-\gamma^5)\,\gamma^\mu\,(1+\gamma^5)\,\psi = \frac{1}{2}\,\bar{\psi}\gamma^\mu\,(1+\gamma^5)\,\psi. \tag{30.17}$$

De acuerdo con esta misma regla, la matriz 4×4 densidad del neutrino debe

escribirse

$$\rho = \frac{1}{4}(1+\gamma^5)\hat{p}(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\hat{p}. \tag{30.18}$$

En la representación espinorial se reduce, como debía ser, a la matriz 2×2 (30.13)

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las fórmulas análogas para el antineutrino difieren de las que hemos escrito en el cambio de signo de γ^5.

El neutrino es una partícula eléctricamente neutra. Sin embargo, el neutrino con las propiedades que acabamos de estudiar no es una partícula realmente neutra. Observemos en relación con esto que el « campo neutrínico », representado por un espinor de dos componentes, por el número de estados posibles de sus partículas (pero, naturalmente, no atendiendo a otras propiedades físicas del mismo) equivale a un campo realmente neutro descrito por un bispinor de cuatro componentes. En vez de estados de partículas y de antipartículas con helicidades determinadas, se tendría así un número igual de estados de una sola partícula con dos posibles valores de la helicidad y automáticamente quedaría satisfecha la simetría respecto de la inversión. Con todo, no hay que perder de vista que la anulación de la masa del neutrino « de cuatro componentes » tendría entonces, por así decirlo, un carácter « accidental », ya que no estaría ligada con las propiedades de simetría de la ecuación de onda que lo describen (ecuación que admite también una masa diferente de cero). Por ello, tener en cuenta las diferentes interacciones de una tal partícula conduciría automáticamente a la aparición de una masa en reposo acaso muy pequeña, pero aun así no rigurosamente igual a cero.

§ 31. Ecuación de onda para una partícula de spin 3/2

Una partícula con spin 3/2 se representa en su sistema de reposo por un espinor simétrico tridimensional de tercer orden (con $2s+1=4$ componentes independientes). De acuerdo con esto, en un sistema de referencia arbitrario pueden participar en su descripción 4-espinores $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$, $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ y $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\chi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}$, cada uno de los cuales es simétrico respecto de todos los índices de igual especie (puntados o no puntados); en la inversión, los espinores del primer par y los del segundo par se transforman entre sí.

Para que en el sistema de reposo los 4-espinores $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ y $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ se transformen en 3-espinores simétricos respecto de sus tres índices, deben satisfacer las condiciones

$$p^{\dot{\alpha}\beta}\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma} = 0, \qquad p_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}} = 0. \tag{31.1}$$

En efecto, en el sistema de reposo es

$$p^{\dot{\alpha}\beta} \to p_0 \delta_{\alpha}^{\ \beta} = m \delta_{\alpha}^{\ \beta}$$

[como puede verse en (20.1)]. Por ello, las condiciones (31.1) conducen a las igualdades

$$\delta_{\alpha}^{\ \beta} \eta'^{\alpha}_{\ \beta\dot{\gamma}} = 0, \quad \delta_{\alpha}^{\ \beta} \xi'^{\alpha}_{\ \beta\dot{\gamma}} = 0,$$

donde las letras con apóstrofo designan los correspondientes espinores tridimensionales; en otras palabras, estos espinores se reducen a cero al contraer respecto de los índices $\alpha\beta$ y esto significa precisamente que son simétricos respecto de dichos índices y, por lo tanto, también respecto de los tres.

La relación diferencial entre los espinores ξ y η queda establecida por las igualdades

$$\begin{aligned} p^{\delta\dot{\gamma}} \eta_{\alpha\delta\beta} &= m \xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha}, \\ p_{\delta\dot{\gamma}} \xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha} &= m \eta_{\alpha\delta\beta}. \end{aligned} \tag{31.2}$$

El carácter simétrico de los primeros miembros de estas ecuaciones (respecto de los índices $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ o α, δ) queda asegurado por las condiciones (31.1), en virtud de las cuales dichos miembros se anulan al contraer respecto de todos los índices. En el sistema de reposo los espinores tridimensionales ξ' y η' coinciden, como debía ser, en virtud de las ecuaciones (31.2). Eliminando entre las ecuaciones (31.2) η o ξ, se encuentra que cada una de las componentes de los espinores ξ y η satisface la ecuación de segundo orden

$$(p^2 - m^2) \xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}} = 0. \tag{31.3}$$

El conjunto de las ecuaciones (31.1-2) constituye el sistema completo de ecuaciones de onda para una partícula de spin 3/2*. El añadir espinores ζ, χ no conduciría a nada nuevo. Éstos se construyen de acuerdo con

$$\begin{aligned} m\zeta^{\alpha\beta\gamma} &= p^{\alpha\dot{\delta}} \eta_{\dot{\delta}}^{\beta\gamma}, \\ m\chi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}} &= p_{\dot{\alpha}\delta} \xi^{\delta}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de partículas con spin 3/2 pueden también formularse de otra manera, utilizando los aspectos vectoriales de las propiedades de los espinores (*W. Rarita, J. Schwinger*, 1941; *A. S. Davydov, I. E. Tamm*, 1942). Con un par de índices espinoriales $\alpha\dot{\beta}$ se forma un índice vectorial μ en cuatro dimensiones. Por consiguiente, a las componentes de un espinor de tercer orden $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ pueden hacerse corresponder las componentes de magnitudes « mixtas » con un índice vectorial y un índice espinorial. Análogamente, al espinor $\eta^{\dot{\beta}\alpha\gamma}$ corresponden las magnitudes ψ^{γ}_{μ}, y al conjunto de ambos espinores, un bispinor « vectorial » ψ_{μ} (no

* Acerca de la formulación lagrangiana de estas ecuaciones, véase el artículo de Fierz y Pauli, citado en la página 60.

escribimos el índice bispinorial). La ecuación de onda se escribirá entonces en forma de « ecuación de Dirac » para cada una de las componentes vectoriales ψ_μ:

$$(\hat{p} - m)\,\psi_\mu = 0 \tag{31.4}$$

con la condición suplementaria

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0. \tag{31.5}$$

Utilizando para las matrices γ^μ las expresiones en la representación espinorial y las fórmulas que ligan las componentes de un espinor y de un vector (18.6-7), es fácil comprobar que las ecuaciones (31.2) están contenidas en (31.4) y que la condición (31.5) es equivalente a la condición de simetría de los espinores $\xi_{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ y $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ respecto de los índices $\dot{\beta}\dot{\gamma}$ o $\beta\gamma$. Multiplicando la ecuación (31.4) por γ^μ, obtenemos, teniendo en cuenta (31.5),

$$\gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu \psi_\mu = 0$$

o bien, aplicando las reglas de conmutación de las matrices γ^μ,

$$2g^{\mu\nu} p_\nu \psi_\mu - \gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu \psi_\mu = 0. \tag{31.6}$$

El segundo término se anula de nuevo en virtud de (31.5) y el primero da

$$p^\mu \psi_\mu = 0. \tag{31.7}$$

Es fácil ver que esta condición, que se sigue automáticamente de (31.4-5), equivale a las condiciones (31.1).

Finalmente, he aquí un procedimiento más de formular la ecuación de onda, que consiste en introducir magnitudes ψ_{ikl} ($i, k, l = 1, 2, 3, 4$) con tres índices bispinoriales, respecto de los cuales las ψ_{ikl} son simétricas (*V. Bargman, E. P. Wigner*, 1948). El conjunto de estas magnitudes es equivalente al conjunto de las componentes de los cuatro espinores ξ, η, ζ, χ. La ecuación de onda se escribe en forma de sistema de « ecuaciones de Dirac »

$$p_\mu \gamma^\mu_{im} \psi_{mkl} = m\psi_{ikl}. \tag{31.8}$$

Es fácil ver que estas ecuaciones conducen ya al número necesario (cuatro) de componentes independientes ψ_{ikl} y, por ello, no hace falta imponer condiciones suplementarias. En efecto, en el sistema de reposo las (31.8) se reducen a las igualdades

$$\gamma^0_{im} \psi_{mkl} = \psi_{ikl},$$

en virtud de las cuales se anulan (en la representación típica) todas las componentes con $i, k, l = 3, 4$, es decir, las ψ_{ikl} se reducen a las componentes de un espinor tridimensional de tercer orden.

Los resultados expuestos se generalizan de manera evidente al caso de partículas con spin s semientero cualquiera. Cuando se representan por ecuaciones de la forma (31.4-5), la función de onda será un 4-tensor simétrico de orden $(2s - 1)/2$ con un índice bispinorial. En cambio, si para describirlas se utilizan ecuaciones de la forma (31.8), la función de onda tendrá $2s$ índices bispinoriales respecto de los cuales es simétrica.

CAPÍTULO 4

UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO EXTERIOR

§ 32. La ecuación de Dirac para el electrón en un campo exterior

Las ecuaciones de onda de las partículas libres representan en esencia tan sólo aquellas propiedades que están ligadas con las condiciones generales que impone la simetría espacio-temporal. En cambio, los procesos físicos que ocurren entre partículas dependen de las propiedades de sus interacciones.

En la teoría relativista resulta imposible describir las partículas sensibles a las interacciones fuertes basándose en una simple generalización de las ecuaciones de onda, ya que dicha descripción se sale del marco de la información que proporcionan las ecuaciones de las partículas libres.

El método de las ecuaciones de onda, con todo, es aplicable para describir las interacciones electromagnéticas de las partículas no susceptibles de participar en las interacciones fuertes. A esta categoría pertenecen los electrones (y los positones) y, de esta manera, la teoría actual cubre todo el extenso dominio de la electrodinámica cuántica de los electrones. Tampoco son sensibles a las interacciones fuertes ciertas partículas inestables — los muones; estas partículas se representan por la misma electrodinámica cuántica en el conjunto de fenómenos que ocurren en intervalos de tiempo pequeños comparados con la duración de su vida (duración que está vinculada con las interacciones débiles).

En este capítulo estudiaremos los problemas de la electrodinámica cuántica comprendidos dentro de los límites de la teoría en que interviene una sola partícula. Se trata de problemas en los que el número de partículas no varía y la interacción se puede introducir mediante el concepto de campo electromagnético exterior. Junto con las condiciones que permiten considerar el campo exterior como un objeto dado, los límites de aplicabilidad de esta teoría están fijados también por condiciones ligadas con las llamadas correcciones por radiación (éstas se considerarán en la segunda parte de este volumen).

Las ecuaciones de onda de un electrón en un campo exterior dado se pueden obtener de la misma manera que en la teoría no-relativista (III, § 110). Sea $A^{\mu}=(\Phi, \boldsymbol{A})$

el 4-potencial del campo electromagnético exterior ($\boldsymbol{A}$ es el potencial vector, Φ el escalar). Obtendremos la ecuación buscada substituyendo en la ecuación de Dirac el operador 4-impulso p por la diferencia $\mathrm{p} - eA$, donde e es la carga de la partícula*:

$$[\gamma\,(\mathrm{p} - eA) - m]\,\psi = 0. \tag{32.1}$$

El hamiltoniano que corresponde a esta ecuación se obtiene a partir de (21.13) mediante la misma substitución:

$$\mathrm{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} - e\boldsymbol{A}) + \beta m + e\Phi. \tag{32.2}$$

La invariancia de la ecuación de Dirac respecto de una transformación de contraste de los potenciales del campo eléctrico se traduce en que su forma se conserva invariante si, al mismo tiempo que se aplica la transformación $A \to A + ip\chi$ (donde χ es una función arbitraria), se transforma la función de onda de acuerdo con

$$\psi \to \psi e^{ie\chi} \tag{32.3}$$

(cf. la transformación análoga para la ecuación de Schrödinger III, § 110).

La densidad de corriente expresada mediante la función de onda viene dada por la misma fórmula (21.11)

$$j = \bar{\psi}\gamma\psi,$$

que en el caso en que no existe campo exterior. Es fácil ver que repitiendo con la ecuación (32.1) [y con la ecuación (32.4) que sigue] los mismos cálculos que se efectuaron para deducir (21.11), desaparece el campo exterior y la condición de continuidad se obtiene para la anterior expresión de la corriente.

Apliquemos a la ecuación (32.1) la operación de conjugación de carga. Para ello escribimos la ecuación

$$\bar{\psi}\,[\gamma\,(\mathrm{p} + eA) + m] = 0, \tag{32.4}$$

que se obtiene a partir de la conjugado-compleja de (32.1) de la misma manera como se obtuvo anteriormente la ecuación (21.9) (al hacerlo hay que recordar que el 4-vector A es real). Escribiendo esta ecuación en la forma

$$[\tilde{\gamma}\,(\mathrm{p} + eA) + m]\,\bar{\psi} = 0,$$

multiplicándola a la izquierda por la matriz $\mathrm{U_C}$ y utilizando las relaciones (26.3) se encuentra

$$[\gamma\,(\mathrm{p} + eA) - m]\,(\mathrm{C}\psi) = 0. \tag{32.5}$$

De esta manera, la función de onda conjugado-compleja satisface una ecuación que difiere de la de partida en el signo de la carga. Por otra parte, la operación de conjugación de carga significa el paso de particulas a antipartículas. Vemos, pues, que si las partículas poseen carga eléctrica, los signos de la carga del electrón

* La carga comprende aquí su propio signo, de modo que para el electrón $e = -|e|$.

y del positón, en tanto que magnitudes que determinan su interacción con el campo electromagnético, resultan opuestos automáticamente.

Las ecuaciones de primer orden (32.1) se pueden transformar en ecuaciones de segundo orden aplicando a (32.1) el operador $\gamma(\mathrm{p} - eA) + m$:

$$[\gamma^\mu \gamma^\nu (\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu) - m^2]\psi = 0.$$

Substituyamos el producto $\gamma^\mu\gamma^\nu$ por

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu},$$

donde $\sigma^{\mu\nu}$ es el « 4-tensor matricial » antisimétrico (28.2). Al multiplicar por $\sigma^{\mu\nu}$ se puede efectuar la antisimetrización, es decir, el cambio

$$(\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu) \to \frac{1}{2}\{(\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu)\}_- =$$

$$= \frac{1}{2}e(-A_\mu \mathrm{p}_\nu + \mathrm{p}_\nu A_\mu - \mathrm{p}_\mu A_\nu + A_\nu \mathrm{p}_\mu) = \frac{1}{2}ie(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = -\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}$$

($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor del campo electromagnético). El resultado que se obtiene es una ecuación de segundo orden de la forma

$$\left[(\mathrm{p} - eA)^2 - m^2 - \frac{i}{2}eF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]\psi = 0. \tag{32.6}$$

El producto $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ puede escribirse en forma tridimensional expresándolo en función de sus componentes

$$\sigma^{\mu\nu} = (\boldsymbol{\alpha},\ i\boldsymbol{\Sigma}), \qquad F^{\mu\nu} = (-\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}).$$

Entonces es

$$[(\mathrm{p} - eA)^2 - m^2 + e\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{H} - ie\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}]\psi = 0, \tag{32.7}$$

o bien, en unidades ordinarias,

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\Phi\right)^2 - \left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - m^2c^2 + \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{H} - i\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\right]\psi = 0. \tag{32.7a}$$

La aparición en estas ecuaciones de términos que contienen los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ se debe a que la partícula posee un spin; volveremos a considerar esta cuestión en el párrafo siguiente.

Entre las soluciones de la ecuación de segundo orden se tienen también, claro está, soluciones « sobrantes », extrañas, que no satisfacen la ecuación de primer orden de partida (32.1) (son soluciones de la ecuación $[\gamma(\mathrm{p} - eA) + m]\psi = 0$ con el signo de m cambiado). Elegir las soluciones necesarias en los casos concretos es de ordinario algo que resulta evidente y no ofrece dificultad. Un método regular de selección se basa en que si φ es una solución arbitraria de la ecuación de segundo orden, una solución de la ecuación correcta de primer orden es

$$\psi = [\gamma(\mathrm{p} - eA) + m]\varphi. \tag{32.8}$$

En efecto, multiplicando esta igualdad por $\gamma(p - eA) - m$, vemos que se anula el segundo miembro si φ satisface la ecuación (32.6).

Hay que subrayar que el procedimiento para introducir el campo exterior en la ecuación de onda relativista que consiste en substituir p por $p - eA$ no es de suyo evidente. Al hacerlo nos hemos basado realmente en un principio adicional: el cambio indicado debe efectuarse en las ecuaciones de primer orden. Precisamente como resultado de esto en la ecuación (32.6) aparecieron términos suplementarios que no se habrían obtenido de haber aplicado la substitución directamente a la ecuación de segundo orden*.

Entre las soluciones estacionarias de la ecuación de Dirac en un campo exterior pueden tenerse estados tanto del espectro continuo como del espectro discreto. Al igual que en la teoría no-relativista, los estados del espectro continuo corresponden a un movimiento infinito en el que la partícula puede encontrarse a distancia infinita, región ésta en la que cabe considerarla como libre. Dado que los valores propios del hamiltoniano de una partícula libre son iguales a $\pm\sqrt{p^2 + m^2}$, es claro que el espectro continuo de valores propios de la energía se encuentra para $\varepsilon \geqslant m$ y para $\varepsilon \leqslant -m$. Pero si $-m < \varepsilon < m$, la partícula no puede encontrarse en el infinito, de modo que el movimiento es finito y el estado pertenece al espectro discreto.

Como en el caso de las partículas libres, las funciones de onda de « frecuencia positiva » ($\varepsilon > 0$) y de « frecuencia negativa » ($\varepsilon < 0$) intervienen de manera determinada en el esquema de segunda cuantificación. Para partículas en un campo exterior, este esquema se generaliza de manera natural reemplazando las ondas planas de las fórmulas (25.1) por funciones propias debidamente normalizadas de la ecuación de Dirac $\psi_n^{(+)}$ y $\psi_n^{(-)}$, que corresponden a frecuencias positivas ($\varepsilon_n^{(+)}$) y negativas ($-\varepsilon_n^{(-)}$):

$$\psi = \sum_n \{a_n \psi_n^{(+)} e^{-i\varepsilon_n^{(+)} t} + b_n^+ \psi_n^{(-)} e^{i\varepsilon_n^{(-)} t}\},$$
$$\bar{\psi} = \sum_n \{a_n^+ \bar{\psi}_n^{(+)} e^{i\varepsilon_n^{(+)} t} + b_n \bar{\psi}_n^{(-)} e^{-i\varepsilon_n^{(-)} t}\}. \tag{32.9}$$

Sin embargo, este esquema de cuantificación puede conducir a dificultades.

---

* De acuerdo con este principio, debería introducirse también el campo exterior en las ecuaciones de onda de las partículas con otros valores del spin, esto es, tomando las ecuaciones en la forma tal como se obtienen a partir del principio de variación, sin utilizar condiciones suplementarias. Así, en el caso de spin 1 la substitución $p \to p - eA$ debería efectuarse en las ecuaciones (14.1-2). Haremos notar que dicha substitución (en el caso de spin 1) en la ecuación de segundo orden (14.4) y en la condición suplementaria (14.3) conducirían, en general, a un sistema incompatible de ecuaciones [en el caso de spin 3/2 la incompatibilidad se manifiesta ya al utilizar las ecuaciones de primer orden (31.2) con las condiciones suplementarias (31.1)].

En el caso de spin 0 la substitución $p \to p - eA$ en las ecuaciones de primer orden (10.4) es equivalente a la substitución en la ecuación de segundo orden (10.5).

No nos detendremos a analizar estas cuestiones con mayor detenimiento porque no tienen un sentido físico directo: la interacción electromagnética de las partículas reales con spin diferente de 1/2 no se puede describir mediante ecuaciones de onda.

Ocurre, en efecto, que a medida que aumenta la profundidad del pozo de potencial, los niveles de energía pueden atravesar la frontera $\varepsilon = 0$, es decir, pasar de positivos a negativos (o bien, para un potencial del otro signo, de negativos a positivos). A pesar de todo, y por razones de continuidad, debemos seguir considerando estos niveles como niveles de electrón (y no como niveles de positón). Por ello, sería más riguroso el hacer corresponder a los electrones todos los estados que en un desacoplamiento infinitamente lento del campo se encuentran tocando a la frontera positiva del espectro continuo ($\varepsilon = m$). Con todo, la energía del electrón puede entonces resultar negativa, de modo que el vacío no será el estado más bajo de todos; teniendo en cuenta el carácter del campo, esto puede conducir a la aparición de pares electrón-positón*. Además, si se sigue aumentando la profundidad del pozo de potencial, un nivel electrónico puede alcanzar la frontera negativa del espectro continuo. Se anula entonces la energía mínima necesaria para la creación de un par (igual a $m + \varepsilon_{el}$), es decir, se inicia inmediatamente la formación espontánea de pares — proceso éste que en ningún caso cabe estudiar dentro de los límites de la teoría de una sola partícula.

Todo esto prueba que la aplicabilidad del concepto de campo exterior se ve limitada en la teoría relativista. En particular, es imposible considerar pozos de potencial demasiado profundos. Por otra parte, dentro del cuadro de la teoría para varias partículas el problema no ha sido aún investigado.

PROBLEMA

Determinar los niveles de energía de un electrón en un campo magnético constante.

Solución. El potencial vector es: $A_x = A_z = 0$, $A_y = Hx$ (el campo H está dirigido en el sentido del eje z). Se conservan (junto con la energía) las componentes p_y, p_z del impulso generalizado.

Utilicemos la ecuación de segundo orden para la función auxiliar φ [véase (32.8)] y supongamos que φ es función propia del operador Σ_z (con valores propios $\sigma = \pm 1$) y también de los operadores p_y, p_z. La ecuación para φ tiene la forma

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + (eHx - p_y)^2 - eH\sigma\right\}\varphi = (\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2)\,\varphi.$$

Esta ecuación coincide formalmente con la ecuación de Schrödinger para un oscilador lineal. Los valores propios ε se determinan por la fórmula

$$\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2 = |e|\,H(2n+1) - eH\sigma, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

(cf. III, § 111). Obsérvese que la función de onda ψ, que hay que determinar a partir de φ mediante la fórmula (32.8), no es función propia del operador Σ_z de acuerdo con el hecho de que para una partícula en movimiento el spin no es una magnitud que se conserve.

§ 33. Desarrollo en potencias de $1/c$**

Vimos (§ 21) que en el límite no-relativista ($v \to 0$) se anulan las dos componentes

* En particular, tal ocurre cuando existen dos pozos de potencial profundos y de signos opuestos.
** En este párrafo utilizamos el sistema ordinario de unidades.

(χ) del bispinor $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$. En consecuencia, para pequeñas velocidades del electrón se tiene $\chi \ll \varphi$. Esto permite obtener una ecuación aproximada que contenga solamente la magnitud de dos componentes φ desarrollando formalmente la función de onda en potencias de $1/c$.

Partiremos de la ecuación de Dirac para el electrón en un campo exterior escrita en la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) + \beta mc^2 + e\Phi \right\} \psi. \tag{33.1}$$

En la energía relativista de una partícula se incluye también su energía en reposo mc^2. Al pasar a la aproximación no-relativista, esta última debe eliminarse, para lo cual en vez de ψ introduciremos la función ψ' definida por

$$\psi = \psi' e^{-imc^2 t/\hbar}.$$

Entonces

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2 \right) \psi' = \left\{ c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) + \beta mc^2 + e\Phi \right\} \psi'.$$

Representando ψ' en la forma $\psi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix}$, se obtendrá el sistema de ecuaciones

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \varphi' = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \chi', \tag{33.2}$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + 2mc^2 \right) \chi' = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \varphi' \tag{33.3}$$

(en lo que sigue prescindiremos de los apóstrofos en φ y χ; esto no puede dar lugar a confusiones, puesto que en este párrafo utilizaremos solamente la función transformada ψ').

En primera aproximación, conservaremos en el primer miembro de la ecuación (33.3) solamente el término $2mc^2\chi$, con lo que

$$\chi = \frac{1}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \varphi \tag{33.4}$$

(obsérvese que $\chi \sim \varphi/c$). La substitución de esta expresión en (33.2) da

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \varphi = \frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \right)^2 \varphi.$$

Para las matrices de Pauli vale la relación

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}], \tag{33.5}$$

donde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ son vectores arbitrarios [véase (20.9)]. En el presente caso es $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$, pero el producto vectorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ no se anula debido a que $\mathbf{p}$ y $\boldsymbol{A}$ no conmutan

entre sí:

$$\left[\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\times\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\varphi=i\frac{e\hbar}{c}\left\{\boldsymbol{A}\times\nabla+\nabla\times\boldsymbol{A}\right\}\varphi=i\frac{e\hbar}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\varphi.$$

Así, pues,

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right)^2=\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H} \tag{33.6}$$

(donde $\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ es el campo magnético) y para φ se obtiene la ecuación

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\mathrm{H}\varphi=\left[\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+e\Phi-\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}\right]\varphi. \tag{33.7}$$

Esta es la llamada *ecuación de Pauli*. Difiere de la ecuación no-relativista de Schrödinger en el último término del hamiltoniano, cuya forma es la de la energía potencial de un dipolo magnético en un campo exterior (cf. III, § 110). De esta manera, en primera aproximación (respecto de $1/c$) el electrón se comporta como una partícula que posee, además de una carga, un momento magnético:

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}=\frac{e}{mc}\hbar\mathbf{s}. \tag{33.8}$$

Además, la razón giromagnética (e/mc) es el doble de la que sería para un momento magnético asociado con el movimiento orbital ★.

Para la densidad se tiene $\rho=\psi^*\psi=\varphi^*\varphi+\chi^*\chi$. En primera aproximación debe prescindirse del segundo término, de modo que $\rho=|\varphi|^2$, como debía ser para la ecuación de Schrödinger.

En cuanto a la densidad de corriente, se tiene

$$\boldsymbol{j}=c\psi^*\boldsymbol{\alpha}\psi=c\,(\varphi^*\boldsymbol{\sigma}\chi+\chi^*\boldsymbol{\sigma}\varphi).$$

De acuerdo con (33.4) substituiremos aquí

$$\chi=\frac{1}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi,\quad \chi^*=\frac{1}{2mc}\left(i\hbar\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi^*\cdot\boldsymbol{\sigma},$$

y los productos que contienen cada uno dos factores $\boldsymbol{\sigma}$ se transformarán mediante la fórmula (33.5) escrita en la forma

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{a}+i\,[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}],\quad \boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+i\,[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\sigma}]. \tag{33.9}$$

El resultado que se obtiene es

$$\boldsymbol{j}=\frac{i\hbar}{2m}(\varphi\nabla\varphi^*-\varphi^*\nabla\varphi)-\frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\varphi^*\varphi+\frac{\hbar}{2m}\operatorname{rot}(\varphi^*\boldsymbol{\sigma}\varphi), \tag{33.10}$$

de acuerdo con la expresión III (114.4) de la teoría no-relativista.

Hallemos ahora la segunda aproximación, llevando el desarrollo hasta términos

★ Este notable resultado lo obtuvo *Dirac* en 1928. La función de onda de dos componentes que satisface la ecuación (33.7) fue introducida por *W. Pauli* (1927), antes de que *Dirac* descubriera su ecuación.

$\sim 1/c^2$ *. Al hacerlo supondremos que el campo exterior es puramente eléctrico ($\boldsymbol{A} = 0$).

Observemos ante todo que, teniendo en cuenta los términos $\sim 1/c^2$, la densidad se escribe

$$\rho = |\varphi|^2 + |\chi|^2 = |\varphi|^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}|\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi|^2.$$

Esta expresión difiere de la de Schrödinger. Dado que nos proponemos hallar (en segunda aproximación) una ecuación de onda análoga a la ecuación de Schrödinger, debemos introducir en vez de φ otra función φ_{Sch} (de dos componentes) para la cual la integral que se conserve en el tiempo tenga la forma $\int|\varphi_{\text{Sch}}|^2 dV$, como debe ser para dicha ecuación.

Para ver cuál es la transformación que hemos de aplicar, escribamos la condición

$$\int \varphi^*_{\text{Sch}}\varphi_{\text{Sch}} dV = \int \left\{\varphi^*\varphi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\nabla\varphi^*\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi)\right\} dV$$

y efectuemos la integración por partes:

$$\int (\nabla\varphi^*\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi)\, dV = -\int \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\varphi\, dV = -\int \varphi^*\Delta\varphi\, dV$$

(o esta misma igualdad con φ y φ^* permutadas). De esta manera,

$$\int \varphi^*_{\text{Sch}}\varphi_{\text{Sch}} dV = \int \left\{\varphi^*\varphi - \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\varphi^*\Delta\varphi + \varphi\Delta\varphi^*)\right\} dV,$$

de donde se sigue que

$$\varphi_{\text{Sch}} = \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi, \quad \varphi = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi_{\text{Sch}} \tag{33.11}$$

Para simplificar la notación supondremos que el estado es estacionario, es decir, substituiremos el operador $-i\hbar\partial/\partial t$ por la energía ε (restada la energía en reposo). En la aproximación que sigue [a la (33.4)] tenemos, en virtud de (33.3),

$$\chi = \frac{1}{2mc}\left(1 - \frac{\varepsilon - e\Phi}{2mc^2}\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\varphi.$$

Esta expresión debe substituirse en (33.2) y cambiar luego φ por φ_{Sch}, de acuerdo con (33.11), prescindiendo siempre de los términos de orden superior al de $1/c^2$. Después de un cálculo fácil se obtendrá la ecuación para φ_{Sch} en la forma $\varepsilon\varphi_{\text{Sch}} = \text{H}\varphi_{\text{Sch}}$, donde en el hamiltoniano es

$$\text{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{e}{4m^2c^2}\left\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\Phi(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}) - \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2\Phi + \Phi\mathbf{p}^2)\right\}.$$

La expresión entre llaves se transforma mediante las fórmulas

---

* Seguimos a continuación el método de *A. I. Ajiezer* y *V. B. Berestetskiĭ* (1953).

$$(\sigma\cdot\mathbf{p})\,\Phi\,(\sigma\cdot\mathbf{p}) = \Phi\mathbf{p}^2 + (\sigma\cdot\mathbf{p}\Phi)\,(\sigma\cdot\mathbf{p}) = \Phi\mathbf{p}^2 + i\hbar\,(\sigma\cdot\boldsymbol{E})\,(\sigma\cdot\mathbf{p}),$$
$$\mathbf{p}^2\Phi - \Phi\mathbf{p}^2 = -\hbar^2\Delta\Phi + 2i\hbar\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{p}$$

(donde $\boldsymbol{E} = -\Delta\Phi$ es el campo eléctrico). La expresión final del hamiltoniano se escribe:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\sigma\cdot[\boldsymbol{E}\times\mathbf{p}] - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E}. \qquad (33.12)$$

Los últimos tres términos son las correcciones buscadas de orden $1/c^2$. La primera de ellas es consecuencia de la dependencia relativista de la energía cinética con relación al impulso (desarrollo de la diferencia $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2} - mc^2$). El segundo término, que se puede llamar energía de la *interacción spin-órbita*, es la energía de interacción del momento magnético, en movimiento, con el campo eléctrico*. Este último término es, sin embargo, distinto de cero tan sólo en aquellos puntos en que se encuentran las cargas que crean el campo exterior [así, para el campo de Coulomb de una carga puntual Ze: $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r})$] (*C. G. Darwin*, 1928).

Si el campo eléctrico tiene simetría esférica, será

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{d\Phi}{dr},$$

y el operador de interacción spin-órbita se puede expresar en la forma

$$\frac{e\hbar}{4m^2c^2r}\sigma\cdot[\boldsymbol{r}\times\mathbf{p}]\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2r}\frac{dU}{dr}\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}. \qquad (33.13)$$

Aquí, $\mathbf{l}$ es el operador momento cinético orbital, $\mathbf{s} = (1/2)\sigma$, el operador spin del electrón y $U = e\Phi$ la energía potencial del electrón en el campo**.

§ 34. Estructura fina de los niveles del átomo de hidrógeno

Determinemos las correcciones relativistas correspondientes a los niveles de energía del átomo de hidrógeno — es decir, del electrón en el campo coulombiano de un núcleo en reposo***. La velocidad del electrón en el átomo de hidrógeno es tal que $v/c \sim \alpha \ll 1$. Por ello, las correcciones buscadas se pueden calcular aplicando la teoría de perturbaciones — como valor medio respecto del estado no

---

* Introduciendo el momento magnético (33.8) y la velocidad $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m$, obtendremos esta energía en la forma $-\frac{1}{2c}\boldsymbol{\mu}\cdot[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v}]$. A primera vista este resultado puede parecer artificial, ya que al pasar al sistema de referencia que se mueve junto con la partícula aparece el campo magnético $\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v}]$ en el cual el momento magnético debería tener la energía $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}$. Este razonamiento, sin embargo, en realidad no tiene en cuenta todavía de manera adecuada el carácter no inercial del sistema de referencia vinculado a la partícula. La aparición del factor 1/2 (« factor de Thomas », *L. Thomas*, 1926) se debe a las condiciones generales de invariancia relativista junto con las propiedades específicas del electrón en tanto que partícula « dotada de spin » y su significado inherente de razón giromagnética (véase § 41).

** La fórmula (33.13) se utilizó en III, § 72.

*** La influencia del movimiento del núcleo sobre el valor de estas correcciones es un efecto de orden más pequeño, que aquí no nos interesa.

perturbado (es decir, según la función de onda no-relativista) de los términos relativistas en el hamiltoniano aproximado (33.12). Para conseguir una generalidad algo mayor tomaremos la carga del núcleo igual a Ze, suponiendo, con todo, que se tiene $Z\alpha \ll 1$.

La intensidad del campo del núcleo es $\boldsymbol{E} = Ze\boldsymbol{r}/r^3$ y su potencial satisface la ecuación $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r})$. Substituyendo estos valores en (33.12) (en los últimos tres términos) y teniendo en cuenta que la carga del electrón es negativa, se obtendrá el operador de la perturbación

$$V = -\frac{\alpha \mathbf{p}^4}{8m^3} + \frac{Z\alpha}{2r^3 m^2}\mathbf{l}\cdot\mathbf{s} + \frac{Z\alpha\pi}{2m^2}\delta(\boldsymbol{r}). \tag{34.1}$$

Dado que, según la ecuación no-relativista de Schrödinger, se tiene

$$\mathbf{p}^2\psi = 2m\left(\varepsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi$$

(donde $\varepsilon_0 = -mZ^2\alpha^2/2n^2$ es el nivel no perturbado y n el número cuántico principal), el valor medio

$$\overline{\mathbf{p}^4} = 4m^2\overline{\left(\varepsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2}.$$

Esta cantidad, como también el valor medio del segundo término en (34.1), se calcula mediante las fórmulas (véase III, § 36)

$$\overline{r^{-1}} = \frac{m\alpha Z}{n^2}, \quad \overline{r^{-2}} = \frac{(m\alpha Z)^2}{n^3(l+{}^1/_2)},$$
$$\overline{r^{-3}} = \frac{(m\alpha Z)^3}{n^3 l(l+{}^1/_2)(l+1)} \tag{34.2}$$

(la última corresponde a $l \neq 0$); el valor propio

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right] \text{ para } l \neq 0,$$
$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s} = 0 \text{ para } l = 0.$$

Finalmente, el promedio del tercer término se efectúa con ayuda de las fórmulas

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z\alpha m}{n}\right)^{3/2}, \quad l = 0; \qquad \psi(0) = 0, \quad l \neq 0. \tag{34.3}$$

El resultado de un cálculo simple utilizando las fórmulas que preceden se puede representar en todos los casos (para j y l cualesquiera) en la forma

$$\Delta\varepsilon = -\frac{m(Z\alpha)^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+{}^1/_2} - \frac{3}{4n}\right). \tag{34.4}$$

La fórmula (34.4) da también la corrección relativista buscada para la energía

de los niveles hidrogenoides — la energía de estructura fina*—. Recordaremos que en la teoría no-relativista se presenta tanto una degeneración debida a la dirección del spin, como una degeneración de Coulomb relativa a l. La estructura fina (la interacción spin-órbita) rompe esta degeneración, pero no del todo: subsiste una doble degeneración de los niveles con valores iguales de n, j, pero con diferentes $l = j \pm 1/2$ (resultan no degenerados solamente los niveles con los mayores valores posibles de j para un valor dado de n, es decir, $j = j_{\text{máx}} = l_{\text{máx}} + 1/2 = n - 1/2$**). De esta manera, la sucesión de los niveles hidrogenoides teniendo en cuenta la estructura fina es la siguiente:

$$1s_{1/2};$$

$$\underbrace{2s_{1/2},\ 2p_{1/2}},\ 2p_{3/2};$$

$$\underbrace{3s_{1/2},\ 3p_{1/2}},\ \underbrace{3p_{3/2},\ 3d_{3/2}},\ 3d_{5/2}.$$

$$\ldots\ldots$$

El nivel con número cuántico principal n se descompone en n componentes de estructura fina.

Veremos más adelante que la degeneración aún subsistente desaparece debido a las llamadas correcciones por radiación (corrimiento Lamb), correcciones que no tiene en cuenta la ecuación de Dirac en el problema para un solo electrón.

Adelantándonos en nuestro programa, indicaremos aquí ya que estas correcciones son del orden de $\sim mZ^4\alpha^5\ln(1/\alpha)$. En cambio, la corrección de segundo orden respecto de la interacción spin-órbita sería del orden de $\sim m(Z\alpha)^6$, con lo cual la razón de ésta a las correcciones por radiación es del orden de $\sim Z^2\alpha/\ln(1/\alpha)$. Para el hidrógeno ($Z = 1$) esta razón es sin duda pequeña, por lo cual el problema de resolver exactamente la ecuación de Dirac carece en este caso de sentido. Este problema, sin embargo, sí puede tenerlo para los niveles de energía del electrón en el campo de un núcleo con un valor grande de Z (§ 36).

---

* Esta fórmula [como también la fórmula más precisa (36.10)] la obtuvo *A. Sommerfeld* a partir de la antigua teoría de Bohr antes de que se fundara la mecánica cuántica.

** Esta degeneración está ligada con la existencia de una ley adicional de conservación específica del campo coulombiano: el hamiltoniano de la ecuación de Dirac $H = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m - e^2/r$ conmuta con el operador

$$\mathbf{l} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{\Sigma} + \frac{i}{me^2}\beta(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{l} + 1)\gamma^5(H - m\beta)$$

(*M. H. Johnson, B. A. Lipman*, 1950). En el límite no-relativista $\mathbf{l} \to \boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{A}$, donde

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{2me^2}\{\mathbf{l}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{l}\}$$

es el operador que corresponde a la integral del movimiento de Coulomb clásica (véase I, § 15). La degeneración accidental no-relativista en un campo coulombiano se debe a la ley de conservación de la cantidad **A**.

§ 35. Movimiento en un campo con simetría esférica

Consideremos el movimiento de un electrón en un campo eléctrico que presenta simetría esférica.

Dado que en el movimiento en un campo de esta especie se conservan el momento cinético y la paridad (respecto del centro del campo elegido como origen de coordenadas), para la dependencia angular de las funciones de onda de ese movimiento vale todo lo dicho en el § 24 con relación a las ondas esféricas de las partículas libres. Cambian tan sólo las funciones radiales. De acuerdo con esto, buscaremos la función de onda de los estados estacionarios (en la representación típica) entre las expresiones de la forma

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(r)\,\Omega_{jlm}\\ (-1)^{\frac{1+l-l'}{2}}\,g(r)\,\Omega_{jl'm}\end{pmatrix}, \tag{35.1}$$

donde $l=j\pm{}^1/_2$, $l'=2j-l$ y la potencia de -1 se ha introducido porque así convendrá más adelante.

La ecuación de Dirac en la representación típica conduce al siguiente sistema de ecuaciones para φ y χ:

$$\begin{aligned}(\varepsilon-m-U)\,\varphi&=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\chi,\\ (\varepsilon+m-U)\,\chi&=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\varphi,\end{aligned} \tag{35.2}$$

donde $U(r)=e\Phi(r)$ es la energía potencial del electrón en el campo. El cálculo del resultado de substituir aquí las expresiones (35.1) se reduce al cálculo de los segundos miembros de estas ecuaciones.

Expresando el espinor esférico $\Omega_{jl'm}$ en función de Ω_{jlm} de acuerdo con

$$\Omega_{jl'm}=i^{l-l'}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\Omega_{jlm}$$

[véase (24.8)], escribiremos

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\,\chi=-i\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r})\,\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm}.$$

Efectuando ahora el producto $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r})$ mediante la fórmula (33.5), se encuentra, después de desarrollar las operaciones vectoriales,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\,\chi&=-i\,\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times\mathbf{r}]\}\,\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm}=\\ &=\{-\operatorname{div}\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\nabla)-\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]\}\,\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm}=\\ &=-\left\{g'+\frac{2}{r}\,g+\frac{g}{r}\;\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{l}\right\}\Omega_{jlm},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ es el operador correspondiente al momento cinético orbital; el

apóstrofo representa la derivación respecto de r. Los valores propios del producto $\sigma \cdot \mathbf{l} = 2\,\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}$ son iguales a

$$\sigma\cdot\boldsymbol{l} = \boldsymbol{j}^2 - \boldsymbol{l}^2 - \boldsymbol{s}^2 = j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} = \begin{cases} j - {}^1/_2 & \text{para } l = j - {}^1/_2, \\ -j - {}^3/_2 & \text{para } l = j + {}^1/_2. \end{cases}$$

Para unificar la escritura de las fórmulas en ambos casos ($l = j \pm 1/2$) conviene introducir la notación

$$\varkappa = \begin{cases} -(j+{}^1/_2) = -(l+1) & \text{para } j = l + {}^1/_2, \\ +(j+{}^1/_2) = l & \text{para } j = l - {}^1/_2. \end{cases} \tag{35.3}$$

El número $\varkappa$ toma todos los valores enteros, excluido el valor 0 (correspondiendo los números positivos al caso $j = l - 1/2$, y los negativos al caso $j = l + 1/2$). Entonces es $\boldsymbol{l}\cdot\sigma = -(1 + \varkappa)$, de modo que

$$(\sigma\cdot\mathbf{p})\,\chi = -\left(g' + \frac{1-\varkappa}{r} g\right) \Omega_{jlm}.$$

Al substituir esta expresión en la primera de las ecuaciones (35.2), el espinor esférico Ω_{jlm} se reduce entre ambos miembros de la ecuación. Procediendo de manera análoga con la segunda ecuación*, obtendremos como resultado el siguiente sistema para las funciones radiales:

$$\begin{gathered} f' + \frac{1+\varkappa}{r} f - (\varepsilon + m - U)\, g = 0, \\ g' + \frac{1-\varkappa}{r} g + (\varepsilon - m - U)\, f = 0, \end{gathered} \tag{35.4}$$

o bien

$$\begin{gathered} (fr)' + \frac{\varkappa}{r}(fr) - (\varepsilon + m - U)\, gr = 0, \\ (gr)' - \frac{\varkappa}{r}(gr) + (\varepsilon - m - U)\, fr = 0. \end{gathered} \tag{35.5}$$

Veamos cómo se comportan f y g a cortas distancias suponiendo que el campo $U(r)$ crece más rápidamente que $1/r$ cuando $r \to 0$. Entonces, para valores pequeños de r, las ecuaciones (35.4) toman la forma

$$f' + Ug = 0, \qquad g' - Uf = 0.$$

Ambas tienen soluciones reales del tipo

$$f = \text{const} \cdot \operatorname{sen}\left(\int U\,dr + \delta\right), \qquad g = \text{const} \cdot \cos\left(\int U\,dr + \delta\right), \tag{35.6}$$

donde δ es una constante arbitraria. Estas funciones oscilan para $r \to 0$ sin tender

---

* No es necesario repetir estos cálculos. Basta observar que el paso de la primera ecuación a la segunda se consigue [como puede verse en (35.1-2)], mediante el cambio.

$$f \to g,\ g \to -f,\ m \to -m,\ l \to l',\ \varkappa \to -\varkappa.$$

a ningún límite. Es fácil ver que esta situación corresponde a una « caída » de la partícula hacia el centro.

Observemos, en primer lugar, que en el caso considerado la ecuación de onda posee un espectro continuo para cualquier valor ε, incluso aquellos valores tales que $|\varepsilon| < m$. En efecto, el dominio de cortas distancias no añade limitaciones en la elección de la solución en este caso: la condición de contorno para $r = 0$ deja de existir, por la propia esencia del problema, en el caso de funciones que oscilan, de modo que la elección de la constante δ sigue siendo arbitraria. En cambio, el comportamiento correcto de la función de onda en el dominio de grandes valores de r [« empalmada » con la función (35.8)] puede conseguirse para ε cualquiera eligiendo convenientemente δ.

Sin embargo, en los estados del espectro continuo cualquier paquete de ondas escapa, en el curso del tiempo, de cualquier dominio finito del espacio (como prueban los razonamientos expuestos al final de III, § 10). Dado que para $|\varepsilon| < m$ la partícula no puede escapar al infinito, esto significa que escapa hacia el origen de coordenadas, es decir, cae hacia el centro. El movimiento resulta, como si dijéramos, infinito hacia los valores pequeños de r. Pero la situación que acabamos de describir es por completo inadmisible en la teoría relativista En efecto, en virtud de la continuidad del espectro para $|\varepsilon| < m$ los estados con frecuencias negativas y positivas resultan inseparables. Esto hace imposible cualquier descripción razonable del sistema. En particular, éste sería absolutamente inestable: cualquier perturbación conduciría a la creación de un número infinito de pares. Por ello, en la teoría de Dirac es absolutamente imposible estudiar un campo cuyo potencial crece más rápidamente que $1/r$ cuando $r \to 0$. Hay que subrayar que esto vale para potenciales de ambos signos. Aunque, claro está, es posible hablar de « caída » sólo en el caso de atracción, sin embargo, y dado que el signo de $U = e\Phi$ depende también del signo de la carga e, en un caso los niveles de electrón se comportan de manera anómala, y en el otro, los niveles de positón.

Consideremos ahora el comportamiento de las funciones de onda a grandes distancias. Si el campo $U(r)$ decrece con rapidez suficiente cuando $r \to \infty$, al determinar la forma asintótica de las funciones de onda a grandes distancias cabe prescindir por completo del campo en las ecuaciones. Si $\varepsilon > m$, es decir, en el dominio del espectro continuo, volvemos entonces de nuevo a la ecuación del movimiento libre, de modo que la forma asintótica de las funciones de onda (ondas esféricas) difiere de la correspondiente a una partícula libre tan sólo en la aparición de « corrimientos de fase » adicionales cuyos valores vienen determinados por la forma del campo a cortas distancias*. Estos corrimientos dependen de los valores de j y l o, lo que es lo mismo, del número $\varkappa$ introducido más arriba (y también, naturalmente, de la energía ε). Designándolos por $\delta_\varkappa$ y utilizando la expresión de una

* Cf. III, § 33. Como en la teoría no-relativista, $U(r)$ debe decrecer más rápidamente que $1/r$. El caso en que $U \sim 1/r$ se estudiará aparte en el § 36.

onda esférica libre (24.7), podemos por ello escribir sin más la fórmula asintótica buscada

$$\psi \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\,\Omega_{jlm}\,\mathrm{sen}\left(pr-\frac{\pi l}{2}+\delta_\varkappa\right)\\ -\sqrt{\varepsilon-m}\,\Omega_{jl'm}\,\mathrm{sen}\left(pr-\frac{\pi l'}{2}+\delta_\varkappa\right)\end{pmatrix} \tag{35.7}$$

(donde $p=\sqrt{\varepsilon^2-m^2}$). El coeficiente común corresponde aquí a la normalización de las funciones radiales de acuerdo con (24.5).

En cuanto a las funciones de onda del espectro discreto ($\varepsilon < m$), decrecen exponencialmente para $r \to \infty$ de acuerdo con la ley

$$f=-\sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}}\,g=\frac{A_0}{r}\exp\left(-r\sqrt{m^2-\varepsilon^2}\right), \tag{35.8}$$

donde A_0 es una constante.

Como en la teoría no-relativista, los corrimientos de fase $\delta_\varkappa$ (más precisamente, las cantidades $e^{2i\delta_\varkappa}-1$) determinan la amplitud de dispersión en el campo dado (hablaremos de esto con mayor detenimiento en el § 37). No nos detendremos en examinar aquí las propiedades analíticas de estas magnitudes (cf. III, § 128). Sólo haremos notar que $e^{2i\delta_\varkappa}$, en tanto que función de la energía, como antes posee polos en los puntos que corresponden a los niveles de los estados de enlace de la partícula. El residuo de la función $e^{2i\delta_\varkappa}$ en uno de sus polos está ligado de manera determinada con el coeficiente en la expresión asintótica de la correspondiente función de onda del espectro discreto. Determinemos esta relación, que generaliza la fórmula no-relativista III (128.16). Los cálculos necesarios son del todo análogos a los que se efectuaron en III, § 128.

Derivemos las ecuaciones (35.5) respecto de la energía:

$$\left(\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}\right)'+\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}-(\varepsilon+m-U)\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}=rg,$$
$$\left(\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}\right)'-\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}+(\varepsilon-m-U)\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}=-rf.$$

Multipliquemos estas dos ecuaciones por rg y por $-rf$, respectivamente, y las dos ecuaciones (35.5) respectivamente por $-rg$ y por rf, y sumemos luego las cuatro ecuaciones miembro a miembro. Después de simplificar, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(g\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}-f\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)\right]=r^2(f^2+g^2).$$

Integremos esta igualdad respecto de r:

$$r^2\left(g\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}-f\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)=\int_0^r(f^2+g^2)\,r^2dr,$$

y pasemos luego al límite $r \to \infty$. En virtud de la condición de normalización, la

integral que aparece en el segundo miembro de la igualdad se reduce a 1. En el primer miembro, en cambio, tengamos en cuenta que las funciones f y g están ligadas en el dominio asintótico por la igualdad

$$rg=\frac{(rf)'}{\varepsilon+m}$$

(igualdad que se obtiene a partir de (35.5) prescindiendo de los términos en U y en $1/r$). El resultado que se obtiene es

$$\frac{1}{\varepsilon+m}\left[(rf)'\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}-rf\left(\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}\right)'\right]=1. \tag{35.9}$$

Esta fórmula difiere tan sólo en el coeficiente ($\varepsilon+m$ en vez de $2m$) de la fórmula no-relativista correspondiente (para la función χ). Por consiguiente, no hay necesidad de repetir todos los cálculos que seguirían y podemos escribir sin más la fórmula final válida cerca del punto $\varepsilon=\varepsilon_0$ (ε_0 es el nivel de energía):

$$e^{2i\delta_\varkappa}=(-1)^l\frac{2A_0^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m-\varepsilon_0}{m+\varepsilon_0}}, \tag{35.10}$$

donde A_0 es el coeficiente en la expresión asintótica (35.8).

PROBLEMA

Hallar la forma límite de la función de onda para pequeños valores de r en un campo tal que $U\sim r^{-s}$, $s<1$.

Solución. Para una partícula libre se tiene, cuando r es pequeño: $f\sim r^l$, $g\sim r^{l'}$, de modo que para $l<l'$ es $f\gg g$ y para $l>l'$ es $f\ll g$. Supongamos (suposición que queda confirmada por el resultado) que dicha relación se conserva válida también en el campo que estamos considerando. Si $l<l'$ (es decir, $l=j-1/2$, $\varkappa=-l-1$), en la primera de las ecuaciones (35.4) se puede prescindir del término en g, con lo cual $f\sim r^l$, como antes. De la segunda ecuación, en cambio, se deduce entonces que $g\sim rfU$, es decir, $g\sim r^{l+1-s}=r^{l'-s}$. De manera análoga se estudia el caso en que $l>l'$. El resultado que se obtiene es

para $l<l'$: $\quad f\sim r^l, \quad g\sim r^{l'-s}$;
para $l>l'$: $\quad f\sim r^{l-s}, \quad g\sim r^{l'}$.

§ 36. Movimiento en un campo de Coulomb

El estudio de las propiedades del movimiento en el caso de un campo de Coulomb, que es el más importante, lo iniciaremos investigando el comportamiento de las funciones de onda a pequeñas distancias. Para concretar, hablaremos de un campo atractivo: $U=-Z\alpha/r$*.

Para valores de r pequeños, en las ecuaciones (35.5) se puede prescindir de los términos que contienen $\varepsilon\pm m$; entonces,

* En unidades ordinarias es $U=-Ze^2/r$. Al pasar a unidades relativistas, e^2 se substituye por la magnitud sin dimensiones α.

$$(fr)' + \frac{\varkappa}{r} fr - \frac{Z\alpha}{r} gr = 0,$$

$$(gr)' - \frac{\varkappa}{r} gr + \frac{Z\alpha}{r} fr = 0.$$

Las dos funciones fr y gr intervienen en cada una de estas ecuaciones de la misma manera. Por consiguiente, buscaremos para ellas expresiones con potencias iguales de r: $fr = ar^\nu$, $gr = br^\nu$. La substitución en dichas ecuaciones nos da

$$a(\gamma + \varkappa) - bZ\alpha = 0, \quad aZ\alpha + b(\gamma - \varkappa) = 0,$$

de donde

$$\gamma^2 = \varkappa^2 - (Z\alpha)^2. \tag{36.1}$$

Supongamos que $(Z\alpha)^2 < \varkappa^2$. Entonces γ es real y, además, de los dos valores debe elegirse el positivo: la correspondiente solución o no diverge para $r = 0$ o diverge más lentamente que la otra *. Así, pues,

$$f = \frac{Z\alpha}{\gamma + \varkappa} g = \text{const} \cdot r^{-1+\gamma},$$
$$\gamma = \sqrt{\varkappa^2 - Z^2\alpha^2} = \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2}. \tag{36.2}$$

Aunque la función de onda puede también tender a infinito en $r = 0$ (si $\gamma < 1$), sin embargo, la integral de $|\psi|^2$ se conserva, claro está, convergente.

Si $(Z\alpha)^2 > \varkappa^2$, ambos valores de γ en (36.2) son imaginarios. Las correspondientes soluciones oscilan cuando $r \to 0$ (como $r^{-1} \cos [|\gamma| \ln r]$), lo que corresponde de nuevo, conforme se explicó antes, a la situación inadmisible en la teoría relativista de « caída hacia el centro ». Dado que $\varkappa^2 \geqslant 1$, esto significa que un campo puramente de Coulomb se puede estudiar mediante la teoría de Dirac tan sólo si $Z\alpha < 1$, es decir, si $Z < 137$.

En el caso real del movimiento en el campo de un núcleo, la marcha del potencial a pequeñas distancias difiere del campo de Coulomb debido al tamaño finito del núcleo. Esto conduce a la posibilidad, en principio, de que existan núcleos con valores mayores de Z **.

Hay que hacer observar también que, incluso en el caso de una carga puntual, la marcha del potencial a pequeñas distancias se ve alterada debido a las correcciones por radiación, lo que también puede modificar el resultado. Sin embargo, el papel de tales correcciones para valores de $Z\alpha$ próximos a 1 no se ha estudiado todavía.

Pasemos ahora a la solución exacta de la ecuación de onda (*G. Darwin*, 1928; *W. Gordon*, 1928).

---

* La elección de una solución que diverja menos rápidamente se puede justificar considerando un potencial « cortado » a cierto radio r_0 y pasando luego al límite $r_0 \to 0$, de manera análoga a como se procedió en III, § 35.

** El estudio de esta cuestión en el caso de potenciales « cortados » puede verse en el artículo de I. Pomeranchuk e Ia. Smorodinskiĭ, *J. Phys. USSR* **9**, 97 (1945).

a) *Espectro discreto* ($\varepsilon < m$). Para las funciones f y g buscaremos expresiones de la forma

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m+\varepsilon}\, e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 + Q_2), \\ g &= -\sqrt{m-\varepsilon}\, e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \tag{36.3}$$

donde se han introducido las notaciones

$$\rho = 2\lambda r, \qquad \lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}, \qquad \gamma = \sqrt{\varkappa^2 - Z^2\alpha^2}. \tag{36.4}$$

Esta forma resulta natural teniendo en cuenta el comportamiento ya conocido de las funciones cuando $\rho \to 0$ (36.2) y su disminución exponencial ($\sim e^{-\rho/2}$) para $\rho \to \infty$. Dado que cuando $\rho \to \infty$ las funciones f y g deben comportarse asintóticamente de la misma manera, es de esperar que para $\rho \to \infty$ se tendrá $Q_1 \gg Q_2$.

Substituyendo (36.3) en (35.4), obtendremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\rho (Q_1 + Q_2)' + (\gamma + \varkappa)(Q_1 + Q_2) - \rho Q_2 + Z\alpha \sqrt{\frac{m-\varepsilon}{m+\varepsilon}} (Q_1 - Q_2) = 0, \\ &\rho (Q_1 - Q_2)' + (\gamma - \varkappa)(Q_1 - Q_2) + \rho Q_2 - Z\alpha \sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}} (Q_1 + Q_2) = 0 \end{aligned}$$

(el apóstrofo simboliza la derivación respecto de ρ). Su suma y su diferencia dan

$$\begin{aligned} \rho Q_1' + \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 + \left(\varkappa - \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) Q_2 &= 0, \\ \rho Q_2' + \left(\gamma + \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} - \rho\right) Q_2 + \left(\varkappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) Q_1 &= 0, \end{aligned} \tag{36.5}$$

o bien, después de eliminar Q_1 o Q_2,

$$\begin{aligned} \rho Q_1'' + (2\gamma + 1 - \rho) Q_1' - \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 &= 0, \\ \rho Q_2'' + (2\gamma + 1 - \rho) Q_2' - \left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_2 &= 0 \end{aligned}$$

[hay que tener en cuenta que $\gamma^2 - (Z\alpha\varepsilon/\lambda)^2 = \varkappa^2 - (Z\alpha m/\lambda)^2$]. La solución de estas ecuaciones, finita para $\rho = 0$, es:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda},\ 2\gamma + 1,\ \rho\right), \\ Q_2 &= BF\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda},\ 2\gamma + 1,\ \rho\right), \end{aligned} \tag{36.6}$$

donde $F(\alpha, \beta, z)$ es la función hipergeométrica degenerada. Haciendo en cualquiera de las ecuaciones (36.5) $\rho = 0$, se encuentra la relación entre las constantes A y B:

$$B = -\frac{\gamma - \dfrac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}}{\varkappa - \dfrac{Z\alpha m}{\lambda}} A. \tag{36.7}$$

Las dos funciones hipergeométricas que aparecen en (36.6) deben reducirse a polinomios (de lo contrario crecerían como e^{ρ} cuando $\rho \to \infty$, y con ellas crecería como $e^{\rho/2}$ también la función de onda total). La función $F(\alpha, \beta, z)$ se reduce a un polinomio si el parámetro α es igual a un número entero negativo o a cero. Hagamos

$$\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} = -n_r. \tag{36.8}$$

Si $n_r = 1, 2, \ldots$, ambas funciones hipergeométricas se reducen a polinomios. Pero si $n_r = 0$, se reduce a un polinomio tan sólo una de ellas. Ahora bien, la igualdad $n_r = 0$ significa que $\gamma = Z\alpha\varepsilon/\lambda$ y entonces, como se comprueba fácilmente, se tiene $Z\alpha m/\lambda = |\varkappa|$. Si $\varkappa < 0$, el coeficiente B (36.7) se anula, de modo que $Q_2 = 0$ y no se viola la condición impuesta. Pero si $\varkappa > 0$, será $B = -A$ y Q_2 es una función que diverge para $n_r = 0$. Así, pues, son admisibles los siguientes valores del número cuántico n_r:

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \ldots & \text{para } \varkappa < 0; \\ 1, 2, 3, \ldots & \text{para } \varkappa > 0. \end{cases} \tag{36.9}$$

De la definición (36.8) se deduce ahora la expresión siguiente para los niveles de energía discretos:

$$\frac{\varepsilon}{m} = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(\sqrt{\varkappa^2 - (Z\alpha)^2} + n_r)^2}\right]^{-1/2}. \tag{36.10}$$

Cuando $Z\alpha \ll 1$ los primeros términos del desarrollo de esta fórmula dan

$$\frac{\varepsilon}{m} - 1 = -\frac{(Z\alpha)^2}{2(|\varkappa| + n_r)^2}\left\{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{|\varkappa| + n_r}\left[\frac{1}{|\varkappa|} - \frac{3}{4(|\varkappa| + n_r)}\right]\right\}.$$

Haciendo $n_r + |\varkappa| = n\,(= 1, 2, \ldots)$ y observando que $|\varkappa| = j + 1/2$, volvemos a la fórmula (34.4) que habíamos obtenido antes mediante la teoría de perturbaciones. Como se indicó ya al final del § 34, los términos de este desarrollo que siguen carecen de sentido porque, sin duda alguna, quedan mayorados por las correcciones radiativas. La fórmula (36.10), sin embargo, tiene sentido en su forma exacta para $Z\alpha \sim 1$. Observemos que la degeneración doble de los niveles que se advierte en la fórmula aproximada (34.4) se conserva también en la fórmula exacta: dado que en ella interviene solamente $|\varkappa|$, los niveles con distintos l para un mismo valor de j coinciden, como antes.

En la función de onda nos queda por determinar el coeficiente de normalización A. Como siempre, la función de onda del espectro discreto debe normalizarse por la condición $\int |\psi|^2 dV = 1$; para las funciones f y g esto equivale a la condición

$$\int_0^{\infty} (f^2 + g^2)\, r^2\, dr = 1.$$

La manera más simple de hallar A consiste en acudir a la forma asintótica de las

funciones para $r \to \infty$. Mediante la fórmula asintótica

$$F(-n_r,\ 2\gamma+1,\ \rho) \approx \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)}(-\rho)^{n_r}$$

[véase III (d, 14)] se encuentra

$$f \approx (-1)^{n_r} A \sqrt{m+\varepsilon}\, \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)}\, e^{-\lambda r}(2\lambda r)^{\gamma+n_r-1}.$$

Comparando esta fórmula con la expresión (36.22), que se obtendrá más adelante, resulta

$$A = \frac{\lambda^2}{\Gamma(2\gamma+1)}\left[\frac{2\Gamma(2\gamma+1+n_r)\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\varkappa\right)}{Z\alpha m^2 \cdot n_r!}\right]^{1/2}$$

Reuniendo las fórmulas obtenidas, escribiremos las expresiones finales completas de las funciones de onda normalizadas:

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \frac{\pm(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma+1)}\left[\frac{(m\pm\varepsilon)\,\Gamma(2\gamma+n_r+1)}{4m\,\frac{Z\alpha m}{\lambda}\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\varkappa\right) n_r!}\right]^{1/2}(2\lambda r)^{\gamma-1}e^{-\lambda r}\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\varkappa\right)F(-n_r,\ 2\gamma+1,\ 2\lambda r) \mp n_r F(1-n_r,\ 2\gamma+1,\ 2\lambda r)\right\} \quad (36.11)$$

(los signos superiores se refieren a f, y los inferiores, a g).

b) *Espectro continuo* ($\varepsilon > m$). No es necesario resolver de nuevo la ecuación de onda para los estados del espectro continuo. Las funciones de onda que corresponden a este caso se obtienen a partir de las funciones del espectro discreto mediante el cambio*

$$\sqrt{m-\varepsilon} \to -i\sqrt{\varepsilon-m},\quad \lambda \to -ip,\quad -n_r \to \gamma - i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p} \quad (36.12)$$

(acerca de la elección del signo en la prolongación analítica de la raíz $\sqrt{m-\varepsilon}$, véase III, § 128). Sin embargo, hay que efectuar de nuevo la normalización de las funciones.

Aplicando en (36.11) la substitución indicada, representaremos las funciones f y g en la forma

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon+m} \\ i\sqrt{\varepsilon-m} \end{matrix}\right\} \cdot A' e^{ipr}(2pr)^{\gamma-1}\times$$
$$\times\left[e^{i\xi}F(\gamma-i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr) \mp e^{-i\xi}F(\gamma+1-i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr)\right],$$

donde A' es una nueva constante de normalización y se han introducido las notaciones

---

* En lo que sigue de este párrafo p significa $|\boldsymbol{p}| = \sqrt{\varepsilon^2-m^2}$.

$$\nu = \frac{Z\alpha\varepsilon}{p}, \quad e^{-2i\xi} = \frac{\gamma - i\nu}{\varkappa - i\nu\dfrac{m}{\varepsilon}} \tag{36.13}$$

[la cantidad ξ es real, dado que $\gamma^2 + (Z\alpha\varepsilon/p)^2 = \varkappa^2 + (Z\alpha m/p)^2$].

Según la conocida fórmula

$$F(\alpha,\ \beta,\ z) = e^z F(\beta - \alpha,\ \beta,\ -z)$$

[véase III (d,10)], tenemos

$$F(\gamma + 1 - i\nu,\ 2\gamma + 1,\ -2ipr) = e^{-2ipr} F(\gamma + i\nu,\ 2\gamma + 1,\ 2ipr) = \\ = e^{-2ipr} F^*(\gamma - i\nu,\ 2\gamma + 1,\ -2ipr).$$

Por ello,

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2iA'\sqrt{\varepsilon \pm m}\,(2pr)^{\gamma-1} \begin{matrix} \mathrm{Im} \\ \mathrm{Re} \end{matrix} \left\{ e^{i(pr+\xi)} F(\gamma - i\nu,\ 2\gamma + 1,\ -2ipr) \right\}. \tag{36.14}$$

La expresión asintótica de estas funciones se obtiene mediante la fórmula III (d, 14), en la cual para el presente caso importa solamente el primer término (el segundo disminuye según una potencia mayor de $1/r$)*:

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2iA'\sqrt{\varepsilon \pm m}\,\Gamma(2\gamma + 1)(2pr)^{\gamma-1} \begin{matrix} \mathrm{Im} \\ \mathrm{Re} \end{matrix} \left\{ \frac{(2ipr)^{-\gamma + i\nu} e^{i(pr+\xi)}}{\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)} \right\} = \\ = \frac{iA'\sqrt{\varepsilon + m}}{pr} e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{|\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)|} \begin{matrix} \mathrm{sen} \\ \cos \end{matrix} \left(pr + \delta_\varkappa + \nu \ln 2pr - \frac{\pi l}{2} \right), \tag{36.15}$$

donde

$$\delta_\varkappa = \xi - \arg\Gamma(\gamma + 1 + i\nu) - \frac{\pi\gamma}{2} + \frac{\pi l}{2}, \tag{36.16}$$

o bien

$$e^{2i\delta_\varkappa} = \frac{\varkappa - i\nu m/\varepsilon}{\gamma - i\nu} \frac{\Gamma(\gamma + 1 - i\nu)}{\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \tag{36.17}$$

Para futuras referencias, haremos notar que la expresión de las fases en el caso relativista límite ($\varepsilon \gg m$, $\nu \approx Z\alpha$) es:

$$e^{2i\delta_\varkappa} = \frac{\varkappa}{\gamma - iZ\alpha} \frac{\Gamma(\gamma + 1 - iZ\alpha)}{\Gamma(\gamma + 1 + iZ\alpha)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \tag{36.18}$$

La comparación de (36.15) con la fórmula general (36.7) para la onda esférica normalizada [teniendo en cuenta la definición de las funciones f y g según (35.1)] permite determinar la constante de normalización A':

$$\frac{iA'}{p} e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{|\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)|} = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}.$$

* Como en el caso de la ecuación de Schrödinger, la lentitud con que decrece el potencial de Coulomb conduce a una variación de la fase de la onda, que resulta ser una función lentamente variable de r.

De esta manera obtenemos la siguiente expresión final de las funciones de onda del espectro continuo*:

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\frac{m \pm \varepsilon}{\pi\varepsilon}}\, e^{\frac{\pi\nu}{2}} \frac{|\Gamma(\gamma+1+i\nu)|}{\Gamma(2\gamma+1)} \frac{(2pr)^\gamma}{r} \times$$
$$\times \operatorname{\begin{matrix}\mathrm{Im}\\ \mathrm{Re}\end{matrix}} \left\{ e^{i(pr+\xi)} F(\gamma - i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr) \right\}. \qquad (36.19)$$

En la prolongación analítica al dominio $\varepsilon < m$ la expresión (36.17) toma la forma

$$e^{2i\delta_\varkappa} = \frac{\varkappa - Z\alpha m/\lambda}{\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda} \frac{\Gamma(\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda)}{\Gamma(\gamma+1+Z\alpha\varepsilon/\lambda)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \qquad (36.20)$$

Esta función tiene polos en los puntos en los que $\gamma + 1 - Z\alpha\varepsilon/\lambda = 1 - n_r$, $n_r = 1, 2, \ldots$ (polos de la función Γ en el numerador), y también en el punto $\gamma - Z\alpha\varepsilon = -n_r = 0$ (si, además, $\varkappa < 0$); como debía ser, estos puntos coinciden con los niveles discretos de energía.

Cerca de uno cualquiera de los polos con $n_r \neq 0$ se tiene

$$e^{2i\delta_\varkappa} \approx \frac{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - \varkappa\right) e^{i\pi(l-\gamma)}}{n_r \Gamma(2\gamma+1+n_r)} \Gamma\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right).$$

La forma de la función Γ en el entorno de uno de sus polos se halla mediante la conocida fórmula $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\operatorname{sen}\pi z$:

$$\Gamma\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \approx \frac{\pi}{\Gamma(n_r)\operatorname{sen}\pi(\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda)},$$
$$\operatorname{sen}\pi\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \approx \pi\cos\pi n_r \cdot \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)\cdot(\varepsilon-\varepsilon_0) =$$
$$= (-1)^{n_r} \frac{\pi Z\alpha m^2}{\lambda^3}(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

(ε_0 es el nivel de energía). De esta manera**.

$$e^{2i\delta_\varkappa} \approx (-1)^{l+n_r} \frac{e^{-i\pi\gamma}\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - \varkappa\right)}{n_r!\,\Gamma(2\gamma+1+n_r)} \frac{\lambda^3}{Z\alpha m^2} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \qquad (36.21)$$

Al final del párrafo que precede se obtuvo una fórmula que liga el residuo de la función $e^{2i\delta_\varkappa}$ en un polo con el coeficiente de la expresión asintótica de la función de onda del correspondiente estado de enlace. En el caso de un campo de Coulomb, sin embargo, esta fórmula (35.10) debe cambiarse un poco de forma debido a que, en vez del corrimiento de fase constante $\delta_\varkappa$ [como ocurría en (35.7)], en (36.15) aparece la suma $\delta_\varkappa + \nu \ln(2pr)$. En el primer miembro de (35.10) hay que escribir, por ello, no $e^{2i\delta_\varkappa}$, sino

---

* Las funciones de onda para el caso de un campo repulsivo se obtienen cambiando el signo de $Z\alpha$, es decir, cambiando el signo de ν.

** Es fácil cerciorarse de que esta fórmula se conserva válida también en el caso en que $n_r = 0$.

$$\exp(2i\delta_\varkappa + 2i\nu \ln 2pr) \to e^{2i\delta_\varkappa}(2i\lambda r)^{\pm(n_r+\gamma)}.$$

Utilizando (36.21) y determinando a partir de (35.10) el coeficiente A_0 (que será ahora una función potencial de r), se encuentra la forma asintótica de la función de onda normalizada del espectro discreto:

$$f = \left[\frac{(Z\alpha m/\lambda - \varkappa)(m+\varepsilon)\lambda^2}{2n_r!\, Z\alpha m^2 \Gamma(2\gamma+1+n_r)}\right]^{1/2}(2\lambda r)^{n_r+\gamma}\frac{e^{-\lambda r}}{r}. \tag{36.22}$$

Esta fórmula se utilizó ya para determinar el coeficiente en (36.11).

§ 37. Dispersión en un campo con simetría esférica

Escribamos la expresión asintótica de la función de onda que representa la dispersión de partículas en el campo de un centro de fuerzas inmóvil en la forma *

$$\psi = u_{\varepsilon p}e^{ipz} + u'_{\varepsilon' p'}\frac{e^{ipr}}{r}. \tag{37.1}$$

Aquí $u_{\varepsilon p}$ es la amplitud bispinorial de la onda plana incidente. En cambio, el bispinor $u'_{\varepsilon p'}$ es función de la dirección de dispersión $\boldsymbol{n}'$ y para cada valor dado de $\boldsymbol{n}'$ su forma coincide (¡pero, naturalmente, no en la normalización!) con la amplitud bispinorial de una onda plana que se propaga en la dirección $\boldsymbol{n}'$.

Vimos en el § 24 que la amplitud bispinorial de la función de onda queda por completo determinada dando una magnitud de dos componentes — el espinor tridimensional w, que representa la función de onda no-relativista en el sistema de reposo de la partícula. En función de este espinor se expresa también la densidad de corriente: ésta es proporcional a w^*w (con un coeficiente de proporcionalidad que depende solamente de la energía ε y que, por ello, es el mismo para las partículas incidentes y dispersadas). En consecuencia, la sección eficaz de dispersión vale $d\sigma = (w'^*w'/w^*w)d\sigma$ o bien, si (como en el § 24) se normaliza la onda incidente mediante la condición $w^*w = 1$,

$$d\sigma = w'^*w'\,d\sigma.$$

Introduzcamos el operador de dispersión f mediante la definición

$$w' = \mathrm{f}w. \tag{37.2}$$

Debido al hecho de que las magnitudes w, w' poseen dos componentes, el operador así definido es por completo análogo al operador amplitud de dispersión que aparece en la teoría no-relativista de la dispersión cuando se tiene en cuenta el spin (III, § 138). Por lo tanto, se pueden aplicar directamente aquí las fórmulas que se obtuvieron y que expresan el operador como función de los corrimientos de fase de las funciónes de onda en el campo dispersor. Únicamente es necesario efectuar

* En los §§ 37, 38 p designa a $|\boldsymbol{p}|$ y como subíndices de la amplitudes escribimos ε y $\boldsymbol{p}$ por separado.

algunos cambios de notación para estas fases expresando los corrimientos δ_l^+ y δ_l^- introducidos en III, § 138, mediante los corrimientos de fase $\delta_\varkappa$ que figuran en la fórmula relativista (35.7). Recordaremos que las fases δ_l^+ y δ_l^- se refieren a estados cuyo momento cinético orbital es l y con momento total $j = l + 1/2$ y $j = l - 1/2$. De acuerdo con la definición (35.3), se tiene $\varkappa = -l - 1$ para $j = l + 1/2$ y $\varkappa = l$ para $j = l - 1/2$. Por consiguiente, el cambio de notación que debemos efectuar es

$$\delta_l^+ \to \delta_{-(l+1)}, \quad \delta_l^- \to \delta_l$$

(¡y recordar que el índice en δ significa ahora el valor del número $\varkappa$!). De esta manera obtendremos las siguientes fórmulas:

$$\mathrm{f} = A + B\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{37.3}$$

$$A = \frac{1}{2ip}\sum_{l=0}^{\infty}[(l+1)(e^{2i\delta_{-l-1}} - 1) + l(e^{2i\delta_l} - 1)]\, P_l(\cos\theta)], \tag{37.4}$$

$$B = \frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{\infty}(e^{2i\delta_{-l-1}} - e^{2i\delta_l})\, P_l^1(\cos\theta), \tag{37.5}$$

donde $\mathbf{v} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}'$.

Dado que w es la función de onda espinorial en el sistema de reposo, también las propiedades de polarización de la dispersión se describen en función de f mediante las mismas fórmulas que en III, § 138.

En el caso de un campo coulombiano resulta posible expresar las dos funciones $A(\theta)$ y $B(\theta)$ en términos de una sola función. Indicaremos sucintamente la marcha de los correspondientes cálculos*.

Para el campo de Coulomb las fases $\delta_\varkappa$ vienen dadas por las fórmulas (36.17) que escribiremos en la forma

$$\begin{aligned} e^{2i\delta_\varkappa} &= -\left(\varkappa - i\frac{Ze^2m}{p}\right)\frac{\varkappa}{|\varkappa|}C_\varkappa, \\ C_\varkappa &= -\frac{\Gamma(\gamma - iv)}{\Gamma(\gamma + 1 + iv)}e^{i\pi(|\varkappa| - \gamma)} \end{aligned} \tag{37.6}$$

(haremos notar que $e^{i\pi l} = e^{i\pi\varkappa}$ para $\varkappa > 0$ y $e^{i\pi l} = -e^{i\pi\varkappa}$ para $\varkappa < 0$). Con ayuda de las magnitudes introducidas de esta manera, las series (37.4-5) se pueden representar como sigue:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{p}G(\theta) - i\frac{Ze^2m}{p^2}F(\theta), \\ B(\theta) &= -\frac{i}{p}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot G(\theta) + \frac{Ze^2m}{p^2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot F(\theta), \end{aligned} \tag{37.7}$$

donde

* R. L. Gluckstern, S. R. Lin, *J. Math. Phys.* **5**, 1594 (1964).

$$G(\theta)=\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l^2 C_l (P_l+P_{l-1}), \quad F(\theta)=\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l C_l (P_l-P_{l-1}). \tag{37.8}$$

Al transformar la serie correspondiente a $B(\theta)$ se han utilizado las siguientes relaciones de recurrencia entre polinomios de Legendre:

$$P_l^1+P_{l-1}^1=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot l(P_l-P_{l-1}), \tag{37.9}$$

$$P_l^1-P_{l-1}^1=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot l(P_l+P_{l-1}). \tag{37.10}$$

Por otra parte, en virtud de la identidad

$$(1+\cos\theta)\frac{d}{d\cos\theta}[P_l(\cos\theta)-P_{l-1}(\cos\theta)]=l[P_l(\cos\theta)+P_{l-1}(\cos\theta)] \tag{37.11}$$

las funciones $F(\theta)$ y $G(\theta)$ están ligadas entre sí por la relación

$$G=(1-\cos\theta)\frac{dF}{d\cos\theta}=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\frac{dF}{d\theta}. \tag{37.12}$$

En consecuencia, tanto $A(\theta)$ como $B(\theta)$ se expresan mediante una misma función $F(\theta)$ *.

§ 38. Dispersión en el caso ultrarrelativista

Estudiemos en particular la dispersión en el caso ultrarrelativista ($\varepsilon \gg m$). En primera aproximación, se prescindirá por completo de la masa m en la ecuación de onda. Al hacerlo conviene utilizar para ψ la representación espinorial $\psi=\binom{\xi}{\eta}$, ya que las ecuaciones correspondientes a ξ y η se separan cuando $m=0$:

$$\begin{aligned} -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\xi&=(\varepsilon-U)\xi,\\ -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\eta&=-(\varepsilon-U)\eta \end{aligned} \tag{38.1}$$

(adoptando la forma « neutrínica », § 30).

La función de onda $\psi=\binom{\xi}{0}$ corresponde al estado de helicidad del electrón polarizado en la dirección y sentido de $\boldsymbol{p}$, y la función $\psi=\binom{0}{\eta}$, a la polarización opuesta al sentido de $\boldsymbol{p}$. En virtud de la separabilidad de las ecuaciones para ξ y η, es evidente que esta propiedad no varía en la dispersión. En otras palabras, la dispersión de electrones ultrarrelativistas conserva la helicidad. Por consideraciones de simetría (polarización longitudinal) es evidente que en la dispersión de partículas que poseen helicidad no existe asimetría acimutal. Cabe también afirmar que la

* La función $F(\theta)$ no se expresa en forma finita como combinación de funciones elementales. Sin embargo, resulta posible escribirla como integral doble — véase el artículo antes citado.

sección eficaz de dispersión de electrones de helicidad definida no depende del signo de la helicidad; esto se sigue del hecho de que un campo central es invariante respecto de la inversión y el signo de la helicidad se cambia en el opuesto al aplicar dicha operación.

En el caso ultrarrelativista las fórmulas (37.3-5) se pueden simplificar considerablemente (*D. R. Yennie, D. G. Ravenhall, R. N. Wilson*, 1954).

Supongamos, por ejemplo, que el electrón incidente está polarizado en el sentido y dirección del movimiento, $\boldsymbol{n}$. Para una onda plana con valor determinado de $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, el espinor $\xi[=(\varphi+\chi)/\sqrt{2}]$ es proporcional al mismo espinor tridimensional w que figuraba en la representación típica de la onda. Por ello, el vínculo entre las amplitudes espinoriales de las ondas incidente y dispersada en la nueva representación se establece como antes mediante el mismo operador f.

Como resultado de la dispersión, la polarización gira junto con el impulso, tomando la dirección $\boldsymbol{n}'$. La acción del operador f sobre la función de onda espinorial del electrón se reduce, por consiguiente, a la rotación del spin de ángulo θ (ángulo entre $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{n}'$) en torno del eje $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'$. A su vez, esta rotación es equivalente a una rotación del sistema de coordenadas en torno del mismo eje y en sentido opuesto, es decir, a una rotación de ángulo $-\theta$. De aquí se sigue que el operador f debe coincidir (salvo un coeficiente) con el operador que transforma la función de onda de acuerdo con el cambio del sistema de coordenadas, es decir, con el operador (18.17), en el que se ha substituido $\theta\to-\theta$. Comparando (37.3) con (18.17), se encuentra que debe tenerse

$$\frac{B}{A}=-i\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}. \tag{38.2}$$

Así, pues, en el límite ultrarrelativista

$$f=A(\theta)\left[1-i\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]. \tag{38.3}$$

La expresión (37.4) para $A(\theta)$ puede también simplificarse si se utiliza la relación que resulta, en este mismo límite, entre las fases $\delta_\varkappa$ y $\delta_{-\varkappa}$. Para deducirla observemos que las ecuaciones (35.4) para las funciones f y g pasan a ser invariantes, una vez suprimidos los términos en m, respecto de la substitución

$$\varkappa\to-\varkappa,\qquad f\to g,\qquad g\to -f,$$

en la que no intervienen los parámetros ni de la propia partícula ni del campo. Por consiguiente, ha de ser $f_\varkappa/g_\varkappa=-g_{-\varkappa}/f_{-\varkappa}$ y una vez substituidas las expresiones asintóticas se encuentra

$$\mathrm{tg}\left(pr-\frac{l\pi}{2}+\delta_\varkappa\right)=-\,\mathrm{ctg}\left(pr-\frac{l'\pi}{2}+\delta_{-\varkappa}\right),$$

$$\delta_\varkappa=\delta_{-\varkappa}-(l'-l)\frac{\pi}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

de donde

$$e^{2i\delta_\varkappa} = e^{2i\delta_{-\varkappa}}. \tag{38.4}$$

Utilizando esta relación [y cambiando en el primer término de la suma en (37.4) el índice de sumación l por $l-1$], obtendremos*:

$$A(\theta) = \frac{1}{2ip}\sum_{l=1}^{\infty} l(e^{2i\delta_l} - 1)[P_l(\cos\theta) + P_{l-1}(\cos\theta)]. \tag{38.5}$$

De (38.2) se sigue que $\mathrm{Re}(AB^*) = 0$. Esto significa que, en la aproximación considerada, la sección eficaz no depende de la polarización inicial de las partículas y que un haz no polarizado sigue siendo no polarizado también después de la dispersión [véase las fórmulas III (138.7-9)]. Observemos asimismo que cuando $\theta \to \pi$ la expresión (38.5) de $A(\theta)$ tiende a cero como $(\pi - \theta)^2$ [recordaremos que $P_l(-1) = (-1)^l$]. Junto con ella tiende también a cero la sección eficaz

$$\frac{d\sigma}{do} = |A|^2 + |B|^2 = \frac{|A(\theta)|^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}. \tag{38.6}$$

Las propiedades que acabamos de citar desaparecen, naturalmente, en las aproximaciones siguientes respecto de la pequeña cantidad m/ε. En particular, demuestra el análisis que cuando $\theta \to \pi$ la sección eficaz tiende a un límite que es proporcional a $(m/\varepsilon)^2$.

Para un campo de Coulomb en el caso ultrarrelativista, las fases $\delta_\varkappa$ no dependen de la energía, como puede verse en (36.18)**. Por ello, en un campo puramente coulombiano la sección eficaz de dispersión para $\varepsilon \gg m$ tiene la forma

$$d\sigma = \frac{\tau(\theta)}{\varepsilon^2}\, do, \tag{38.7}$$

donde τ es función solamente del ángulo.

§ 39. Sistema de funciones de onda del espectro continuo para la dispersión en un campo coulombiano

Más adelante (§ 93) se estudiarán los diferentes procesos inelásticos que ocurren en la dispersión de electrones ultrarrelativistas en el campo de un núcleo pesado ($Z\alpha \sim 1$). Para calcular los correspondientes elementos de matriz necesitaremos funciones de onda cuya forma asintótica (para $r \to \infty$) resulta de la superposición de una onda plana y una onda esférica.

---

* Una transformación análoga de la fórmula (37.5) permite de nuevo obtener la relación (38.2). Al hacerlo hay que utilizar la relación de recurrencia (37.10) entre polinomios de Legendre.

** Esto se ve también directamente a partir de las ecuaciones (38.1), ya que para un campo de Coulomb la energía ε se puede eliminar de las ecuaciones por completo mediante la substitución $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'/\varepsilon$.

Veremos que, en el caso ultrarrelativista (energía del electrón $\varepsilon \gg m$), el papel principal en la dispersión lo representan las transferencias de impulso (del electrón al núcleo) $q = |\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}| \sim m$. A estos valores de q corresponden «parámetros de impacto» $\rho \sim 1/q \sim 1/m$ y el electrón se desvía de un ángulo *

$$\theta \sim \frac{q}{p} \sim \frac{m}{\varepsilon}. \tag{39.1}$$

En términos de las coordenadas r (distancia al centro) y $z = r\cos\theta$, esto corresponde al dominio

$$\rho \equiv r \operatorname{sen}\theta \sim \frac{1}{m}, \quad p(r - z) = pr(1 - \cos\theta) \sim 1. \tag{39.2}$$

Además, $r \sim \varepsilon/m^2$, es decir, nos encontramos en el caso en que las distancias que intervienen son grandes.

Escribamos la ecuación de Dirac en la forma

$$(\varepsilon - U - m\beta + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\psi = 0, \qquad U = -\frac{Z\alpha}{r}. \tag{39.3}$$

Transformémosla en una ecuación de segundo orden, para lo cual aplicaremos a (39.3) el operador $(\varepsilon - U + m\beta - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)$:

$$(\Delta + p^2 - 2\varepsilon U)\psi = (-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla U - U^2)\psi. \tag{39.4}$$

Dado que en la región considerada es $r \gg Z\alpha/\varepsilon$, se tendrá $U \ll \varepsilon$. En primera aproximación se puede prescindir del segundo miembro en (39.4). Queda así la ecuación

$$\left(\Delta + p^2 + \frac{2\varepsilon Z\alpha}{r}\right)\psi = 0 \tag{39.5}$$

que coincide formalmente con la ecuación no-relativista de Schrödinger correspondiente a un campo coulombiano

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta + \frac{p^2}{2m} + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi = 0, \tag{39.5a}$$

de la cual difiere únicamente en un cambio evidente en la designación de los parámetros (la «energía potencial» contiene un factor ε/m de más). Por ello, podemos escribir inmediatamente la solución de la misma que posee la forma asintótica impuesta (véase III, § 134).

Así, la función de onda que contiene asintóticamente una onda plana ($\sim e^{ipr}$) y una onda esférica divergente es:

$$\psi_{\varepsilon\boldsymbol{p}}^{(+)} = C\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr} F\left(\frac{iZ\alpha\varepsilon}{p},\ 1,\ i(pr - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\right), \tag{39.6}$$

* En este párrafo p representa $|\boldsymbol{p}|$.

$$C = e^{\pi Z\alpha\varepsilon/2p}\Gamma\left(1 - i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p}\right),$$

donde F es la función hipergeométrica degenerada y $u_{\varepsilon p}$ la amplitud bispinorial constante de la onda plana normalizada por la condición que hemos adoptado (23.4)

$$\bar{u}_{\varepsilon p}\, u_{\varepsilon p} = 2m. \tag{39.7}$$

La función de onda (39.6) está normalizada de tal manera que la onda plana contenida en su expresión asintótica tiene la forma ordinaria

$$\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ip\cdot r},$$

correspondiente a « una partícula por unidad de volumen ». Dado que en el caso ultrarrelativista se tiene $p \approx \varepsilon$, en (39.6) se puede aplicar la substitución $Z\alpha\varepsilon/p \approx Z\alpha$:

$$\psi^{(+)}_{\varepsilon p} = C\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr} F\,(iZ\alpha,\ 1,\ i\,(pr - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})), \tag{39.8}$$

$$C = e^{Z\alpha\pi/2}\Gamma\,(1 - iZ\alpha).$$

Hay que prestar atención al hecho de que a pesar de que consideramos distancias tan grandes que $pr \gg 1$, es imposible substituir en (39.8) la función hipergeométrica por su expresión asintótica: el argumento de la función F es no pr, sino la cantidad $pr(1 - \cos\theta)$ que no suponemos sea grande *.

En las aplicaciones resulta también necesaria la siguiente aproximación para ψ, cuya estructura espinorial es diferente de la de (39.8) (que se reduce al factor $u_{\varepsilon p}$). Para calcularla, escribamos ψ en la forma

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr}\,(u_{\varepsilon p} F + \varphi).$$

En el segundo miembro de la ecuación (39.4) conservaremos ahora el término que contiene la primera potencia de U, y para la función φ obtenemos la ecuación

$$(\Delta + 2i\boldsymbol{p}\cdot\nabla - 2\varepsilon U)\,\varphi = -iu_{\varepsilon p}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla U. \tag{39.9}$$

Su solución se puede hallar observando que la función F satisface la ecuación

$$(\Delta + 2i\boldsymbol{p}\cdot\nabla - 2\varepsilon U)\,F = 0$$

[lo que cabe comprobar substituyendo (39.6) en (39.5)]. Aplicando a esta ecuación el operador ∇, se obtendrá

$$(\Delta + 2i\boldsymbol{p}\cdot\nabla - 2\varepsilon U)\,\nabla F = 2\varepsilon F\nabla U.$$

Comparando con la ecuación (39.3), se encuentra

* En III, § 133, nos interesaban los valores de r arbitrariamente grandes, por lo cual dicha substitución fue entonces posible para ángulos cualesquiera θ.

$$\varphi = -\frac{i}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\, u_{\varepsilon p} F.$$

Escribamos la expresión final para $\psi^{(+)}$, y para la función $\psi^{(-)}$ que contiene en su expresión asintótica una onda esférica convergente:

$$\psi^{(+)}_{\varepsilon p} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\cdot\nabla\right) F(iZ\alpha,\ 1,\ i(pr - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}))\, u_{\varepsilon p},$$

$$\psi^{(-)}_{\varepsilon p} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\cdot\nabla\right) F(-iZ\alpha,\ 1,\ -i(pr + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}))\, u_{\varepsilon p},$$

$$C = e^{\pi Z\alpha/2}\Gamma(1 - iZ\alpha) \qquad (39.10)$$

(*W. H. Furry*, 1934). Escribamos también las funciones análogas ($\psi_{-\varepsilon -\boldsymbol{p}}$) con « frecuencia negativa » que son necesarias al estudiar los procesos en los que participan positones. Es posible obtenerlas a partir de las funciones $\psi_{\varepsilon \boldsymbol{p}}$ mediante la substitución $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, en la que $p = |\boldsymbol{p}|$ no cambia [en virtud de esta última circunstancia el parámetro $iZ\alpha$ de la función hipergeométrica cambia de signo, como puede verse considerando la expresión de partida (39.6) en la que este parámetro figura en la forma $iZ\alpha\varepsilon/p$]. De esta manera se obtiene

$$\psi^{(+)}_{-\varepsilon -p} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\cdot\nabla\right) F(-iZ\alpha,\ 1,\ i(pr + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}))\, u_{-\varepsilon -p},$$

$$\psi^{(-)}_{-\varepsilon -p} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\cdot\nabla\right) F(iZ\alpha,\ 1,\ -i(pr - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}))\, u_{-\varepsilon -p},$$

$$C = e^{-\pi Z\alpha/2}\Gamma(1 + iZ\alpha). \qquad (39.11)$$

Acerca de los cálculos que acabamos de efectuar hay que hacer todavía la siguiente observación. La condición asintótica que hemos impuesto no basta de suyo en modo alguno para fijar de manera unívoca la solución de la ecuación de onda (esto es claro aunque sólo sea por el hecho de que siempre es posible añadir a ψ, sin violar dicha condición, una onda coulombiana esférica divergente arbitraria). Cuando escribimos la solución de la ecuación (39.5) en la forma (39.6) suponemos tácitamente que se elige la solución que es finita para $r = 0$. Esta condición era necesaria en III, §§ 133, 134, donde se consideraban soluciones de la ecuación de Schrödinger exacta válidas en todo el espacio *. En el presente caso, en cambio, la ecuación (39.5) se refiere solamente a distancias grandes y, por lo tanto, el haber elegido precisamente esta solución requiere una fundamentación adicional.

Ésta la proporciona el hecho de que a « grandes parámetros de impacto » $\rho = r \operatorname{sen}\theta$ corresponden grandes momentos orbitales l y pequeños ángulos de dispersión θ: cuando $\rho \sim 1/m$, se tiene

$$l \sim \rho p \sim \rho\varepsilon \sim \frac{\varepsilon}{m} \gg 1,$$

* En el comportamiento de la solución expuesto en III, § 133, esta condición quedaba garantizada por la elección de la integral particular de la forma (133.1), en vez de la suma general de las integrales con diferentes valores β_1, β_2.

y el ángulo θ se puede estimar de manera cuasiclásica:

$$\theta \sim \frac{1}{p}\int \frac{dU}{dr}\,dt \sim \frac{U'(\rho)\,\rho}{p} \sim \frac{m}{\varepsilon} \ll 1 .$$

Esto significa que en el desarrollo de ψ en ondas esféricas figurarán (en el dominio considerado de r y θ) en esencia ondas con los grandes valores de l indicados. Pero una onda esférica con l grande disminuye ciertamente hasta alcanzar pequeños valores cuando se acerca al origen de coordenadas a distancias $r \ll l/\varepsilon$ que son « clásicamente inalcanzables » (debido a la barrera centrífuga). Por lo tanto, si se « empalma » la solución de la ecuación (39.5) con la solución de la ecuación exacta (39.4) a pequeñas distancias con $r \sim r_1$, donde $l/\varepsilon \gg r_1 \gg Z\alpha/\varepsilon$, la condición de contorno para la solución de la ecuación (39.5) consistirá en imponerle el que sea pequeña, con lo cual queda justificada la elección que hicimos.

PROBLEMA

Para un campo atractivo de Coulomb con $Z\alpha \ll 1$ hallar la corrección (de orden relativo $\sim Z\alpha$) que hay que aplicar a una función de onda no-relativista del espectro discreto.

Solución. La velocidad del electrón en un estado de enlace es $v \sim Z\alpha$, de modo que, para $Z\alpha \ll 1$, en la aproximación de orden cero la función de onda es no-relativista, es decir,

$$\psi = u\psi_{\text{nor}},$$

donde ψ_{nor} es la función de Schrödinger, u un bispinor de la forma $u = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ y w es un espinor que describe el estado de polarización del electrón. En la aproximación siguiente escribimos: $\psi = u\psi_{\text{nor}} + \psi^{(1)}$ y substituyendo en (39.4), encontraremos para $\psi^{(1)}$ la ecuación

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta - |\,\varepsilon_n\,| + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi^{(1)} = i\frac{Z\alpha}{2m}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(\boldsymbol{\alpha}u)\,\psi_{\text{nor}},$$

donde ε_n es el nivel discreto no-relativista de energía. Se ha prescindido aquí de términos del orden de $\sim (Z\alpha)^2$ (hay que tener en cuenta que en el caso no-relativista las distancias fundamentales son del orden del radio de la órbita de Bohr: $r \sim 1/mZ\alpha$). La solución de esta ecuación es $\psi^{(1)} = -\frac{i}{2m}\boldsymbol{\alpha}\cdot u\nabla\psi_{\text{nor}}$, de modo que

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\right)u\psi_{\text{nor}}.$$

§ 40. Un electrón en el campo de una onda electromagnética plana

La ecuación de Dirac se puede resolver exactamente en el caso de un electrón que se mueve en el campo de una onda plana electromagnética (*D. M. Volkov*, 1937).

El campo de una onda plana con 4-vector de onda k ($k^2 = 0$) depende de las 4-coordenadas tan sólo a través de la combinación $\varphi = kx$, de modo que el 4-potencial es

$$A^\mu = A^\mu(\varphi), \tag{40.1}$$

y satisface además la condición de contraste de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^\mu$$

(el apóstrofo simboliza la derivación respecto de φ). Dado que un término constante en A carece de importancia, en esta condición podemos prescindir del apóstrofo y escribirla en la forma

$$kA = 0. \tag{40.2}$$

Partamos de la ecuación de segundo orden (32.6) en la cual el tensor del campo es

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A_\mu. \tag{40.3}$$

Al desarrollar el cuadrado $(i\partial - eA)^2$ hay que tener en cuenta que, en virtud de (40.2), se tiene $\partial_\mu(A^\mu\psi) = A^\mu\partial_\mu\psi$. En definitiva obtenemos la ecuación

$$[-\partial^2 - 2ie(A\partial) + e^2A^2 - m^2 - ie\hat{k}\hat{A}']\psi = 0 \tag{40.4}$$

($\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$).

Busquemos una solución de esta ecuación de la forma

$$\psi = e^{-ipx}F(\varphi), \tag{40.5}$$

donde p es un 4-vector constante. Sumar a p un vector cualquiera del tipo const. k no cambia esta expresión de la función ψ [tan sólo es necesario efectuar la modificación correspondiente en el símbolo de la función $F(\varphi)$]. Por ello, sin limitar la generalidad, es posible imponer a p una condición suplementaria. Sea ésta

$$p^2 = m^2. \tag{40.6}$$

Entonces al desconectar el campo los números cuánticos p^μ pasan a ser las componentes del 4-impulso de una partícula libre. El sentido de las componentes del 4-vector p cuando existe campo resulta sobre todo evidente en un sistema de referencia especial elegido de manera que en él sea $A_0 = 0$. Supongamos que en este sistema de referencia el vector $\boldsymbol{A}$ tiene la dirección y sentido del eje x^1, y el $\boldsymbol{k}$, el del eje x^3 (es decir, el campo eléctrico de la onda está dirigido en el sentido de x^1, el magnético, en el de x^2, y la propia onda se propaga a lo largo del eje x^3). La expresión (40.5) será entonces función propia de los operadores

$$\mathrm{p}_1 = i\frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad \mathrm{p}_2 = -i\frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad \mathrm{p}_0 - \mathrm{p}_3 = i\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

con los valores propios p_1, p_2, $p_0 - p_3$ (estos mismos operadores, como es fácil ver, conmutan con el hamiltoniano de la ecuación de Dirac). De esta manera, en el sistema de referencia dado, p^1, p^2 son las componentes del impulso generalizado a lo largo de los ejes x^1 y x^2, y $p^0 - p^3$ es la diferencia entre la energía total y la componente del impulso generalizado correspondiente al eje x^3.

Al substituir (40.5) y (40.4) tengamos en cuenta que

$$\partial^\mu F = k^\mu F', \qquad \partial_\mu\partial^\mu F = k^2F'' = 0,$$

con lo cual para $F(\varphi)$ se encuentra la ecuación

$$2i(kp)F' + [-2e(pA) + e^2A^2 - ie\hat{k}\hat{A}']F = 0.$$

Una integral de esta ecuación es

$$F = \exp\left\{-i\int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\varphi + \frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(kp)}\right\}\frac{u}{\sqrt{2p_0}},$$

donde $u/\sqrt{2p_0}$ es un bispinor constante arbitrario (acerca de la notación adoptada para él, véase más adelante).

Todas las potencias de $\hat{k}\hat{A}$ superiores a la primera son iguales a cero, dado que

$$\hat{k}\hat{A}\hat{k}\hat{A} = -\hat{k}\hat{k}\hat{A}\hat{A} + 2(kA)\hat{k}\hat{A} = -k^2A^2 = 0.$$

Por consiguiente, podemos substituir;

$$\exp\frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(kp)} = 1 + \frac{e}{2(kp)}\hat{k}\hat{A},$$

de modo que ψ toma la forma

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e}{2(pk)}\hat{k}\hat{A}\right]\frac{u}{\sqrt{2p_0}}e^{iS}, \tag{40.7}$$

donde *

$$S = -px - \int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\varphi. \tag{40.8}$$

Para poner en claro el sentido de las condiciones impuestas al bispinor constante u, supondremos que la onda tiene un amortiguamiento tan pequeño cuanto se quiera. Entonces $A \to 0$ para $x \to \infty$ y ψ debe transformarse en una solución de la ecuación de Dirac libre. Para esto $u = u(p)$ debe satisfacer la ecuación

$$(\hat{p} - m)u = 0. \tag{40.9}$$

Mediante esta ecuación se suprimen las soluciones « extrañas » de la ecuación de segundo orden. Dado que u no depende de las coordenadas, esta condición subsiste también para valores finitos de x, donde la existencia de un débil amortiguamiento no se manifiesta en la forma de ψ. De esta manera, $u(p)$ coincide con la amplitud bispinorial de una onda plana libre; la supondremos normalizada por la misma condición (23.4): $\bar{u}u = 2m$.

Los razonamientos expuestos permiten también explicar inmediatamente el sentido de la normalización de las funciones de onda (40.7). Para las funciones de onda del espectro continuo la integral de normalización se extiende a las regiones del espacio alejadas. Después de introducir un débil amortiguamiento, las funciones de onda en dichas regiones coincidirán con las funciones del movimiento libre.

* Obsérvese que S coincide con la acción clásica para una partícula que se mueve en el campo de la onda, cf. II, § 47, problema 2.

De aquí se sigue que la función (40.7) satisfará la misma condición de normalización

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \psi^*_{p'}\psi_p d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \bar{\psi}_{p'}\gamma^0\psi_p d^3x = \delta(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}), \tag{40.10}$$

que las ondas planas libres.

Determinemos la densidad de corriente que corresponde a las funciones (40.7). Observando que

$$\bar{\psi}_p = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2p_0}}\left[1+\frac{e}{2(pk)}\hat{A}\hat{k}\right]e^{iS},$$

sin más que multiplicar obtendremos

$$j^\mu = \bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_p = \frac{1}{p_0}\left\{p^\mu - eA^\mu + k^\mu\left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2A^2}{2(kp)}\right)\right\}. \tag{40.11}$$

Si $A^\mu(\varphi)$ son funciones periódicas, su valor medio (respecto del tiempo) se anula, de modo que el valor medio de la densidad de corriente es

$$\overline{j^\mu} = \frac{1}{p_0}\left(p^\mu - \frac{e^2}{2(kp)}\overline{A^2}k^\mu\right). \tag{40.12}$$

Hallemos también la densidad de impulso cinético en el estado ψ_p. El operador impulso cinético es igual a la diferencia $\mathrm{p} - eA = i\partial - eA$. Mediante un cálculo que no ofrece dificultad se encuentra

$$\psi^*_p(\mathrm{p}^\mu - eA^\mu)\psi_p = \bar{\psi}_p\gamma^0(\mathrm{p}^\mu - eA^\mu)\psi_p = p^\mu - eA^\mu + k^\mu\left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2A^2}{2(kp)}\right) + \\ + k^\mu\frac{ie}{8(kp)p_0}F_{\lambda\nu}(u^*\sigma^{\lambda\nu}u). \tag{40.13}$$

El valor medio respecto del tiempo de este 4-vector, que designaremos por q^μ, es

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2\overline{A^2}}{2(kp)}k^\mu. \tag{40.14}$$

Su cuadrado vale

$$q^2 = m_*^2,\quad m_* = m\sqrt{1+\frac{e^2}{m^2}\overline{A^2}}, \tag{40.15}$$

m_* representa el papel de « masa efectiva » del electrón en el campo. Comparando (40.14) y (40.12) vemos que

$$\overline{j^\mu} = \frac{q^\mu}{p_0}. \tag{40.16}$$

Observemos también que la condición de normalización (40.10), expresada mediante el vector $\boldsymbol{q}$, tiene la forma

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \psi^*_{p'}\psi_p d^3x = \frac{q_0}{p_0}\delta(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q}) \tag{40.17}$$

[la manera más fácil de pasar de (40.10) a (40.17) consiste en efectuar el cálculo en el sistema de referencia especial señalado más arriba].

§ 41. Movimiento del spin en un campo exterior

El paso a la aproximación cuasiclásica en la ecuación de Dirac se efectúa de la misma manera como en la teoría no-relativista. En la ecuación de segundo orden (32.7a) substituyamos ψ por una expresión de la forma *

$$\psi = ue^{\frac{i}{\hbar}S}$$

(donde S es un escalar y u un bispinor que varía lentamente). Se supone, además, que se cumple la condición ordinaria de carácter cuasiclásico: el impulso de la partícula debe cambiar poco a distancias del orden de la longitud de onda $\hbar/|\boldsymbol{p}|$.

En la aproximación de orden cero respecto de $\hbar$ se obtiene la ecuación relativista clásica ordinaria de Hamilton-Jacobi para la acción S. En este caso, todos los términos que contienen el spin (y proporcionales a $\hbar$) desaparecen de las ecuaciones del movimiento. El spin aparecería solamente en la aproximación que sigue respecto de $\hbar$. En otras palabras, las influencia del momento magnético del electrón sobre su movimiento es siempre del mismo orden de magnitud que las correcciones cuánticas. Esto es completamente natural vista la naturaleza puramente cuántica del spin, cuyo valor es proporcional a $\hbar$.

En relación con una tal situación cobra sentido el planteo del problema de determinar el comportamiento del spin de un electrón que ejecuta un movimiento cuasiclásico prefijado en un campo exterior. La solución de este problema está contenida en la aproximación siguiente respecto de $\hbar$ en la ecuación de Dirac. Sin embargo, aplicaremos otro procedimiento más intuitivo y no ligado de manera inmediata con dicha ecuación. Este procedimiento tiene, además, la ventaja de que permite considerar el movimiento de una partícula cualquiera, entre ellas las que poseen una razón giromagnética « anómala » y que no se pueden describir por la ecuación de Dirac.

Nuestro objeto consiste en establecer la « ecuación del movimiento » para el spin en el caso de un movimiento arbitrario (dado) de la partícula. Empecemos por el caso no-relativista.

El hamiltoniano no-relativista de una partícula en un campo exterior es

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \mu\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}, \tag{41.1}$$

donde en H′ se incluyen todos los términos que no contienen el spin (véase III, § 110); μ es el momento magnético de la partícula. Esta forma del hamiltoniano no está vinculada a una determinada especie de partículas. Para los electrones es

* Al principio utilizamos unidades ordinarias.

$\mu = e\hbar/2mc$ (¡la carga del electrón $e = -|e|$!) y en el caso de los nucleones μ contiene, además, la parte « anómala »*

$$\mu' = \mu - \frac{e\hbar}{2mc} . \tag{41.2}$$

De acuerdo con las reglas generales de la mecánica cuántica, la ecuación entre operadores para el movimiento del spin se obtiene a partir de la fórmula

$$\dot{s} = \frac{i}{\hbar}(Hs - sH) = \frac{i}{2\hbar}(H\sigma - \sigma H). \tag{41.3}$$

Substituyendo aquí (41.1), se encuentra

$$\dot{s}_i = -\frac{i\mu}{2\hbar} H_k (\sigma_k\sigma_i - \sigma_i\sigma_k) = \frac{\mu}{\hbar} e_{ikl} H_k \sigma_l,$$

o bien

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{2\mu}{\hbar} \mathbf{s} \times \boldsymbol{H}. \tag{41.4}$$

Promediemos esta igualdad entre operadores respecto del estado correspondiente a un paquete de ondas cuasiclásico que se mueve a lo largo de una trayectoria dada. Esta operación se reduce a substituir el operador spin por su valor medio $\bar{\boldsymbol{s}}$ y el vector $\boldsymbol{H}$ por una función $\boldsymbol{H}(t)$ que representa la variación del campo magnético en el punto en que se encuentra la partícula (el paquete de ondas) en su movimiento a lo largo de la trayectoria dada. En la aproximación no-relativista (es decir, dentro de los límites de validez de la ecuación de Pauli) $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ es el operador spin de la partícula en su sistema de reposo, cuyo valor medio designamos en el § 29 por $\boldsymbol{\zeta}/2$. De esta manera, llegamos a la ecuación

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu}{\hbar} \boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{H}(t) . \tag{41.5}$$

En esta forma, la ecuación tiene, en esencia, un carácter puramente clásico. Significa que el vector momento magnético experimenta una precesión en torno de la dirección del campo con velocidad angular $-2\mu\boldsymbol{H}/\hbar$, conservando constante su valor absoluto**.

En este mismo caso no-relativista, la velocidad $\boldsymbol{v}$ de la partícula varía de acuerdo con la ecuación

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{mc} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} ,$$

---

* Si se tiene en cuenta las llamadas *correcciones radiativas*, también el momento magnético del electrón contiene una « parte anómala » muy pequeña.

** Clásicamente, la ecuación (41.5) se obtiene inmediatamente a partir de la igualdad.

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{H},$$

en la que $\boldsymbol{M}$ es el momento cinético del sistema, $\boldsymbol{\mu}$ su momento magnético; $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{H}$ es el momento de las fuerzas que actúa sobre el sistema. Haciendo $\boldsymbol{M} = (1/2)\hbar\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mu}{2s}\boldsymbol{\zeta} = \mu\boldsymbol{\zeta}$, se obtiene (41.5).

es decir, el vector $\boldsymbol{v}$ gira en torno de la dirección de $\boldsymbol{H}$ con una velocidad angular $-e\boldsymbol{H}/mc$. Si $\mu' = 0$, se tiene $\mu = e\hbar/2mc$ y esta velocidad angular coincide con la velocidad $-2\mu\boldsymbol{H}/\hbar$ de rotación del vector $\boldsymbol{\zeta}$; en otras palabras, el vector polarización forma un ángulo constante con la dirección del movimiento (veremos más adelante que este resultado conserva su validez también en el caso relativista).

Efectuemos ahora la generalización relativista de la ecuación (41.5). Para una descripción covariante de la polarización hay que utilizar entonces el 4-vector a introducido en el § 29, y la ecuación del movimiento del spin ha de determinar la derivada $da/d\tau$ respecto del tiempo propio τ * .

La forma posible de esta ecuación cabe establecerla ya por consideraciones de invariancia relativista si se tiene en cuenta que su segundo miembro debe ser lineal y homogéneo respecto del tensor campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ y del 4-vector a^μ, a la vez que, junto con éstos, puede contener tan sólo la 4-velocidad $u^\mu = p^\mu/m$. A estas condiciones satisface únicamente una ecuación de la forma

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = \alpha F^{\mu\nu}a_\nu + \beta u^\mu F^{\nu\lambda}u_\nu a_\lambda, \tag{41.6}$$

donde α, β son coeficientes constantes. Es fácil ver que en virtud de la condición $a_\mu u^\mu = 0$ y de la antisimetría del tensor $F^{\mu\nu}$ (de modo que $F^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = 0$) es imposible construir ninguna otra expresión de la forma impuesta.

Para $v \to 0$ esta ecuación ha de coincidir con (41.5). Haciendo $a^\mu = (0, \boldsymbol{\zeta})$, $u^\mu = (1, 0)$, $\tau = t$, se obtendrá

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \alpha[\boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{H}].$$

Comparando con (41.5), se encuentra: $\alpha = 2\mu$.

Para determinar β tengamos en cuenta que $a^i u_i = 0$. Derivando esta igualdad respecto de τ y utilizando la ecuación clásica del movimiento de una carga en un campo:

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu}u_\nu$$

(véase II, § 23), obtendremos

$$u_\mu\frac{da^\mu}{d\tau} = -a_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = -a_\mu\frac{e}{m}F^{\mu\nu}u_\nu = \frac{e}{m}F^{\mu\nu}u_\mu a_\nu.$$

Por ello, multiplicando ambos miembros de la ecuación (41.6) por u_μ, teniendo en cuenta la igualdad $u_\mu u^\mu = 1$, y suprimiendo el factor común $F^{\mu\nu}u_\mu a_\nu$, resultará

$$\beta = -2\left(\mu - \frac{e}{2m}\right) = -2\mu'.$$

Obtenemos así en definitiva la ecuación relativista del movimiento del spin

* En lo que sigue hemos hecho de nuevo $c = 1$, $\hbar = 1$.

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = 2\mu F^{\mu\nu} a_\nu - 2\mu' u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu a_\lambda \tag{41.7}$$

(*V. Bargman, L. Michel, V. Telegdi*, 1959)*.

Pasemos del 4-vector a a la cantidad ζ que caracteriza directamente la polarización de una partícula en su sistema « instantáneo » de reposo; la relación entre a y ζ viene dada por las fórmulas (29.7-9). Pero advertimos en seguida que de (41.7) se deduce automáticamente que $a_\mu da^\mu/d\tau = 0$, de modo que $a_\mu a^\mu = \text{const}$. Dado que $a_\mu a^\mu = -\zeta^2$, esto constituye un resultado natural: en el movimiento de la partícula, se conserva el módulo de su polarización ζ.

La ecuación que determina el cambio de la dirección de la polarización, se obtendrá pasando en (41.7) a la notación tridimensional. Poniendo de manifiesto las componentes espaciales de esta ecuación, se encuentra

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{H}] + \frac{2\mu m}{\varepsilon}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{E} - \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}) + \\ + \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}\cdot[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{H}]) + \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}).$$

Aquí hay que substituir (29.9), teniendo en cuenta, al derivar, las igualdades $\boldsymbol{p} = \varepsilon\boldsymbol{v}$, $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ y las ecuaciones del movimiento

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + e\,[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}], \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = e\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}). \tag{41.8}$$

Un cálculo elemental, aunque bastante largo, conduce a la siguiente ecuación**:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu m + 2\mu'(\varepsilon - m)}{\varepsilon}[\boldsymbol{\zeta}\times\boldsymbol{H}] + \frac{2\mu'\varepsilon}{\varepsilon + m}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H})\,[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\zeta}] + \frac{2\mu m + 2\mu'\varepsilon}{\varepsilon + m}[\boldsymbol{\zeta}\times[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v}]]. \tag{41.9}$$

Presenta un interés particular no tanto la variación de la dirección absoluta de la polarización en el espacio, cuanto su variación respecto de la dirección del movimiento. Representaremos ζ en la forma

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{n}\zeta_\parallel + \boldsymbol{\zeta}_\perp \tag{41.10}$$

(donde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}/v$) y escribamos la ecuación para la proyección $\zeta_\parallel$ de la polarización sobre la dirección del movimiento. El cálculo mediante (41.8-9) conduce al siguiente resultado***:

---

* En otra forma, una ecuación semejante la obtuvo primero *Ia. I. Frenkel* (1926).

** Si, como se hace con frecuencia, se introduce para las partículas cargadas el coeficiente giromagnético (factor de Landé) g de acuerdo con $\mu = g\frac{e}{2m}\frac{1}{2}\left(= g\frac{e}{2mc}\frac{\hbar}{2}\right)$, esta ecuación se escribe en la forma

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{e}{2m}\left(g - 2 + 2\frac{m}{\varepsilon}\right)[\boldsymbol{\zeta}\times\boldsymbol{H}] + \frac{e}{2m}(g-2)\frac{\varepsilon}{\varepsilon+m}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H})\,[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\zeta}] + \\ + \frac{e}{2m}\left(g - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+m}\right)[\boldsymbol{\zeta}\times[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v}]]. \tag{41.9a}$$

*** Es posible obtener esta ecuación de manera algo más directa a partir de la componente temporal de la ecuación (41.7).

$$\frac{d\zeta_{\parallel}}{dt} = 2\mu'(\zeta_{\perp}\cdot[\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}]) + \frac{2}{v}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2} - \mu'\right)(\zeta_{\perp}\cdot\boldsymbol{E}). \tag{41.11}$$

Algunos ejemplos de aplicación de las ecuaciones obtenidas se consideran en los problemas de este párrafo. Aquí haremos notar solamente que en el movimiento en un campo puramente magnético la polarización de una partícula que carezca de momento magnético anómalo forma un ángulo constante con la velocidad ($\zeta_{\parallel}$ = const.). Así, pues, este resultado, ya indicado antes para el caso no-relativista, posee, de hecho, un carácter general.

Precisemos las condiciones de aplicabilidad de las ecuaciones obtenidas. La condición que hemos recordado al principio, la de que el impulso de la partícula varíe con suficiente lentitud, se reduce a la condición de que los valores absolutos de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ sean pequeños; en particular, el radio de Larmor en el campo magnético ($\sim p/eH$) debe ser grande comparado con la longitud de onda de la partícula. Sin embargo, debe cumplirse además, rigurosamente hablando, la condición de que la variación de los campos en el espacio no sea demasiado rápida: el campo debe cambiar poco a distancias del orden de las dimensiones del paquete de ondas cuasiclásico. Por esta misma razón, el campo debe variar poco a distancias del orden de la longitud de onda de la partícula y también entre puntos separados por una distancia igual a la longitud de onda de Compton $1/m$ *.

Por lo demás, en los problemas prácticos del movimiento en campos macroscópicos se cumple, sin duda alguna, la condición de que varíen lentamente, de forma que, de hecho, lo que de ellos se exige es tan sólo que su valor absoluto sea suficientemente pequeño.

En el § 33 se hallaron las primeras correcciones relativistas del hamiltoniano de un electrón que se mueve en un campo exterior. Para el electrón en un campo eléctrico, el hamiltoniano aproximado tiene la forma [véase (33.12)]

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \frac{e}{4m}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\boldsymbol{E}\times\frac{\mathbf{p}}{m}\right]\right) \qquad (\mathbf{p} = -i\nabla), \tag{41.12}$$

donde en H′ se incluyen los términos que no contienen el spin. En nuestro caso y en virtud de la lenta variación del campo, se puede prescindir en H′ del término que contiene las derivadas de $\boldsymbol{E}$ (es decir, el término en div $\boldsymbol{E}$); puede prescindirse también del pequeño término en $\mathbf{p}^4$, que nada tiene que ver con el efecto del campo que aquí nos interesa, ya que H′ (cuando no existe campo magnético) se reduce al hamiltoniano no-relativista $\mathrm{H}' = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi$.

---

* Esta última condición resulta de otra, a saber, la de que la dispersión de las velocidades en el paquete de ondas en su sistema de reposo sea pequeña comparado con c; en caso contrario, sería imposible utilizar en este sistema las fórmulas no-relativistas.

Si el campo cambia con excesiva rapidez, pueden resultar esenciales en las ecuaciones ciertos términos complementarios que contienen las derivadas del campo respecto de las coordenadas.

La fórmula (41.12) se puede obtener también partiendo de la ecuación (41.9), sin acudir directamente a la ecuación de Dirac. Con esto se consigue también su generalización (en el caso clásico) para partículas con momento magnético anómalo.

Limitándonos a los términos de primer orden respecto de la velocidad $\boldsymbol{v}$, la ecuación del movimiento del spin en un campo eléctrico se obtiene a partir de (41.9) en la forma

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = (\mu + \mu')\,[\boldsymbol{\zeta} \times [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{v}]] = \left(\frac{e}{2m} + 2\mu'\right)[\boldsymbol{\zeta} \times [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{v}]].$$

Si se exige que esta ecuación se obtenga, desde el punto de vista mecánico-cuántico, como resultado de la conmutación del operador spin con el hamiltoniano [según (41.3)], hay que hacer

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \left(\mu' + \frac{e}{4m}\right)\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\boldsymbol{E} \times \frac{\mathbf{p}}{m}\right]\right). \tag{41.13}$$

como es fácil comprobar. Ésta es precisamente la expresión buscada. Cuando $\mu' = 0$, volvemos a (41.12). Hay que hacer observar que el momento magnético « normal » $e/2m$ aparece con el factor adicional 1/2 comparado con el momento anómalo μ'*.

PROBLEMAS

1. Determinar cómo varía la dirección de polarización de una partícula que se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme ($\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{H}$).

Solución. En el segundo miembro de la ecuación (41.9) queda solamente el primer término, es decir, el vector $\boldsymbol{\zeta}$ efectúa un movimiento de precesión en torno de la dirección de $\boldsymbol{H}$ (eje z) con velocidad angular

$$\frac{2\mu m + 2\mu'(\varepsilon - m)}{\varepsilon}\boldsymbol{H} = -\left(\frac{e}{\varepsilon} + 2\mu'\right)\boldsymbol{H}.$$

Con esta misma velocidad angular gira en el plano xy la proyección de $\boldsymbol{\zeta}$ sobre este plano (designémosla por $\boldsymbol{\zeta}_1$). En cuanto al vector $\boldsymbol{v}$, éste gira en el mismo plano con velocidad angular $-e\boldsymbol{H}/\varepsilon$ (como puede verse a partir de la ecuación del movimiento $\dot{\boldsymbol{p}} = \varepsilon\dot{\boldsymbol{v}} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}$). De aquí se sigue que $\boldsymbol{\zeta}_1$ gira respecto de la dirección de $\boldsymbol{v}$ con velocidad angular $-2\mu'\boldsymbol{H}$.

2. Lo mismo para el movimiento en la dirección del campo magnético.

Solución. Cuando las direcciones de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{H}$ coinciden, la ecuación (41.9) se reduce a la forma

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}[\boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{H}],$$

es decir, $\boldsymbol{\zeta}$ efectúa un movimiento de precesión en torno de la dirección común a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{H}$ con velocidad angular $-2\mu m\boldsymbol{H}/\varepsilon$.

3. Lo mismo para el movimiento en un campo eléctrico homogéneo.

Solución. Supongamos que el campo $\boldsymbol{E}$ tiene la dirección del eje x y que el movimiento tiene lugar en el plano xy (siendo $p_y = \text{const}$). Por (41.9), es claro que el vector $\boldsymbol{\zeta}$ experimenta una precesión en torno del eje z con velocidad angular instantánea

---

* Éste es precisamente el « factor de Thomas » que mencionamos ya en la nota de la página 103. El razonamiento desarrollado aquí demuestra claramente cuál es su origen.

$$-\left(\frac{e}{\varepsilon+m}+2\mu'\right)E\frac{p_y}{\varepsilon}.$$

Descompongamos de nuevo ζ en las dos componentes ζ_z y ζ_1 (en el plano xy). Entonces

$$\zeta_{\parallel}=\zeta_1\cos\varphi,\quad \zeta_{\perp}E=-\zeta_1\operatorname{sen}\varphi\cdot\frac{v_y}{v}.$$

A partir de (41.11) se encuentra que ζ_1 gira respecto de la dirección de v con velocidad angular instantánea

$$\dot{\varphi}=\frac{2v_y}{v^2}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2}-\mu'\right)=\frac{p_y}{\varepsilon}\left(\frac{em}{p^2}-2\mu'\right).$$

§ 42. Dispersión de neutrones en un campo eléctrico

En las colisiones de neutrones con núcleos, la dispersión a grandes ángulos viene determinada por una interacción fundamental — las fuerzas nucleares —. En cambio, en la dispersión a ángulos pequeños, pasa a ser importante, conforme veremos, la interacción del momento magnético del neutrón con el campo eléctrico del núcleo (*J. Schwinger*, 1948).

Supondremos que el neutrón es no-relativista, de modo que el movimiento en cuestión se describe mediante el hamiltoniano aproximado (41.13). Todo el momento magnético de una partícula eléctricamente neutra es « anómalo », y el operador H' se reduce en este caso al operador correspondiente a la energía cinética*:

$$\mathrm{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+i\frac{\mu\hbar}{mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{E}\times\nabla]. \tag{42.1}$$

Teniendo en cuenta que la interacción electromagnética del neutrón es pequeña, la amplitud f_{em} de la dispersión que aquélla determina puede calcularse en la aproximación de Born:

$$\mathrm{f}_{em}=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\left(i\frac{\mu\hbar}{mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{E}\times\nabla]\right)e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}d^3x$$

(véase III, § 125) o bien

$$\mathrm{f}_{em}=\frac{\mu}{2\pi c\hbar^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{q}}\times\boldsymbol{p}],\quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{q}}=\int\boldsymbol{E}(r)\,e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3x \tag{42.2}$$

($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ son los impulsos del neutrón antes y después de la dispersión; $\hbar\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$). Tal como se ha escrito, la amplitud f_{em} es un operador respecto de la variable espinorial.

Antes de pasar a los cálculos que siguen, haremos la siguiente observación: la fórmula (42.1) se obtuvo en el § 41 para un campo que varía lentamente (lo que equivale, de hecho, a prescindir en el hamiltoniano de términos que contienen las derivadas del campo respecto de las coordenadas). Al aplicarla al campo de Cou-

* En este párrafo utilizamos unidades ordinarias y la letra m representa la masa del neutrón.

lomb del núcleo, esto significa que la longitud de onda $\hbar/p$ debe ser pequeña comparada con las distancias $r \sim 1/q$, que son las que cuentan en la integral $\boldsymbol{E}_q$. De aquí se sigue que $\hbar q \ll p$, con lo cual para el ángulo de dispersión se tiene $\theta \sim \hbar q/p \ll 1$. Así, pues, la condición impuesta se cumple justamente para la dispersión a ángulos pequeños.

Para el campo coulombiano con potencial $\Phi = Ze/r$ la componente de Fourier de la intensidad del campo es

$$\boldsymbol{E}_q = -i\boldsymbol{q}\Phi_q = -i\boldsymbol{q}\frac{4\pi Ze}{q^2}$$

[véase II (51.5)]. La substitución en (42.2) da

$$\mathrm{f}_{em} = i\frac{2Ze\mu}{q^2c\hbar^3}(\boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}']).$$

En el caso de pequeños ángulos de dispersión se tiene $\hbar q \approx p\theta$, $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}' \approx p^2\theta\boldsymbol{\nu}$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el versor correspondiente a $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}'$. De esta manera,

$$\mathrm{f}_{em} = i\frac{2Ze\mu}{\theta\hbar c}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu}.$$

A esta expresión hay que añadir la amplitud de la dispersión nuclear. Dada la rápida disminución de las fuerzas nucleares con la distancia, esta amplitud tiende, para ángulos pequeños, a un valor complejo finito (que depende de la energía) que representaremos por a. Por consiguiente, la amplitud total de dispersión es

$$\mathrm{f} = a + i\frac{b}{\theta}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu}, \qquad b = \frac{2Ze\mu}{c\hbar} = 2Z\alpha\frac{\mu}{e}. \tag{42.3}$$

Vemos así que la dispersión electromagnética resulta efectivamente dominante para ángulos suficientemente pequeños.

La forma de la expresión (42.3) coincide con la que se consideró en III, § 138. Por ello, podemos utilizar directamente las fórmulas que allí se dedujeron. La sección eficaz de dispersión, sumada respecto de todos los estados de polarización posibles, es

$$\frac{d\sigma}{do} = |a|^2 + \frac{b^2}{\theta^2} + 2b\,\mathrm{Im}\,a\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\zeta}\,, \tag{42.4}$$

donde $\boldsymbol{\zeta}$ representa la polarización inicial del haz de neutrones ($\boldsymbol{P}$ en III, § 138). Si el estado inicial es no polarizado ($\boldsymbol{\zeta} = 0$), la polarización después de la dispersión vale

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2b\,\mathrm{Im}\,a\cdot\theta}{|a|^2\theta^2 + b^2}\boldsymbol{\nu}. \tag{42.5}$$

Esta polarización es máxima para $\theta = b/|a|$ y se tiene $\zeta'_{\max} = \mathrm{Im}\,a/|a|$.

CAPÍTULO 5

LA RADIACIÓN

§ 43. El operador de interacción electromagnética

La interacción de los electrones con el campo electromagnético puede estudiarse, por regla general, mediante la teoría de perturbaciones. Esta circunstancia está vinculada con la relativa debilidad de la interacción electromagnética, que a su vez se traduce en el hecho de que la correspondiente « constante de enlace » sin dimensiones, esto es, la constante de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$, es una cantidad pequeña. Este hecho desempeña un papel fundamental en la electrodinámica cuántica.

En la electrodinámica clásica (véase II, § 28) la interacción electromagnética se representa por el término

$$-ej^{\mu}A_{\mu} \tag{43.1}$$

en la densidad del lagrangiano del sistema « campo + cargas » (A es el 4-potencial del campo, j el 4-vector densidad de corriente de las partículas). Además, la densidad de corriente satisface la ecuación de continuidad

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \tag{43.2}$$

que expresa la ley de conservación de la carga. Recordemos (véase II, § 29) que la invariancia de contraste de la teoría está íntimamente ligada precisamente con esta ley. En efecto, al substituir $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\chi$ (4.1), a la densidad de Lagrange (43.1) se suma la cantidad $-ej^{\mu}\partial_{\mu}\chi$, la cual, en virtud de (43.2) ,se puede escribir en forma de 4-divergencia

$$-e\partial_{\mu}(\chi j^{\mu})$$

y desaparece así al integrar respecto de x en la acción $S = \int L d^4x$.

En la electrodinámica cuántica los 4-vectores j y A se substituyen por los correspondientes operadores de segunda cuantificación. En particular, el operador corriente se expresa en términos de los operadores ψ de acuerdo con $\mathrm{j} = \bar{\psi}\gamma\psi$. El

papel de « coordenadas » generalizadas q en el lagrangiano

$$\int L_{\text{inter}}\, d^3x = -e \int (jA)\, d^3x$$

lo representan los valores de $\bar{\psi}$, ψ, A en cada punto del espacio. Dado que su densidad depende solamente de las propias « coordenadas » q (pero no de sus derivadas respecto de x), el paso a la densidad de hamiltoniano según la fórmula (10.11) se reduce a cambiar tan sólo el signo de la densidad de Lagrange *. De esta manera, el operador de interacción electromagnética (integral espacial de la densidad del hamiltoniano de interacción) tiene la forma

$$V = e \int (jA)\, d^3x. \tag{43.3}$$

El operador del campo electromagnético libre es la suma

$$A = \sum_n [c_n A_n(x) + c_n^+ A_n^*(x)], \tag{43.4}$$

que contiene los operadores de creación y aniquilación de los fotones en los diferentes estados (numerados por el índice n). Cada uno de ellos posee elementos de matriz no nulos únicamente para el aumento o la disminución, respectivamente, del número de ocupación N_n en 1 (conservando invariables los restantes números de ocupación). Por consiguiente, también el operador A tiene elementos de matriz tan sólo para transiciones acompañadas de la variación del número de fotones en 1. Dicho de otra manera, en la primera aproximación de la teoría de perturbaciones se manifiestan solamente los procesos de emisión o absorción de un solo fotón en cada uno.

Según (2.15) los elementos de matriz son

$$\langle N_n - 1 \,|\, c_n \,|\, N_n \rangle = \langle N_n \,|\, c_n^+ \,|\, N_n - 1 \rangle = \sqrt{N_n}. \tag{43.5}$$

Si en el estado inicial del campo no hay fotones (de la especie n), se tendrá entonces $\langle 1 \,|\, c_n^+ \,|\, 0 \rangle = 1$. El elemento de matriz del operador (43.3) para emisión de un fotón se escribe

$$V_{fi}(t) = e \int (j_{fi} A_n^*)\, d^3x, \tag{43.6}$$

donde $A_n(x)$ es la función de onda del fotón emitido, y j_{fi} el elemento de matriz del operador j para la transición del emisor desde el estado inicial i al final f **. El 4-vector $j_{fi}^{\mu} = (\rho_{fi}, j_{fi})$ se llama *corriente de la transición.*

De manera análoga se obtiene el elemento de matriz para la absorción de un fotón:

* Con independencia de estas consideraciones, señalaremos que si se trata únicamente de una corrección de primer orden, cualquier corrección pequeña que afecte al lagrangiano se traduce en el hamiltoniano en esta misma corrección cambiada de signo (véase I, § 40).

** Las notaciones adoptadas en (43.6) son un tanto inconsecuentes: los subíndices en V_{fi} se refieren a estados de todo el sistema « emisor + campo », y en j_{fi}, a los estados del emisor solamente.

$$V_{fi}(t) = e \int (j_{fi} A_n)\, d^3x. \tag{43.7}$$

que difiere de (43.6) tan sólo en que en vez de $A_n^*(x)$ aparece $A_n(x)$.

Al poner de manifiesto el argumento t en V_{fi} no hacemos sino subrayar que se trata de un elemento de matriz que depende del tiempo. Separando en las funciones de onda los factores temporales, se puede pasar como de ordinario a los elementos de matriz independientes del tiempo:

$$V_{fi}(t) = V_{fi} e^{-i(E_i - E_f \mp \omega)t} \tag{43.8}$$

(E_i, E_f son las energías inicial y final del sistema radiante; $\mp\,\omega$ se refiere, respectivamente, a la emisión y absorción del fotón ω).

La función de onda de un fotón con impulso determinado $\boldsymbol{k}$ y polarización determinada es

$$A^\mu = \sqrt{4\pi}\, \frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{43.9}$$

[véase (4.3); se ha prescindido del factor temporal]. Substituyendo en (43.6), encontramos el elemento de matriz para emisión de dicho fotón, elemento que resulta de la forma

$$V_{fi} = e \sqrt{4\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\, e_\mu^* j_{fi}^\mu(\boldsymbol{k}), \tag{43.10}$$

donde $j_{fi}(\boldsymbol{k})$ es la corriente de transición en la representación de impulsos, es decir, la componente de Fourier

$$j_{fi}(\boldsymbol{k}) = \int j_{fi}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d^3x. \tag{43.11}$$

La fórmula análoga para absorción del fotón se escribe:

$$V_{fi} = e \sqrt{4\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\, e_\mu j_{fi}^\mu(-\boldsymbol{k}). \tag{43.12}$$

La ecuación de conservación de la corriente en la representación de impulsos adopta la forma de condición de 4-transversalidad de las corrientes de transición:

$$k_\mu j_{fi}^\mu = \omega \rho_{fi}(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{43.13}$$

Las fórmulas escritas en este párrafo, en las cuales no se fija de antemano la forma del operador corriente, poseen un carácter general y son válidas para los procesos electromagnéticos en los que participan un número cualquiera de partículas cargadas. La teoría actual permite establecer la forma del operador corriente (y con ello, en principio, calcular sus elementos de matriz) tan sólo para los electrones. En cambio, cuando se trata de aplicaciones a sistemas de partículas sensibles a las interacciones fuertes (entre ellas, a los núcleos) hay que limitarse a una teoría

semifenomenológica en la que las corrientes de transición intervienen como magnitudes tomadas de la experiencia y que solamente satisfacen las condiciones generales de simetría espacio-temporal y la ecuación de continuidad.

§ 44. Emisión y absorción

La probabilidad de transición bajo la influencia de una perturbación V viene dada en primera aproximación por las conocidas fórmulas de la teoría de perturbaciones (III, § 42). Supongamos que los estados inicial y final del sistema emisor pertenecen al espectro discreto*. Entonces la probabilidad (por segundo) de la transición $i \to f$ acompañada de la emisión de un fotón es

$$dw = 2\pi \mid V_{fi} \mid^2 \delta (E_i - E_f - \omega)\, d\nu, \tag{44.1}$$

donde $d\nu$ designa, como de ordinario, el conjunto de cantidades que caracterizan el estado del fotón y que toman una sucesión continua de valores (se supone que la función de onda del fotón está normalizada respecto de la función-δ « en la escala ν »).

Si se emite un fotón con un valor determinado del momento cinético, la única magnitud continua es la frecuencia ω. La integración de la fórmula (44.1) respecto de $\nu \equiv \omega$ hace desaparecer la función-δ (substituyendo ω por el valor determinado $\omega = E_i - E_f$) y entonces la probabilidad de transición se escribe

$$w = 2\pi \mid V_{fi} \mid^2. \tag{44.2}$$

Pero si se considera la emisión de un fotón con impulso dado $\boldsymbol{k}$, entonces será $d\nu \equiv d^3k = \omega^2 d\omega do$. En este caso, la función de onda del fotón en la fórmula (44.1) se supondría normalizada respecto de $\delta(\boldsymbol{k})$. Sin embargo, en este libro normalizaremos todas las ondas planas de modo que correspondan a « una partícula por unidad de volumen ». Esta normalización difiere de la normalización respecto de $\delta(\boldsymbol{k})$ en que no aparece el factor $(2\pi)^{-3/2}$. De acuerdo con esta normalización de la onda plana fotónica, la probabilidad de que se emita un fotón con impulso dado se escribirá, por consiguiente, en la forma**

$$dw = 2\pi \mid V_{fi} \mid^2 \delta (E_i - E_f - \omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{44.3}$$

o después de integrar respecto de ω:

$$dw = \frac{1}{4\pi^2} \mid V_{fi} \mid^2 \omega^2 do\,. \tag{44.4}$$

En el segundo miembro hay que substituir el elemento de matriz V_{fi} dado por (43.10).

---

* Con esto, en cualquier caso, se supone que se prescinde de los retrocesos: el emisor, como un todo, permanece inmóvil.

** Esta notación concuerda con el hecho de que, al normalizar a « un fotón en el volumen $V = 1$», en (44.1) hay que escribir en vez de $d\nu = d^3k$ el número de estados que corresponden al volumen Vd^3k del espacio de las fases, número que es igual a $d^3k/(2\pi)^3$.

Utilizaremos estas fórmulas en los párrafos siguientes para calcular las probabilidades de radiación en diferentes casos concretos. Aquí consideraremos algunas relaciones generales entre los diversos aspectos de los procesos radiativos.

Si en el estado inicial del campo se tenía ya un número N_n, no nulo, de fotones dados, el elemento de matriz de la transición hay que multiplicarlo todavía por

$$\langle N_n + 1 \mid c_n^+ \mid N_n \rangle = \sqrt{N_n + 1}, \tag{44.5}$$

es decir, la probabilidad de transición queda multiplicada por $N_n + 1$. La unidad corresponde en este factor a la emisión espontánea, que tiene lugar también cuando $N_n = 0$. En cambio, el término N_n determina la emisión *forzada* (o *inducida*); vemos así que la existencia de fotones en el estado inicial del campo estimula una emisión adicional de tales fotones.

El elemento de matriz V_{if} de la transición en la que los dos estados del sistema intercambian sus papeles ($f \to i$) difiere del elemento V_{fi} en la substitución de (44.5) por

$$\langle N_n - 1 | c_n | N_n \rangle = \sqrt{N_n}$$

(y en la substitución de las demás cantidades por sus conjugado-complejas). Esta transición inversa consiste en la absorción del fotón por el sistema, que pasa del nivel E_f al nivel E_i. Por ello, entre las probabilidades de emisión y de absorción del fotón (para un par dado de estados i, f) existe la relación *

$$\frac{w_{\text{emi}}}{w_{\text{abs}}} = \frac{N_n + 1}{N_n} \tag{44.6}$$

(A. Einstein la estableció el primero en 1916).

Veamos qué relación existe entre el número de fotones y la densidad de la radiación que desde el exterior incide sobre el sistema. Sea

$$I_{ke}\, d\omega\, do \tag{44.7}$$

la energía de la radiación que atraviesa por segundo 1 cm^2 de superficie y que posee la polarización e, una frecuencia contenida en el intervalo $d\omega$ y una dirección del vector de onda que pertenece al elemento de ángulo sólido do. A los intervalos indicados corresponden $k^2 dk do/(2\pi)^3$ osciladores del campo, a cada uno de los cuales corresponden a su vez N_{ke} fotones con la polarización dada. Por consiguiente, la misma energía (44.7) obtendremos formando el producto

$$c \frac{k^2 dk do}{(2\pi)^3} N_{ke} \cdot \hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} N_{ke} d\omega\, do.$$

De aquí se deduce la relación buscada:

$$N_{ke} = \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I_{ke}\,. \tag{44.8}$$

---

* En lo que sigue de este párrafo utilizamos unidades ordinarias.

Sea dw_{ke}^{esp} la probabilidad de radiación espontánea del fotón con polarización e en el ángulo sólido do; con los superíndices (ind) y (abs) designaremos las probabilidades análogas para la emisión inducida y la absorción. Según (44.6) y (44.8), estas probabilidades están ligadas entre sí por las siguientes relaciones:

$$dw_{ke}^{abs} = dw_{ke}^{ind} = dw_{ke}^{esp} \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I_{ke} . \tag{44.9}$$

Si la radiación incidente es isótropa y no polarizada (I_{ke} no depende de las direcciones ni de k ni de e), la integración de (44.9) respecto del ángulo sólido y la suma con relación a e dan las relaciones análogas entre las probabilidades totales de los procesos radiativos (entre estados i y f dados del sistema)

$$w^{abs} = w^{ind} = w^{esp} \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I, \tag{44.10}$$

donde $I = 2 \cdot 4\pi I_{ke}$ es la intensidad espectral total de la radiación incidente.

Si los estados i y f del sistema emisor (o absorbente) son degenerados, la probabilidad total de emisión (o de absorción) de los fotones dados se obtiene sumando respecto de todos los estados degenerados finales y promediando respecto de todos los posibles estados iniciales. Designaremos las multiplicidades de la degeneración (pesos estadísticos) de los estados i y f por g_i y g_f. Para los procesos de emisión espontánea e inducida los estados iniciales son los i, y para la absorción, los estados f. Admitiendo en cada caso que todos los g_i o g_f estados iniciales corresponden a equiprobabilidad, obtendremos, evidentemente, en vez de (44.10) las relaciones siguientes*:

$$g_f w^{abs} = g_i w^{ind} = g_i w^{esp} \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I. \tag{44.11}$$

§ 45. Radiación dipolar

Apliquemos las fórmulas obtenidas a la emisión de un fotón por un electrón (relativista en el caso general) que se mueve en un campo exterior dado. La corriente de transición en este caso es el elemento de matriz del operador

$$j = \bar{\psi}\gamma\psi,$$

en la cual los operadores ψ se suponen desarrollados en serie de funciones de onda de los estados estacionarios del electrón en el campo dado (§ 32). A la transición del electrón del estado i al estado f, corresponde el elemento de matriz $\langle 0_i 1_f | j | 1_i 0_f \rangle$.

---

* Frecuentemente se utilizan en la literatura los llamados *coeficientes de Einstein*, definidos por $A_{if} = w^{(esp)}, B_{if} = w^{(ind)} c/I$, $B_{if} = w^{(abs)} c/I$ (la cantidad I/c es la densidad espectro-espacial de energía de la radiación). Estos coeficientes están ligados entre sí por las relaciones:

$$g_f B_{fi} = g_i B_{if} = g_i A_{if} \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} . \tag{44.11a}$$

Un tal cambio de los números de ocupación se consigue mediante el operador $a_f^+ a_i$ y para la corriente de transición obtenemos

$$j_{fi}^{\mu} = \bar{\psi}_f \gamma^{\mu} \psi_i = (\psi_f^* \psi_i,\ \psi_f^* \boldsymbol{\alpha} \psi_i), \tag{45.1}$$

donde ψ_i y ψ_f son las funciones de onda de los estados inicial y final del electrón.

Eligiremos la función de onda del fotón en el contraste transversal en tres dimensiones (4-vector polarización $e = (0, \boldsymbol{e})$]. Entonces, en (43.10) el producto $j_{fi} e^* = -\boldsymbol{j}_{fi} \cdot \boldsymbol{e}^*$. Substituyendo V_{fi} en (44.4), se obtendrá la siguiente fórmula para la probabilidad de radiación (por segundo) en el elemento de ángulo sólido do de un fotón con polarización $\boldsymbol{e}$:

$$dw_{en} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |\, \boldsymbol{e}^* \cdot \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k}) \,|^2 do, \tag{45.2}$$

donde

$$\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k}) = \int \psi_f^* \boldsymbol{\alpha} \psi_i \cdot e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3x. \tag{45.3}$$

La suma respecto de las polarizaciones del fotón se efectúa promediando según las direcciones de $\boldsymbol{e}$ (en un plano perpendicular a la dirección dada $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$), hecho lo cual el resultado se multiplica por 2 para tener en cuenta las dos posibilidades independientes de polarización transversal del fotón *. De esta manera se obtiene la fórmula

$$dw_n = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |\, [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k})] \,|^2 do. \tag{45.4}$$

Es muy importante el caso en que la longitud de onda del fotón λ es grande comparada con las dimensiones del sistema emisor, a. Esta situación está ligada de ordinario con el hecho de que la velocidad de las partículas es pequeña comparada con la velocidad de la luz. En primera aproximación respecto de a/λ (que corresponde a la radiación dipolar, cf. II, § 67), en la corriente de transición (45.3) puede substituirse por la unidad el factor $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, que varía poco en el dominio en que ψ_i o ψ_f difieren apreciablemente de cero. Esta substitución equivale, en otras palabras, a prescindir del impulso del fotón comparado con los impulsos de las partículas en el sistema.

En la misma aproximación, la integral $\boldsymbol{j}_{fi}(0)$ se puede substituir por su expresión no-relativista, es decir, simplemente por el elemento de matriz $\boldsymbol{v}_{fi}$ de la velocidad del electrón respecto de las funciones de onda de Schrödinger. A su vez, este ele-

---

* Para promediar se utiliza la fórmula

$$\overline{e_i e_k^*} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k) \tag{45.4a}$$

o bien

$$\overline{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}^*)} = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})\right\} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n}]\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}],$$

donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes [cf. II (78.6)].

mento es $\boldsymbol{v}_{fi} = -i\omega \boldsymbol{r}_{fi}$ y, por otra parte, $e\boldsymbol{r}_{fi} = \boldsymbol{d}_{fi}$, donde $\boldsymbol{d}$ es el momento dipolar del electrón (en su movimiento orbital). De esta manera, hallaremos la siguiente fórmula para la probabilidad de radiación dipolar:

$$dw_{en} = \frac{\omega^3}{2\pi} | \boldsymbol{e}^* \cdot \boldsymbol{d}_{fi} |^2 \, do \tag{45.5}$$

(la dirección $\boldsymbol{n}$ figura aquí en forma implícita: el vector $\boldsymbol{e}$ debe ser perpendicular a $\boldsymbol{n}$). Sumando respecto de las polarizaciones, se obtendrá

$$dw_n = \frac{\omega^3}{2\pi} | [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{d}_{fi}] |^2 \, do. \tag{45.6}$$

Teniendo en cuenta el carácter no-relativista (respecto del electrón) de estas fórmulas, su generalización a un sistema cualquiera de electrones es obvia: hay que entender por $\boldsymbol{d}_{fi}$ el elemento de matriz del momento dipolar total del sistema.

Integrando en la fórmula (45.6) respecto de las direcciones, se encuentra la probabilidad total de emisión:

$$w = \frac{4\omega^3}{3} | \boldsymbol{d}_{fi} |^2, \tag{45.7}$$

o en unidades ordinarias:

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} | \boldsymbol{d}_{fi} |^2. \tag{45.7a}$$

La intensidad I de la radiación se obtiene multiplicando la probabilidad por $\hbar\omega$:

$$I = \frac{4\omega^4}{3c^3} | \boldsymbol{d}_{fi} |^2. \tag{45.8}$$

Esta fórmula pone de manifiesto la directa analogía con la fórmula clásica [véase II (67.11)] para la intensidad de la radiación dipolar por un sistema de partículas animadas de un movimiento periódico: la intensidad de la radiación de frecuencia $\omega_s = s\omega$ (donde ω es la frecuencia del movimiento de las partículas y s un número entero) es igual a

$$I_s = \frac{4\omega_s^4}{3c^3} | \boldsymbol{d}_s |^2, \tag{45.9}$$

igualdad en la que $\boldsymbol{d}_s$ son las componentes de Fourier del momento dipolar, es decir, los coeficientes del desarrollo

$$\boldsymbol{d}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{d}_s e^{-is\omega t}. \tag{45.10}$$

La fórmula cuántica (45.8) se obtiene a partir de (45.9) substituyendo estas componentes de Fourier por los elementos de matriz de las correspondientes transiciones. Esta regla (que expresa el principio de correspondencia de Bohr) es un caso particular de una relación general entre las componentes de Fourier de las magnitudes clásicas y los elementos de matriz cuánticos en el caso cuasiclásico (véase III, § 48).

La radiación es cuasiclásica para las transiciones entre estados con grandes números cuánticos; entonces la frecuencia de la transición $\hbar\omega = E_i - E_f$ es pequeña comparada con las energías del emisor E_i y E_f. Sin embargo, esta última circunstancia no conduciría a cambio alguno en la forma de (45.8), que es válida para transiciones cualesquiera. Esto explica el hecho (casual en cierto sentido) de que el principio de correspondencia aplicado a la intensidad de la radiación no sólo es válido en el caso cuasiclásico, sino también en el caso cuántico general.

§ 46. Radiación multipolar eléctrica

En vez de considerar la emisión de un fotón en una dirección dada (es decir, con un impulso dado) estudiemos ahora la emisión de un fotón con valores determinados del momento cinético j y de su proyección m sobre una dirección elegida z. Vimos en el § 6 que tales fotones pueden ser de dos tipos — de tipo eléctrico o de tipo magnético; comenzaremos por la radiación de fotones de tipo eléctrico. También aquí se supondrá que las dimensiones del sistema radiante son pequeñas comparadas con la longitud de onda.

Conviene efectuar los cálculos utilizando las funciones de onda del fotón en la representación de impulsos, es decir, representando el 4-vector $A^\mu(\boldsymbol{r})$ en forma de integral de Fourier. Entonces el elemento de matriz se escribe

$$V_{fi} = e \int j^\mu_{fi}(\boldsymbol{r})\, A^*_\mu(\boldsymbol{r})\, d^3x = e \int d^3x \cdot j^\mu_{fi}(\boldsymbol{r}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A^*_\mu(\boldsymbol{k})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad (46.1)$$

(para simplificar la escritura de las fórmulas prescindimos de los índices ωjm en las funciones de onda del fotón).

Para un fotón Ej tomaremos la función de onda de (7.10), eligiendo la constante arbitraria C igual a

$$C = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}.$$

La constante se elige así con el fin de que en las componentes espaciales de la función de onda se reduzcan los términos que contienen los armónicos esféricos de orden $j-1$ [como puede verse en las fórmulas (7.16)]. Entonces $\boldsymbol{A}$ contendrá solamente las funciones esféricas de orden $j+1$, con lo cual la correspondiente contribución a V_{fi} resultará ser (como hará patente el cálculo que sigue) de un orden de pequeñez mayor (respecto de a/λ) que la contribución de la componente $A^0 \equiv \Phi$, que contiene armónicos esféricos de orden j, más bajo.

Así, pues, haremos

$$A^\mu = (\Phi,\ 0), \qquad \Phi = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}\,\frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\,\delta(|\boldsymbol{k}| - \omega)\, Y_{jm}(\boldsymbol{n})$$

($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$). Substituyendo esta expresión en (46.1) y efectuando la integración respecto de $|\boldsymbol{k}|$, obtendremos

$$V_{fi} = -e\sqrt{\frac{j+1}{j}}\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi}\int d^3x\cdot\rho_{fi}(\boldsymbol{r})\int do_n e^{-ik\boldsymbol{r}}Y^*_{jm}(\boldsymbol{n}). \tag{46.2}$$

Para calcular la primera integral utilizaremos el desarrollo (24.12), que escribiremos en la forma

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l g_l(kr)\, Y^*_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right) Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right), \tag{46.3}$$

donde *

$$g_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{l+1/2}(kr). \tag{46.4}$$

Substituyendo este desarrollo en (46.2), obtenemos

$$\int e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} Y^*_{jm}(\boldsymbol{n})\, do_n = 4\pi i^{-j} g_j(kr)\, Y^*_{jm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

(los demás términos se anulan dada la ortogonalidad de los armónicos esféricos). En virtud de la condición $a/\lambda \ll 1$, en la integral respecto de x representarán un papel tan sólo las distancias para las cuales $kr \ll 1$. En consecuencia, se puede substituir las funciones $g_j(kr)$ por los primeros términos de sus desarrollos respecto de kr**:

$$g_j(kr) \approx \frac{(kr)^j}{(2j+1)!!}. \tag{46.5}$$

En definitiva obtendremos

$$V_{fi} = (-1)^{m+1} i^j \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}}\,\frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!}\, e\,(Q^{(E)}_{j,-m})_{fi}, \tag{46.6}$$

donde se han introducido las cantidades

$$(Q^{(E)}_{jm})_{fi} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\int \rho_{fi}(\boldsymbol{r})\, r^j Y_{jm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) d^3x \tag{46.7}$$

[recordaremos que $Y_{j,-m} = (-1)^{j-m} Y^*_{jm}$]. Las cantidades (46.7) se llaman *momentos eléctricos 2^j-polares de la transición* del sistema por analogía con las correspondientes magnitudes clásicas (II, § 41)***.

---

* Las funciones $g_l(kr)$ dependen solamente de los productos kr, lo que hace ver claramente la simetría de la fórmula respecto de los vectores $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{k}$. Es indiferente a cuál de los dos armónicos esféricos corresponde el símbolo de conjugación compleja.

La normalización de las funciones g_l es tal que su forma asintótica para $kr \to \infty$ se escribe

$$g_l(kr) \approx \frac{\operatorname{sen}\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}{kr}. \tag{46.4a}$$

** El grado de kr coincide con el orden de la función Y_{jm} multiplicada por la cual aparece g_j. Por esto mismo se justifica el prescindir de términos en $\boldsymbol{A}$ que contienen armónicos esféricos de orden más elevado.

*** Definimos los momentos multipolares sin el factor e de acuerdo con el hecho de que también las corrientes se definen en este libro sin el factor que indica la carga.

Para el electrón en un campo exterior se tiene $\rho_{fi} = \psi_f^* \psi_i$ y las cantidades (46.7) se calculan como elementos de matriz de la cantidad clásica

$$Q_{jm}^{(E)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\, r^j Y_{jm}.$$

En el caso nc-relativista (respecto de las velocidades de las partículas), el momento de la transición se puede calcular, en principio, de manera análoga para un sistema cualquiera de N partículas en interacción mutua. La densidad de transición se expresa entonces mediante las funciones de onda del sistema en la forma

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{r}) = \int \psi_f^*(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)\, \psi_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \sum_{n=1}^{N} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n) \cdot d^3x_1 \ldots dx_N, \quad (46.8)$$

donde la integral se extiende a todo el espacio de configuraciones *.

La función de onda del fotón empleada corresponde (en la representación de coordenadas) a la normalización respecto de la función-δ en la escala ω, como se supone en la fórmula (44.2). Substituyendo en ésta (46.6), obtendremos la probabilidad de la radiación Ej**

$$w_{jm}^{(E)} = \frac{2(2j+1)(j+1)}{j[(2j+1)!!]^2}\, \omega^{2j+1} e^2 |(Q_{j,-m}^{(E)})_{fi}|^2. \quad (46.9)$$

En particular, para $j = 1$ tenemos

$$w_{1m}^{(E)} = \frac{4\omega^3}{3}\, e^2 |(Q_{1,-m}^{(E)})_{fi}|^2. \quad (46.10)$$

Las cantidades $Q_{1m}^{(E)}$ están ligadas con las componentes del vector momento eléctrico dipolar por las fórmulas

$$eQ_{10}^{(E)} = id_z, \qquad eQ_{1,\pm 1}^{(E)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(d_x \pm id_y). \quad (46.11)$$

Sumando (46.10) respecto de m, volvemos, como debía ser, a la fórmula (45.7), ya conocida, para la probabilidad total de radiación dipolar.

La distribución angular de la radiación multipolar se determina por la fórmula (7.11). Normalizándola respecto de la probabilidad total de emisión w_{jm}, tenemos

$$dw_{jm} = |Y_{jm}^{(E)}(\boldsymbol{n})|^2 w_{jm}\, do = \frac{w_{jm}}{j(j+1)} |\nabla_{\boldsymbol{n}} Y_{jm}|^2\, do. \quad (46.12)$$

En particular, para $j = 1$

* Al suponer que las velocidades de los electrones en el sistema son pequeñas se persigue únicamente la posibilidad de representar el sistema por una función de onda y en este sentido no tiene un carácter fundamental. Puede presentarse una situación en la que la probabilidad de transición se anule en virtud de reglas de selección aproximadas, que son correctas únicamente si se prescinde de las interacciones spin-órbita de los electrones. En tal caso, para tener un resultado diferente de cero hay que utilizar funciones de onda con la corrección relativista que tiene en cuenta esta interacción.

** A primera vista podría parecer que, en virtud de la isotropía del espacio, la probabilidad total de emisión de un fotón no debe depender del valor de m. Es fácil comprender que no es así si se observa que para emitir fotones con diferentes valores de m deberían ser diferentes los estados finales del sistema (para un estado inicial dado); cf. más abajo la regla (46.16).

$$Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\cdot e^{\pm i\varphi},$$

donde θ, φ son el ángulo polar y el acimut de la dirección $\boldsymbol{n}$ respecto del eje z. Calculando el gradiente, se encuentra que la distribución angular de la radiación dipolar con valores determinados de m viene dada por las expresiones

$$dw_{10} = w_{10}\frac{3}{8\pi}\operatorname{sen}^2\theta\, do, \quad dw_{1,\pm1} = w_{1,\pm1}\frac{3}{8\pi}\frac{1+\cos^2\theta}{2}do. \tag{46.13}$$

Naturalmente, éstas se podrían obtener también a partir de la fórmula (45.6) haciendo en ella, primero (para $m = 0$), $d_x = d_y = 0$, $d_z = d$, y, segundo (cuando $m = \pm 1$), $d_y = \mp i d_x = d/\sqrt{2}$, $d_z = 0$.

Si el orden de magnitud de las dimensiones del sistema (de un átomo o de un núcleo) es a, el orden de magnitud de los momentos multipolares eléctricos es, en general, $Q_{jm}^{(E)} \sim a^j$. La probabilidad de radiación multipolar vale, en cambio,

$$w_{jm}^{(E)} \sim \alpha k\,(ka)^{2j}. \tag{46.14}$$

El aumento del orden de multiplicidad en 1 disminuye la probabilidad de radiación en la razón $\sim (ka)^2$.

Las leyes de conservación del momento cinético y de la paridad conducen a determinadas reglas de selección que limitan los cambios posibles del estado del sistema emisor. Si el momento inicial del sistema es igual a J_i, después de emitir un fotón de momento cinético j el momento del sistema puede tomar solamente valores J_f que se determinan por la regla de composición de momentos ($\boldsymbol{J}_i - \boldsymbol{J}_f = \boldsymbol{j}$):

$$|J_i - J_f| \leqslant j \leqslant J_i + J_f. \tag{46.15}$$

Para valores dados J_i y J_f, la misma regla (46.15) determina los valores posibles del momento cinético del fotón. Pero dado que la probabilidad de radiación disminuye rápidamente al aumentar j, la emisión se produce fundamentalmente con la multipolaridad menor posible.

Las proyecciones M_i y M_f de los momentos $\boldsymbol{J}_i$ y $\boldsymbol{J}_f$ junto con la proyección m del momento del fotón satisfacen la regla evidente (que se deduce de la misma ley de composición de los momentos)

$$M_i - M_f = m. \tag{46.16}$$

Las paridades P_i y P_f de los estados inicial y final del sistema radiante deben satisfacer la condición $P_f P_F = P_i$, donde P_F es la paridad del fotón emitido; dado que las paridades pueden tomar solamente los valores ± 1, esta condición se puede escribir también en la forma

$$P_i P_f = P_F \tag{46.17}$$

Para un fotón de tipo eléctrico es $P_F = (-1)^j$, de modo que la regla de selección según la paridad para la radiación multipolar eléctrica se escribe:

$$P_i P_f = (-1)^j. \tag{46.18}$$

Las reglas de selección que se deducen del momento cinético total y de la paridad son del todo rigurosas y deben observarse en la radiación por cualquier sistema. Junto con estas reglas pueden existir también otras, más restrictivas, vinculadas con ciertas peculiaridades de la estructura de los sistemas radiantes concretos. Tales reglas tienen inevitablemente tan sólo un carácter más o menos aproximado; las estudiaremos en los párrafos que siguen de este capítulo.

La dependencia de la probabilidad de emisión respecto de los números cuánticos m, M_i, M_f queda completamente determinada por el carácter tensorial de los momentos multipolares. Las cantidades Q_{jm} con un valor de j dado constituyen un tensor esférico de orden j y sus elementos de matriz dependen de dichos números cuánticos según la fórmula

$$|\langle n_f J_f M_f | Q_{j,-m} | n_i J_i M_i\rangle|^2 = \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2 |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i\rangle|^2 \qquad (46.19)$$

[véase III (107.6)], donde la letra n designa el conjunto de los números cuánticos que junto con J y M determinan el estado del sistema. Los elementos de matriz reducidos que aparecen en el segundo miembro de la igualdad (46.19) son independientes de los números m, M_i, M_f. Substituida en (46.9), esta fórmula determina también la dependencia buscada, que resulta ser la proporcionalidad a

$$\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2$$

(con esto se supone, claro está, que el emisor no se encuentra en un campo exterior; entonces la frecuencia de la transición ω no depende de los números M_i y M_f).

Sumando los valores de la probabilidad para todos los valores M_f (con M_i dado), obtendremos la probabilidad total de emisión de un fotón de frecuencia dada a partir del nivel inicial del sistema $n_i J_i$. En virtud de la isotropía del espacio, es evidente «a priori» que esta cantidad no dependerá tampoco del valor inicial M_i. La suma se efectúa aplicando la fórmula

$$\sum_{M_f} |\langle n_f J_f M_f | Q_{j,-m} | n_i J_i M_i\rangle|^2 = \frac{1}{2J_i+1} |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i\rangle|^2 \qquad (46.20)$$

[véase III (107.11)].

§ 47. Radiación multipolar magnética

La función de onda de un fotón de tipo magnético es $A^\mu = (0, \boldsymbol{A})$, donde $\boldsymbol{A}$ viene dado por la fórmula (7.6). Substituyéndola en (46.1), obtendremos para el elemento de matriz de la transición

$$V_{fi} = -e\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi} \int d^3x \cdot \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r}) \int do_n \cdot e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} Y_{jm}^{(M)*}(\boldsymbol{n}). \qquad (47.1)$$

Las componentes del vector $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(M)}$ se expresan, según (7.16), en función de armónicos esféricos de orden j. Utilizando de nuevo el desarrollo (46.3), se obtiene para la segunda integral

$$\int e^{-ik\cdot r}\, \boldsymbol{Y}_{jm}^{(M)*}(\boldsymbol{n})\, do_n = 4\pi i^{-j} g_j(kr)\, \boldsymbol{Y}_{jm}^{(M)*}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

y después de substituir el valor de g_j dado por (46.5) resulta *

$$V_{fi} = -ei^{-j}\frac{2\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!}\int \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})\, r^j \boldsymbol{Y}_{jm}^{(M)*}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) d^3x.$$

De acuerdo con la definición (7.4), hay que substituir aquí

$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(M)}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}[\boldsymbol{r}\times\nabla Y_{jm}].$$

Hecho esto, apliquemos al integrando la igualdad

$$r^j \boldsymbol{j}_{fi}\cdot[\boldsymbol{r}\times\nabla Y_{jm}^*] = -[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}_{fi}]\cdot\nabla(r^j Y_{jm}^*)$$

con lo que se obtiene

$$V_{fi} = (-1)^m i^j \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}}\frac{\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!}\, e\,(Q_{j,-m}^{(M)})_{fi}, \tag{47.2}$$

donde se han introducido las cantidades

$$(Q_{jm}^{(M)})_{fi} = \frac{1}{j+1}\sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\int [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}_{fi}]\cdot\nabla(r^j Y_{jm})\, d^3x. \tag{47.3}$$

Éstas se llaman momentos *2^j-polares magnéticos de la transición.*

Vista la analogía entre las expresiones (47.2) y (46.6), para la probabilidad de emisión se obtiene una fórmula que difiere de (46.10) solamente en que los momentos eléctricos se substituyen por los magnéticos. Conserva también su validez la fórmula (46.12) para la distribución angular [conforme se hizo ya notar en relación con (7.11)].

Examinemos la estructura de la expresión (47.3) para $j = 1$. En este caso se tiene

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r Y_{10} = iz, \quad \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r Y_{1,\pm1} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(x \pm iy),$$

y los gradientes de estas funciones son iguales, simplemente, a los versores esféricos $\boldsymbol{e}^{(0)}$, $\boldsymbol{e}^{(\pm1)}$ (7.14). Por ello, las cantidades $e(Q_{1m}^{(M)})_{fi}$ son las componentes esféricas del vector

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = \frac{e}{2}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}_{fi}\, d^3x, \tag{47.4}$$

* ¡No se confunda la corriente $\boldsymbol{j}$ con el momento cinético j!

que por su estructura es análogo al momento magnético clásico (véase II, § 44). Veamos cómo está ligada la fórmula (47.4) con la expresión no-relativista cuántica ordinaria del operador momento magnético.

La expresión no-relativista de la corriente de transición es (véase III, § 114):

$$j_{fi} = -\frac{i}{2m}(\psi_f^* \nabla \psi_i - \psi_i \nabla \psi_f^*) + \frac{\mu}{es}\,\mathrm{rot}\,(\psi_f^* \mathbf{s} \psi_i), \tag{47.5}$$

donde μ es el momento magnético de la partícula y s su spin. En consecuencia,

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = -\frac{ie}{4m}\int \psi_f^*\ \boldsymbol{r}\times\nabla\ \psi_i\, d^3x + \frac{ie}{4m}\int \psi_i\ \boldsymbol{r}\times\nabla\ \psi_f^*\, d^3x + \\ + \frac{\mu}{2s}\int \boldsymbol{r}\times\mathrm{rot}\,(\psi_f^* \mathbf{s}\psi_i)\ d^3x. \tag{47.6}$$

Escribamos en el segundo término

$$\int \psi_i\ \boldsymbol{r}\times\nabla\ \psi_f^*\, d^3x = -\int \psi_f^*\ \boldsymbol{r}\times\nabla\ \psi_i\, d^3x + \int \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{r}\psi_f^*\psi_i)\, d^3x.$$

La última integral se transforma en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada y se anula. De esta manera, los dos primeros términos en (47.6) coinciden. En el tercer término, transformaremos la integral de la siguiente manera (por el momento designamos por $\boldsymbol{F}$ la expresión $\psi_f^* \mathbf{s}\psi_i$):

$$\int [\boldsymbol{r}\times[\nabla\times\boldsymbol{F}]]\, d^3x = \oint [\boldsymbol{r}\times[d\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{F}]] - \int [[\boldsymbol{F}\times\nabla]\times\boldsymbol{r}]\, d^3x.$$

La integral de superficie se anula, y en la última integral tenemos $[\boldsymbol{F}\times\nabla]\times\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{F}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{r} + \boldsymbol{F} = -2\boldsymbol{F}$. Así, pues,

$$\int [\boldsymbol{r}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}]\, d^3x = 2\int \boldsymbol{F}\, d^3x.$$

En definitiva, la expresión para $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ toma la forma

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = \int \psi_f^* \left(\frac{e}{2m}\mathbf{L} + \frac{\mu}{s}\mathbf{s}\right)\psi_i\, d^3x, \tag{47.7}$$

donde $\mathbf{L} = -i\,\boldsymbol{r}\times\nabla$ es el operador del momento orbital de la partícula. Como debía ser, $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ es el elemento de matriz del operador

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\mathbf{L} + \frac{\mu}{s}\mathbf{s}, \tag{47.8}$$

suma de los momentos magnéticos orbital y propio de la partícula.

Las reglas de selección correspondientes a la radiación multipolar magnética son análogas a las reglas para el caso eléctrico: para el momento cinético total valen las mismas reglas (46.15-16), y para la paridad, la regla

$$P_i P_f = (-1)^{j+1}, \tag{47.9}$$

que se obtiene substituyendo en (46.17) la paridad de un fotón Mj: $P_F = (-1)^{j+1}$.

§ 48. Distribución angular y polarización de la radiación

Las fórmulas deducidas en los §§ 46 y 47 se referían a la emisión de un fotón con valores determinados del momento j y de su proyección m. De acuerdo con esto, se suponía que también el sistema emisor (digamos, un núcleo) antes y después de la emisión posee no solamente valores determinados del momento cinético J, sino también polarizaciones determinadas, es decir, valores determinados de M.

Consideremos ahora el caso más general de la radiación por un núcleo parcialmente polarizado (las dimensiones del cual, como antes, se suponen pequeñas comparadas con la longitud de onda). El fotón emitido posee como anteriormente un momento cinético determinado, j, pero puede estar parcialmente polarizado. Determinemos la probabilidad de emisión en función de la dirección $\boldsymbol{n}$ del fotón. Esta probabilidad debe expresarse mediante la matriz densidad que representa los estados de polarización del núcleo y del fotón.

Para ello escribamos primero la probabilidad de emisión como función de la dirección $\boldsymbol{n}$ y de la helicidad λ del fotón ($\lambda = \pm 1$) para el caso en que los núcleos inicial y final poseen valores determinados $J_i M_i$ y $J_f M_f$.

El elemento de matriz que corresponde a la emisión del fotón con valores determinados jm es proporcional al elemento de matriz del momento 2^j-polar (eléctrico o magnético) del núcleo:

$$\langle J_f M_f;\ jm \mid V \mid J_i M_i \rangle \sim (-1)^m \langle J_f M_f \mid Q_{j,\,-m} \mid J_i M_i \rangle. \tag{48.1}$$

La función de onda del fotón emitido (en la representación de impulsos) es proporcional a $\boldsymbol{Y}^{(\mathrm{E})}_{jm}(\boldsymbol{n})$ o a $\boldsymbol{Y}^{(\mathrm{M})}_{jm}(\boldsymbol{n})$. En cambio, la función de onda del fotón con impulso en la dirección de $\boldsymbol{n}$ y helicidad λ es proporcional al vector polarización $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$. El elemento de matriz para emisión de un fotón $\boldsymbol{n}\lambda$ se obtendrá multiplicando (48.1) por la proyección de la función de onda del estado $|jm\rangle$ sobre la función de onda del estado $|\boldsymbol{n}\lambda\rangle$:

$$\langle J_f M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda \mid V \mid J_i M_i \rangle \sim (-1)^m \langle J_f M_f \mid Q_{j,\,-m} \mid J_i M_i \rangle\, (\boldsymbol{e}^{(\lambda)*} \cdot \boldsymbol{Y}_{jm}).$$

Según (16.23), para los fotones de ambos tipos se tiene

$$\boldsymbol{e}^{(\lambda)*} \cdot \boldsymbol{Y}_{jm}(\boldsymbol{n}) \sim D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{n}). \tag{48.2}$$

En cuanto al elemento de matriz del momento multipolar, lo expresaremos como de ordinario en función del elemento reducido. Finalmente obtenemos la amplitud de probabilidad de la transición en la forma

$$\langle J_f M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda \mid V \mid J_i M_i \rangle \sim (-1)^{J_f - M_f + m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} Q D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{n}), \tag{48.3}$$

donde Q representa el elemento $\langle J_f \| Q \| J_i \rangle$.

Podemos pasar ahora al caso general de estados de polarización mezclados. Según las reglas generales de la mecánica cuántica, la probabilidad de transición será proporcional a la expresión *

$$\sum_{(m)} \langle J_f M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda \mid V \mid J_i M_i\rangle \langle J_f M_f';\ \boldsymbol{n}\lambda' \mid V \mid J_i M_i'\rangle^* \times \\ \times \langle M_i \mid \rho^{(i)} \mid M_i'\rangle \langle M_f' \mid \rho^{(f)} \mid M_f\rangle \langle \lambda' \mid \rho^{(\gamma)} \mid \lambda\rangle, \quad (48.4)$$

donde $\rho^{(i)}$, $\rho^{(f)}$, $\rho^{(\gamma)}$ son las matrices densidad del núcleo inicial, del núcleo final y del fotón emitido; el símbolo (m) bajo el signo de suma significa que ésta se extiende a todos los índices m que se repiten dos veces en $(M_i M_i' M_f M_f' \lambda\lambda')$. En (48.4) hay que substituir (48.3).

Designemos la probabilidad de emisión de un fotón en el ángulo sólido $d\omega$ por $w(\boldsymbol{n})d\omega$. La probabilidad total de emisión en todas direcciones y con todas las polarizaciones del fotón y del núcleo secundario no depende, evidentemente, del estado de polarización inicial del núcleo. Dicha probabilidad viene dada por fórmulas que ya conocemos y no nos interesa aquí. Por ello, convendremos en normalizar la probabilidad $w(\boldsymbol{n})$ a la unidad. Se obtiene para ella **

$$w(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M_i'} D^{(f)}_{\lambda m} D^{(f)*}_{\lambda' m'} \times \\ \times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i \mid \rho^{(i)} \mid M_i'\rangle \times \\ \times \langle M_f' \mid \rho^{(f)} \mid M_f\rangle \langle \lambda' \mid \rho^{(\gamma)} \mid \lambda\rangle$$

---

* Si los estados inicial y final del sistema se representan por las superposiciones

$$\psi^{(i)} = \sum_n a_n \psi^{(i)}_n, \qquad \psi^{(f)} = \sum_m b_m \psi^{(f)}_m,$$

el elemento de matriz vale

$$\langle f \mid V \mid i\rangle = \sum_{mn} b_m^* a_n V_{mn},$$

y su cuadrado

$$|\langle f \mid V \mid i\rangle|^2 = \sum_{nn'mm'} V_{mn} V^*_{m'n'} a_n a_{n'}^* b_{m'} b_m^*.$$

Para pasar al caso de estados mezclados se aplica la substitución

$$a_n a_{n'}^* \to \rho^{(i)}_{nn'}, \qquad b_{m'} b_m^* \to \rho^{(f)}_{m'm},$$

de modo que

$$|\langle f \mid V \mid i\rangle|^2 \to \sum_{nn'mm'} V_{mn} V^*_{m'n'} \rho^{(i)}_{nn'} \rho^{(f)}_{m'm}.$$

** En las transformaciones del factor signo cabe valerse del hecho de que los números $2J_i$, $2J_f$, $2M_i$, $2M_f$ son todos de igual paridad. Recordaremos también que los números j, m son enteros y que $\lambda = \pm 1$.

(más adelante comprobaremos que la normalización es correcta). Transformemos esta fórmula desarrollando el producto de las dos funciones D en serie (b, 2)

$$D^{(j)}_{\lambda m} D^{(j)*}_{\lambda' m'} = (-1)^{\lambda' + m'} D^{(j)}_{\lambda m} D^{(j)}_{-\lambda', -m'} =$$
$$= (-1)^{\lambda + m} \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} D^{(L)}_{\Lambda\mu}$$

(los índices son $\Lambda = \lambda - \lambda'$, $\mu = m - m'$; los L son números enteros, $L \geqslant 2j$). De esta manera obtenemos finalmente

$$w(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M'_i + m + 1} (2L+1) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M'_f & -m' & -M'_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\boldsymbol{n}) \langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle \langle M'_f | \rho^{(f)} | M_f \rangle \langle \lambda' | \rho^{(\gamma)} | \lambda \rangle. \qquad (48.5)$$

Como antes, Σ representa la suma respecto de todos los índices-m (que se repiten dos veces). $\underset{(m)}{}$ Además, hay que recordar la diferencia que existe entre los índices λ, λ' y los demás índices-m: la suma respecto de los primeros se extiende no a todos los $2j + 1$ valores posibles (para un índice-j dado), sino solamente a los dos valores λ, $\lambda' = \pm 1$ que corresponden a las dos polarizaciones del fotón.

La fórmula (48.5) contiene toda la información necesaria acerca de la distribución angular de los fotones emitidos y de su polarización como también acerca de la polarización de los núcleos secundarios (es decir, de los que han emitido ya el fotón). En todo esto se supone dada la matriz densidad inicial.

Distribución angular

La distribución angular de los fotones se obtendrá sumando respecto de todas las polarizaciones del fotón y del núcleo secundario. El promedio respecto de las polarizaciones se consigue substituyendo las matrices densidad de los estados no polarizados:

$$\langle \lambda | \rho^{(\gamma)} | \lambda' \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle M_f | \rho^{(f)} | M'_f \rangle = \frac{1}{2J_f + 1} \delta_{M_f M'_f}, \qquad (48.6)$$

hecho lo cual la suma se reduce a multiplicar por 2 (para el fotón) o por $2J_f + 1$ (para el núcleo). En otras palabras, la suma se efectúa simplemente substituyendo

$$\langle \lambda | \rho^{(\gamma)} | \lambda' \rangle \to \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle M_f | \rho^{(f)} | M'_f \rangle \to \delta_{M_f M'_f}. \qquad (48.7)$$

Se obtiene así la distribución angular

$$\overline{w}(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} (2L+1) D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle .$$

Esta fórmula se puede simplificar considerablemente efectuando la suma respecto los índices-m.

Observemos ante todo que

$$\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^L \begin{pmatrix} j & j & L \\ -\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{48.8}$$

por lo cual la suma

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{para } L \text{ par} \\ 0 & \text{para } L \text{ impar} \end{cases}$$

Por consiguiente, en la suma respecto de L se conservan solamente los términos con L par, es decir, en ella aparecen solamente las funciones esféricas ($D^{(L)}_{0\mu}$) de órdenes pares. Este resultado se podía haber previsto: en virtud de la conservación de la paridad, la probabilidad debe ser invariante respecto de la inversión, es decir, respecto de la substitución $\boldsymbol{n} \to -\boldsymbol{n}$.

Así, pues,

$$\overline{w}(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{4\pi} \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}) \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle .$$

Obsérvese que es fácil comprobar aquí la normalización: en virtud de la fórmula

$$\int D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}) \frac{d\sigma}{4\pi} = \delta_{L0} \delta_{\mu 0} \quad ,$$

después de integrar respecto de las direcciones queda únicamente el término con $L = \mu = 0$; mediante las fórmulas

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}},$$
$$\sum_{M_f m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J_i+1}, \quad \mathrm{Tr}\, \rho^{(i)} = 1$$

se comprueba que este término es igual a 1.

La suma respecto de $mm'M_f$ en la suma segunda que aparece en $\overline{w}(\boldsymbol{n})$ se lleva a cabo mediante la fórmula III (108.4). En definitiva obtendremos para la distribución angular de los fotones la siguiente fórmula final:

$$\overline{w}(\boldsymbol{n}) = (-1)^{1+J_i+J_f} \frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{4\pi} \times$$
$$\times \sum_{L \text{ par}} (-i)^L \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix} \sum_{\mu} \mathcal{P}^{(i)*}_{L\mu} D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}), \tag{48.9}$$

donde se ha hecho

$$\mathcal{P}^{(i)}_{L\mu} = i^L \sqrt{(2L+1)(2J_i+1)} \sum_{M_i M_i'} (-1)^{J_i - M_i'} \begin{pmatrix} J_i & L & J_i \\ -M_i' & \mu & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle,$$
$$\mathcal{P}^{(i)*}_{L\mu} = (-1)^{L-\mu} \mathcal{P}^{(i)}_{L,-\mu}. \tag{48.10}$$

La segunda suma en (48.9) se extiende a todos los $|\mu| \leq L$, y la primera, a todos los valores pares de L que cumplen las condiciones

$$L \leqslant 2j, \quad L \leqslant 2J_i \tag{48.11}$$

[estas condiciones son consecuencia de la regla del triángulo a que deben satisfacer los índices-j y los símbolos-3j que figuran en (48.9-10)]. En virtud de estas condiciones, de ordinario no es grande el número de términos en la suma. Así, para $J_i = 0$ ó $1/2$ queda solamente el término con $L = 0$, es decir, la radiación es isótropa (es fácil verificar que el término con $L = 0$ es igual a $1/4$, como debía ser por la condición de normalización). Cuando $J_i = 1$, $3/2$ ó $j = 1$, en la suma respecto de L quedan sólo dos términos: $L = 0$, 2. Observemos también que si la matriz densidad $\rho^{(i)}$ es diagonal ($M_i = M'_i$), se tiene $\mu = 0$ y la función distribución (48.9) toma la forma de un desarrollo en polinomios de Legendre [según (16.5) y (a, 17) las funciones $D^{(L)}_{00}$ se reducen a las funciones $P_L(\cos\theta)$]. Finalmente, si

$$\langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle = \frac{1}{2J_i+1} \delta_{M_i M_i'},$$

es decir, si el núcleo inicial no está polarizado, todos los $\mathcal{P}^{(i)}_{L\mu} = 0$, salvo $\mathcal{P}^{(i)}_{00} = 1$ *.

---

* En efecto, observando que

$$\begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M' & 0 & M \end{pmatrix} = (-1)^{J-M} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \delta_{MM'},$$

se tiene

$$\sum_{MM'} (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \delta_{MM'} = \sqrt{2J+1} \sum_{MM'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M' & 0 & M \end{pmatrix} =$$
$$= \sqrt{2J+1}\, \delta_{L0} \delta_{\mu 0},$$

con lo cual y teniendo en cuenta la definición (48.10) se obtiene el resultado indicado.

Las cantidades $\mathcal{P}_{L\mu}$ resultan convenientes para caracterizar el estado de polarización del núcleo; las llamaremos *momentos de polarización*. La fórmula (48.10) determina estas cantidades en función de la matriz densidad $\rho_{MM'}$. Una comprobación directa permite verificar fácilmente la validez de la fórmula inversa que expresa esta matriz en función de los momentos de polarización:

$$\rho_{MM'} = \sum_{L\mu} \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}\, i^{-L} (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \mathcal{P}_{L\mu} \qquad (48.12)$$

Sea $f_{L\mu}$ un tensor esférico que dependa del estado de polarización del núcleo. De acuerdo con las reglas generales [véase III (14.8)] su valor medio en un estado con matriz densidad $\rho_{MM'}$ es igual a

$$\bar{f}_{L\mu} = \sum_{MM'} \rho_{MM'} \langle JM' | f_{L\mu} | JM \rangle. \qquad (48.13)$$

Expresando los elementos de matriz de las cantidades $f_{L\mu}$ mediante el elemento reducido $\langle J \| f_L \| J \rangle$ de acuerdo con

$$\langle JM' | f_{L\mu} | JM \rangle = i^L (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \langle J \| f_L \| J \rangle$$

e introduciendo los momentos de polarización según la definición (48.10), se obtendrá

$$\bar{f}_{L\mu} = \frac{\langle J \| f_L \| J \rangle}{\sqrt{(2L+1)(2J+1)}} \mathcal{P}_{L\mu}. \qquad (48.14)$$

Polarización del fotón

Para matrices $\rho^{(\gamma)}$ y $\rho^{(f)}$ dadas (junto con $\rho^{(i)}$) la fórmula (48.5) determina la probabilidad de la transición en que se emite un fotón quedando el núcleo en determinados estados de polarización. Estos estados son esencialmente una característica no del proceso de radiación como a tal, sino de aquellos detectores que registran el fotón y el núcleo de retroceso, separando sus polarizaciones determinadas. Más natural resulta otro planteo del problema en el cual el estado final del sistema « núcleo + fotón » no se fija de antemano y lo que se pide es determinar la matriz densidad de polarización de este estado cuando sólo se conoce la dirección de emisión del fotón.

La respuesta a esta cuestión viene dada por la misma fórmula (48.5). Si la representamos en la forma

$$w = \bar{w}(\boldsymbol{n}) \sum_{(m)} \langle M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, M_f';\ \boldsymbol{n}\lambda' \rangle \langle \lambda' | \rho^{(\gamma)} | \lambda \rangle \langle M_f' | \rho^{(f)} | M_f \rangle, \qquad (48.15)$$

la expresión $\langle M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, M'_f;\ \boldsymbol{n}\lambda' \rangle$ será precisamente la matriz densidad buscada, ya que según las reglas generales de la mecánica cuántica la probabilidad w de la transición a un estado que se fija «a priori» viene dada por su «proyección» sobre los datos $\rho^{(\gamma)}\,\rho^{(f)}$. El factor $\overline{w}(\boldsymbol{n})$ se ha separado en (48.15) para que esta matriz esté normalizada por la condición ordinaria

$$\sum_{\lambda M_f} \langle M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda \rangle = 1.$$

Si lo que nos interesa es únicamente la polarización del fotón, hay que sumar respecto de $M_f = M'_f$:

$$\langle \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, \boldsymbol{n}\lambda' \rangle = \sum_{M_f} \langle M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, M_f;\ \boldsymbol{n}\lambda' \rangle.$$

De manera del todo análoga a como se ha deducido la fórmula (48.9), se obtiene

$$\langle \boldsymbol{n}\lambda \,|\, \rho \,|\, \boldsymbol{n}\lambda' \rangle = (-1)^{1+J_i+J_f} \frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{8\pi\,\overline{w}\,(\boldsymbol{n})} \times$$

$$\times \sum_L (-i)^L \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix} \sum_\mu \mathcal{F}^{(i)*}_{L\mu} D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\boldsymbol{n}), \qquad (48.16)$$

($\Lambda = \lambda - \lambda'$) donde la suma se extiende a todos los valores enteros L que satisfacen las condiciones (48.11).

En particular, la polarización circular se determina por el parámetro de Stokes

$$\xi_2 = \langle \boldsymbol{n}1 \,|\, \rho \,|\, \boldsymbol{n}1 \rangle - \langle \boldsymbol{n},\ -1 \,|\, \rho \,|\, \boldsymbol{n},\ -1 \rangle$$

(véase el problema en el § 8). En virtud de la relación (48.8), en esta diferencia se reducen todos los términos con valores de L pares y para ξ_2 se obtiene una fórmula que difiere de la expresión (48.9) tan sólo en que la suma se extiende a valores impares de L (en vez de pares).

Polarización de los núcleos secundarios

Finalmente, si nos interesa tan sólo la polarización final de los núcleos, hay que hacer $\rho^{(\gamma)} \to \delta$. Si, además, se efectúa también la integración respecto de las direcciones del fotón, la matriz densidad del núcleo secundario será:

$$\langle M_f \,|\, \rho \,|\, M'_f \rangle = \int \overline{w}\,(\boldsymbol{n}) \langle M_f\, \boldsymbol{n} \,|\, \rho \,|\, M'_f \boldsymbol{n} \rangle\, d\sigma =$$

$$= (2J_i+1) \sum_{m M_i M'_i} (-1)^{2J_i - M_i - M'_i} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M'_f & -m & M'_i \end{pmatrix} \langle M_i \,|\, \rho^{(i)} \,|\, M'_i \rangle.$$

Los momentos de polarización calculados según esta matriz son iguales a

$$\mathcal{P}_{L\mu}^{(f)} = (-1)^{J_i+J_f+L+j}\sqrt{(2J_i+1)(2J_f+1)}\begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ J_f & J_f & j \end{Bmatrix}\mathcal{P}_{L\mu}^{(i)}. \qquad (48.17)$$

Si el núcleo inicial no está polarizado, tampoco lo estará el núcleo final. Sin embargo, en este caso se tendrá una polarización de correlación, es decir, una polarización del núcleo después de emitir el fotón en una dirección dada. Haciendo $\rho^{(i)} \to \delta/(2J_i+1)$ [y de acuerdo con esto $\varpi(\boldsymbol{n}) = 1/4\pi$] y efectuando un cálculo análogo al que permitió deducir (48.9), obtendremos para la matriz densidad que describe la polarización

$$\langle M_f;\ \boldsymbol{n} \mid \rho \mid M_f';\ \boldsymbol{n}\rangle =$$

$$= (2j+1)(-1)^{J_i+M_f'+1}\sum_{L\,\text{par}}(2L+1)\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_f & L & J_f \\ -M_f' & \mu & M_f \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix}D_{0\mu}^{(L)}(\boldsymbol{n}). \qquad (48.18)$$

Los momentos de polarización que corresponden a esta matriz son

$$\mathcal{P}_{L\mu}^{(f)} = i^L(-1)^{1+J_i+J_f}(2j+1)\sqrt{(2L+1)(2J_f+1)}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix}D_{0\mu}^{(L)}(\boldsymbol{n}). \qquad (48.19)$$

Sólo aparecen momentos de orden par (también esto es consecuencia de la conservación de la paridad que hemos recordado ya).

Si el núcleo secundario emite a su vez radiación, al estar polarizado dará lugar a una distribución no-isótropa de los fotones. Dado que los momentos de polarización (48.19) dependen de la dirección $\boldsymbol{n}$ del fotón emitido en la primera transición, se manifiesta una determinada correlación entre las direcciones de los fotones emitidos sucesivamente (para un núcleo primario no polarizado). De manera análoga pueden considerarse también otros fenómenos de correlación en las emisiones en cascada (correlación de polarizaciones, etc.) *.

PROBLEMA

Establecer la relación entre los momentos de polarización $\mathcal{P}_{1\mu}$ y $\mathcal{P}_{2\mu}$ y los valores medios del vector momento cinético $\boldsymbol{J}$ y del tensor momento cuadripolar Q_{ik}.

Solución. Los elementos reducidos del vector $\boldsymbol{J}$ y del tensor Q_{ik} se determinan a partir de las igualdades

$$\overline{J^2} = \frac{\langle J \| J \| J\rangle^2}{2J+1}, \quad \overline{Q_{ik}^2} = \frac{\langle J \| Q \| J\rangle^2}{2J+1}$$

* Una exposición detallada de estas cuestiones puede encontrarse en el artículo de *A. Z. Dolginov* en el libro « Gamma-luchi » (Radiación gamma), Editorial AN SSSR, 1961.

[cf. III (107.10-11)]. El operador Q_{ik} se expresa en función de los operadores del momento cinético por la fórmula III (75.2):

$$Q_{ik} = \frac{3Q}{2J(2J-1)}\left(J_iJ_k + J_kJ_i - \frac{2}{3}\mathbf{J}^2\delta_{ik}\right).$$

De aquí se sigue el valor medio

$$\overline{Q_{ik}^2} = Q^2\frac{6(J+1)^2}{2J-1}.$$

Los elementos de matriz reducidos son:

$$\langle J \| J \| J \rangle = \sqrt{J(J+1)(2J+1)},$$
$$\langle J \| Q \| J \rangle = Q\frac{(J+1)\sqrt{6(2J+1)}}{2J-1}.$$

De (48.18) se sigue ahora que los momentos de polarización $\mathcal{P}_{1\mu}$ coinciden con las componentes esféricas del vector

$$\sqrt{\frac{3}{J(J+1)}}\,\bar{J},$$

y los momentos $\mathcal{P}_{2\mu}$, con las componentes esféricas del tensor

$$\sqrt{\frac{5}{6}}\,\frac{2J-1}{J+1}\,\frac{\overline{Q}_{ik}}{Q}.$$

§ 49. Radiación de los átomos. Tipo eléctrico *

Las energías de los electrones exteriores de un átomo (que participan en las transiciones de radiación óptica) en una estimación grosera son del orden de magnitud de $E \sim me^4/\hbar^2$, de modo que para las longitudes de onda emitidas se tiene $\lambda \sim \hbar c/E \sim \hbar^2/\alpha me^2$. Ahora bien, las dimensiones del átomo son tales que $a \sim \hbar^2/me^2$. Por ello en los espectros ópticos de los átomos, como regla general, se cumple la desigualdad $a/\lambda \sim \alpha \ll 1$. El mismo orden de magnitud tiene la razón $v/c \sim \alpha$, donde v son las velocidades de los electrones ópticos.

Así, pues, en los espectros ópticos de los átomos se cumple la condición en virtud de la cual la probabilidad de la emisión dipolar eléctrica (si la permiten las reglas de selección) supera con mucho las probabilidades de las transiciones multipolares **. Debido a esto, en la espectroscopia de los átomos el papel más importante lo representan precisamente las transiciones dipolares eléctricas.

Conforme se señaló ya, tales transiciones están sometidas a reglas de selección rigurosas respecto del momento cinético total del átomo J y de la paridad P ***:

---

* En los §§ 49-55 utilizamos unidades ordinarias.

** Los valores típicos de la probabilidad de las transiciones dipolares en la región óptica del espectro de los átomos son del orden de magnitud de $10^8 s^{-1}$.

*** Designaremos ahora los números cuánticos de los estados iniciales y finales por letras sin apóstrofo y con apóstrofo, respectivamente. Con las letras n, n' se designarán los conjuntos de números cuánticos restantes que, junto con los indicados explícitamente, determinan unívocamente los estados del sistema.

$$|J' - J| \leqslant 1 \leqslant J + J', \tag{49.1}$$

$$PP' = -1 \tag{49.2}$$

La desigualdad $|J' - J| \leq 1$ significa que el momento J puede cambiar únicamente en 0, ± 1: en virtud de la desigualdad $J + J' \geq 1$ queda prohibida además la transición $0 \to 0$. Las paridades de los estados inicial y final deben ser opuestas *.

La probabilidad de radiación en la transición $nJM \to n'J'M'$ viene determinada por el correspondiente elemento de matriz del momento dipolar del átomo de acuerdo con

$$w(nJM \to n'J'M') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\langle n'J'M' | d_{-m} | nJM \rangle|^2, \tag{49.3}$$

$$\omega = \omega(nJ \to n'J').$$

Sumando (49.3) respecto de todos los valores $M' = M - m$ (para un M dado), obtendremos la probabilidad total de radiación con frecuencia dada a partir del nivel atómico nJ. La suma se efectúa mediante (46.20) y da **

$$w(nJ \to n'J') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \frac{1}{2J+1} |\langle n'J' \| d \| nJ \rangle|^2. \tag{49.4}$$

El cuadrado del módulo del elemento de matriz reducido que aquí aparece se llama a veces *intensidad de la raya de la transición;* esta cantidad es simétrica respecto de los estados inicial y final.

A otras conclusiones acerca de las probabilidades de transición en los espectros cabe llegar solamente concretando más el carácter de los estados del átomo. No nos detendremos aquí a examinar los métodos de cálculo de elementos de matriz, cuyo grado de aproximación no posee un carácter netamente teórico. Deduciremos únicamente algunas relaciones válidas para una categoría de estados bastante amplia (en particular en el caso de átomos ligeros) construidos siguiendo el tipo de enlace *LS* (véase III, § 72). Tales estados se caracterizan no sólo por el momento cinético total, sino también por valores determinados de los momentos cinético orbital, L, y de spin, S, que en este caso se conservan.

Dado que el momento dipolar es una cantidad puramente orbital, su operador conmuta con el operador de spin, es decir, su matriz es diagonal respecto del número S. Pero para el número L valen las mismas reglas de selección relativas al momento dipolar que en el caso de un vector orbital cualquiera (véase III, § 29). Así, pues, las transiciones entre estados construidos según el esquema *LS* están sometidas a las reglas de selección adicionales [junto con las (49.1-2)]:

$$S' - S = 0, \tag{49.5}$$

---

* El primero en establecer la regla de selección respecto de la paridad fue *O. Laporte*, 1924.

** La intensidad observada de radiación se obtiene multiplicando w por $\hbar\omega$ y por el número de átomos en la fuente que se encuentran en el estado excitado dado (N_{nJ}). Así, en un gas a temperatura T este número es $N_{nJ} \propto (2J + 1) \exp(-E_{nJ}/T)$; el factor $(2J + 1)$ es el peso estadístico del nivel con momento cinético J.

$$|L'-L| \leqslant 1 \leqslant L+L'. \tag{49.6}$$

Subrayaremos una vez más que estas reglas son aproximadas y se violan al tener en cuenta la interacción spin-órbita.

Haremos observar que la regla (49.5) (que prohibe las transiciones entre términos de diferente multiplicidad) es correcta no sólo para las transiciones del tipo dipolar eléctrico, sino para todas las transiciones de carácter eléctrico: los momentos multipolares eléctricos de todo orden son tensores orbitales, con lo cual los elementos de matriz son diagonales respecto del spin. Así, para las transiciones cuadripolares eléctricas, junto con las reglas generales

$$|J'-J| \leqslant 2 \leqslant J+J', \qquad PP'=1, \tag{49.7}$$

en el caso del acoplamiento LS se cumplen las reglas de selección adicionales:

$$S'-S=0, \qquad |L'-L| \leqslant 2 \leqslant L+L'. \tag{49.8}$$

La dependencia de la probabilidad de transición respecto de los números S, L, J' se puede determinar en forma explícita. Esta cuestión se resuelve directamente mediante las fórmulas generales para los elementos de matriz de los tensores esféricos en la composición de momentos. Según la fórmula III (109.3) tenemos*

$$|\langle n'L'SJ' \| d \| nLSJ\rangle|^2 = (2J+1)(2J'+1) \begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L' \| d \| nL\rangle|^2. \tag{49.9}$$

Substituyendo este valor en (49.4), se obtendrá

$$w(nLSJ \to n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^5}(2J'+1) \begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L' \| d \| nL\rangle|^2, \tag{49.10}$$

con $\omega = \omega(nLS \to n'L'S)$**.

Para estas probabilidades cabe obtener una regla de sumas. Para los cuadrados de los símbolos-6j vale la fórmula de sumación [véase III (108.7)]

$$\sum_{J'} (2J'+1) \begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{1}{2L+1}. \tag{49.11}$$

Mediante ella se encuentra, a partir de (49.10),

$$\sum_{J'} w(nLSJ \to n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \frac{1}{2L+1} |\langle n'L' \| d \| nL\rangle|^2. \tag{49.12}$$

Obsérvese que esta cantidad resulta independiente del valor inicial de J.

---

* En las fórmulas III, § 109, hay que entender ahora por «momentos cinéticos de los subsistemas 1 y 2» el momento orbital y el spin del átomo, de cuya interacción mutua prescindimos. El papel de las cantidades $f_{kq}^{(j)}$ lo representa el vector orbital d_q.

** Prescindiendo de la interacción spin-órbita en el cálculo de los elementos de matriz, prescindimos también de la dependencia de la frecuencia respecto de J y J', es decir, de la estructura fina de los niveles inicial y final del átomo.

Si se trata de la radiación emitida por un gas cuya temperatura es mucho mayor que los intervalos de estructura fina del término atómico nSL, los estados con valores de J diferentes están poblados de manera uniforme, es decir, todos los valores de J son equiprobables. La probabilidad de que el átomo se encuentre en un nivel con determinado valor de J es igual en tal caso a

$$\frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)}, \tag{49.13}$$

es decir, es igual a la razón del peso estadístico de este nivel al peso estadístico total del término nSL. El promedio de las expresiones (49.10) o de sus sumas (49.12) respecto de estas probabilidades se reduce a multiplicar por el factor (49.13); designaremos este promedio por un trazo sobre la letra correspondiente. La probabilidad total de radiación de todas las líneas del multiplete espectral (formado por todas las posibles transiciones entre las componentes de estructura fina de los dos términos nSL y $n'SL'$) es la suma

$$\overline{w}(nLS \to n'L'S) = \sum_J \sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ'). \tag{49.14}$$

Dado que, claro está, $\sum_J (2J+1) = (2S+1)(2L+1)$, para la probabilidad total se obtiene una expresión que coincide con (49.12). Por consiguiente, para la probabilidad relativa (o, lo que es lo mismo, para la intensidad relativa) de una raya particular obtendremos

$$\frac{\overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'L'S)} = \frac{(2J+1)(2J'+1)}{(2S+1)} \begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2. \tag{49.15}$$

El análisis de los valores numéricos dados por esta fórmula pone de manifiesto que entre las rayas de un multiplete las más intensas son aquellas para las cuales $\Delta J = \Delta L$ (se las llama *rayas principales* para distinguirlas de las demás componentes del multiplete, llamadas *rayas satélite*). Además, la intensidad de las rayas principales es tanto mayor cuanto mayor es el valor inicial de J.

La suma de las cantidades (49.15) respecto de J o de J' da

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'LS)} &= \frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)}, \\ \frac{\sum_{J} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'L'S)} &= \frac{2J'+1}{(2L+1)(2S+1)}. \end{aligned} \tag{49.16}$$

Por lo tanto, la suma de las intensidades de todas las rayas del multiplete espectral que poseen el mismo nivel inicial (o final) es proporcional al peso estadístico de dicho nivel inicial (o final).

Consideremos ahora la estructura hiperfina de las rayas espectrales de un átomo.

Recordaremos que el desdoblamiento hiperfino de los niveles atómicos es resultado de la interacción de los electrones con el spin del núcleo, si este último es diferente de cero (véase III, § 120). El momento cinético total del átomo (junto con el núcleo) $\boldsymbol{F}$ se compone del momento total de los electrones $\boldsymbol{J}$ y del momento cinético del núcleo $\boldsymbol{I}$. Cada una de las componentes de estructura hiperfina del nivel nJ se caracteriza por su valor del número cuántico F.

La ley exacta de conservación del momento cinético conduce ahora a la regla de selección rigurosa para el momento total F; para la radiación dipolar eléctrica se tiene

$$|F' - F| \leqslant 1 \leqslant F + F'. \tag{49.17}$$

Pero teniendo en cuenta el carácter extremadamente débil de la interacción de los electrones con el spin del núcleo, se puede prescindir por completo de ella al calcular los elementos de matriz de los momentos eléctricos (o magnéticos) de la envuelta electrónica del átomo. Por ello, siguen siendo válidas también las anteriores reglas de selección relativas al momento cinético de los electrones J y a su paridad. En particular, en virtud de esta última son imposibles las transiciones dipolares eléctricas entre componentes de estructura hiperfina de un mismo término: todos estos niveles poseen igual paridad, mientras que dichas transiciones son posibles únicamente entre estados de paridad diferente.

Dado que el operador del momento dipolar conmuta con el spin del núcleo, se puede hallar la dependencia de los elementos de matriz respecto de los números I y F en forma explícita; estos cálculos difieren de los realizados antes para el enlace LS tan sólo en cambios de notación evidentes. La probabilidad de radiación, sumada respecto de los valores finales de la proyección del momento cinético total $\boldsymbol{F}$, es:

$$w(nJIF \to n'J'IF') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \frac{1}{2F+1} |\langle n'J'IF' \| d \| nJIF \rangle|^2, \tag{49.18}$$
$$\omega = \omega(nJ \to n'J'),$$

donde el cuadrado del elemento de matriz reducido vale

$$|\langle n'J'IF' \| d \| nJIF \rangle|^2 = (2F+1)(2F'+1) \begin{Bmatrix} J' & F' & I \\ F & J & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'J' \| d \| nJ \rangle|^2. \tag{49.19}$$

PROBLEMA

La mayoría de las rayas en los espectros de los metales alcalinos se puede describir como resultado de transiciones de un electrón exterior (óptico) en el campo autoconsistente del átomo residual, que forma una configuración cerrada; el estado del átomo se construye según el tipo de enlace LS. Con estas hipótesis, determinar las intensidades relativas de las componentes de estructura fina de las rayas espectrales.

Solución. Los momentos totales L y $S = 1/2$ del átomo coinciden con el momento cinético orbital y el spin del electrón óptico. En consecuencia, la paridad del estado es igual a $(-1)^L$ (la paridad de la configuración cerrada del átomo residual es positiva). Las reglas de selección respecto de la paridad prohiben, por lo tanto, la transición dipolar con $L' = L$, de modo que sólo son posibles las transiciones en las que $L' - L = \pm 1$. Las transiciones entre las componentes de niveles doblete nL y n', $L - 1$ dan lugar, debido a la regla de selección respecto de J, a tres rayas en total

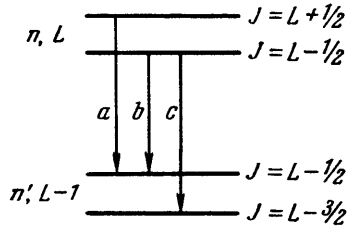


FIG. 1

(figura 1). La manera más fácil de determinar sus intensidades relativas (que designaremos por a, b, c), sin acudir directamente a la fórmula (49.15), consiste en partir de las reglas (49.16). Formando las razones de las intensidades totales de las rayas que parten de un mismo nivel inicial (o que van a parar a un mismo nivel final), se obtendrán las dos igualdades:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{2L}{2L+2}, \quad \frac{a+b}{c} = \frac{2L}{2L-2},$$

de donde

$$a : b : c = \\ = [(L+1)(2L-1)] : 1 : [(L-1)(2L+1)].$$

Si $L = 1$, el nivel inferior no se desdobla, falta la raya c y se tiene $a/b = 2$.

§ 50. Radiación de los átomos. Tipo magnético

El momento magnético de un átomo viene dado en orden de magnitud por el magnetón de Bohr: $\mu \sim e\hbar/mc$. Esta estimación difiere en el factor α del orden de magnitud del momento dipolar eléctrico: $d \sim ea \sim \hbar^2/me$ (dado que también $v/c \sim \alpha$, se tiene $\mu \sim dv/c$, como era de esperar). De aquí se sigue que la probabilidad de la radiación dipolar magnética ($M1$) por un átomo es aproximadamente α^2 veces menor que la probabilidad de radiación dipolar eléctrica (de igual frecuencia). En consecuencia, la radiación magnética desempeña de hecho un papel tan sólo para las transiciones prohibidas por las reglas de selección del caso eléctrico.

En lo que concierne a la radiación cuadripolar eléctrica ($E2$), la razón de su probabilidad a la probabilidad de la radiación $M1$ es en orden de magnitud igual a

$$\frac{E2}{M1} \sim \frac{(ea^2)^2 \omega^2/c^2}{\mu^2} \sim \frac{a^4 m^2 \omega^2}{\hbar^2} \sim \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2 \tag{50.1}$$

(el momento cuadripolar $\sim ea^2$, $E \sim \hbar^2/ma^2$ es la energía del átomo, ΔE repre-

senta la variación de energía en la transición). Vemos, pues, que para las frecuencias atómicas medias (es decir, para $\Delta E \sim E$) las probabilidades de las radiaciones $E2$ y $M1$ son del mismo orden de magnitud (a condición, claro está, de que una y otra estén permitidas por las reglas de selección). Pero si $\Delta E \ll E$ (por ejemplo, para transiciones entre componentes de estructura fina de un mismo término), la radiación $M1$ es más probable que la radiación $E2$.

Las transiciones dipolares magnéticas están sometidas a las reglas de selección rigurosas

$$|J' - J| \leqslant 1 \leqslant J + J', \tag{50.2}$$

$$PP' = 1. \tag{50.3}$$

En el caso del acoplamiento LS entran en juego reglas de selección adicionales, aunque todavía más restrictivas que en el caso eléctrico. Esta última circunstancia está vinculada con una propiedad específica del momento magnético de un átomo, propiedad que resulta de la identidad de todas las partículas en el sistema (de los electrones). En efecto, el operador momento magnético del átomo se expresa en función de los operadores de sus momentos totales orbital y de spin:

$$\boldsymbol{\mu} = -\mu_0 (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = -\mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{S}), \tag{50.4}$$

donde $\mu_0 = |e|\hbar/2mc$ es el magnetón de Bohr (véase III, § 112). Dado que el momento cinético total se conserva, el operador $\mathbf{J}$ carece de elementos no diagonales respecto de la energía, de modo que al considerar las transiciones radiativas basta escribir $\boldsymbol{\mu} = -\mu_0 \mathbf{S}$ *.

Cuando se prescinde de la interacción spin-órbita, cada uno de los momentos $\boldsymbol{L}$ y $\mathbf{S}$ se conserva por separado. En consecuencia, el operador $\mathbf{S}$ es diagonal respecto de todos los números cuánticos nSL que caracterizan el término no desdoblado. Para que tenga lugar una transición es necesario, por consiguiente, que varíe el número J. De esta manera tenemos las reglas de selección:

$$n' = n, \quad S' = S, \quad L' = L, \quad J' - J = \pm 1, \tag{50.5}$$

es decir, las transiciones son solamente posibles entre componentes de estructura fina de un mismo término.

El cálculo de la probabilidad de radiación en este caso puede efectuarse hasta el final. Cambiando como corresponde las notaciones en la fórmula (49.10), se tiene

$$w(nLSJ \to nLSJ') = \frac{4\omega^3 \mu_0^2}{3\hbar c^3} (2J' + 1) \begin{Bmatrix} S & J' & L \\ J & S & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle S \| S \| S \rangle|^2.$$

* Constituyen excepción los casos en los que el momento electrónico del átomo $\mathbf{J}$ no se conserva: cuando se tiene en cuenta la estructura hiperfina, en presencia de un campo exterior, etc. (Véanse los problemas.)

El elemento de matriz reducido del spin que aquí aparece y relativo a las funciones propias del mismo viene dado por la fórmula

$$\langle S \| S \| S \rangle = \sqrt{S(S+1)(2S+1)} \tag{50.6}$$

(véase III, nota en la página 109). El símbolo-6j que necesitamos es igual a

$$\begin{Bmatrix} S & J-1 & L \\ J & S & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{(L+S+J+1)(L+S-J+1)(L-S+J)(S-L+J)}{S(2S+1)(2S+2)(2J-1)2J(2J+1)} \tag{50.7}$$

(véase la tabla en III, § 108). El resultado que se obtiene es

$$w(nLSJ \to nLS,\ J-1) = \frac{2J+1}{2J-1}\, w(nLS,\ J-1 \to nLSJ) =$$
$$= \frac{\omega^3 \mu_0^2}{3\hbar c^3 (2J+1) J}(L+S+J+1)(L+S-J+1)(J+S-L)(J+L-S). \tag{50.8}$$

Las transiciones entre componentes de estructura hiperfina de un mismo nivel (sus frecuencias se encuentran en la región de las ondas de radio) en modo alguno pueden producirse en la forma dipolar eléctrica, ya que todas estas componentes poseen igual paridad. Sin cambio de ésta se producen las transiciones $E2$ y $M1$. Pero dada la relativamente muy pequeña amplitud de los intervalos de estructura hiperfina, la radiación $E2$ es poco probable comparada con la $M1$ [cf. (50.1)], de modo que dichas transiciones se producen en la forma dipolar magnética.

PROBLEMAS

1. Hallar la probabilidad de una transición $M1$ entre componentes de estructura hiperfina de un mismo nivel.

Solución. La probabilidad de la transición viene dada por las fórmulas (49.18-19) en las que figurará ahora el elemento de matriz reducido diagonal del momento magnético: $\langle nJ \| \mu \| nJ \rangle$. Su valor puede escribirse sin más observando que el elemento de matriz completo (no reducido) $\langle nJM \mid \mu_z \mid nJM \rangle$ determina justamente el desdoblamiento del nivel dado en el efecto Zeeman (véase III, § 112) y es igual a $-\mu_0 g M$, donde g es el factor de Landé. En cuanto al elemento de matriz reducido, se tiene [véase III (29.7)]

$$\langle nJ \| \mu \| nJ \rangle = \frac{1}{M}\sqrt{J(J+1)(2J+1)}\, \langle nJM \mid \mu_z \mid nJM \rangle =$$
$$= -\mu_0 g \sqrt{J(J+1)(2J+1)}.$$

Se encuentra así para la probabilidad buscada el resultado *

---

* Un ejemplo interesante lo ofrece la transición entre componentes de estructura hiperfina del nivel fundamental del átomo de hidrógeno ($1s^1/_2$), rigurosamente prohibida no sólo como $E1$, sino también como $E2$ (esto último por la regla que prohibe la transición cuadripolar con $J + J' = 1$). A esta transición corresponde la frecuencia $\omega = 2\pi \cdot 1{,}42 \cdot 10^9\, s^{-1}$ (longitud de onda $\lambda = 21$ cm). Haciendo $g = 2$, $I = 1/2$, $J = 1/2$, $F = 1$, $F' = 0$, obtendremos

$$w = \frac{4\omega^3 \mu_0^2}{3\hbar c^3} = 2{,}85 \cdot 10^{-15}\ s^{-1}.$$

$$w(nJIF \to nJI,\ F-1) = \frac{2F+1}{2F-1}\, w(nJI,\ F-1 \to nJIF) =$$

$$= \frac{\omega^3 \mu_0^2 g^2}{3\hbar c^3 (2F+1) F} (J+I+F+1)(J+I-F+1)(F+J-I)(F-J+I).$$

Esta expresión difiere de (50.8) únicamente en cambios de notación evidentes y en el factor suplementario g^2.

2. Hallar la probabilidad de una transición $M1$ entre las componentes Zeeman de un mismo nivel atómico.

Solución. Se trata de una transición $M \to M-1$ en la que no varían los valores nJ; la frecuencia de la transición [véase más adelante (51.3)] es: $\hbar\omega = \mu_0 g H$ (g es el factor de Landé). El elemento de matriz de la componente esférica μ_{-1} del vector $\boldsymbol{\mu}$ vale:

$$|\langle nJ,\ M-1 \,|\, \mu_{-1} \,|\, nJM \rangle| = \sqrt{\frac{(J-M+1)(J+M)}{2J(J+1)(2J+1)}}\, |\langle nJ \,||\, \mu \,||\, nJ \rangle| =$$

$$= -\mu_0 g \sqrt{\frac{1}{2}(J-M+1)(J+M)}$$

[véase III (27.12) y el problema que precede]. Para la probabilidad de transición se tiene

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |(nJ,\ M-1 \,|\, \mu_{-1} \,|\, nJM)|^2 = \frac{2\mu_0^5 H^3}{3\hbar^4 c^3} (J-M+1)(J+M).$$

§ 51. Radiación de los átomos. Efectos Zeeman y Stark

En un campo magnético exterior H (que suponemos débil) cada nivel atómico con momento cinético total J se desdobla en $2J+1$ niveles

$$E_M = E^{(0)} + \mu_0 g M H, \tag{51.1}$$

donde $E^{(0)}$ es el nivel no perturbado, μ_0 el magnetón de Bohr, g el factor de Landé y M la proyección del momento J sobre la dirección del campo (véase III, § 112). La degeneración respecto de las direcciones del momento cinético desaparece así por completo.

De manera análoga se desdoblan también las rayas espectrales que resultan de transiciones entre dos niveles desdoblados. El número de componentes de la raya se determina por la regla de selección para el número M según la cual, en la radiación dipolar, debe ser *

$$m = M - M' = 0,\ \pm 1. \tag{51.2}$$

Las componentes resultantes de transiciones con $m = 0$ y $m = \pm 1$ se llaman componentes-π y componentes-σ, respectivamente. Sus frecuencias son:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_\pi &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H (g - g') M, \\ \hbar\omega_\sigma &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H [gM - g'(M \pm 1)]. \end{aligned} \tag{51.3}$$

* Además de esta regla, están prohibidas las transiciones con $M = M' = 0$ si a la vez es $J' = J$. Esto se ve inmediatamente en las expresiones generales III (29.7) de los elementos de matriz de un vector arbitrario.

En el caso particular en que $g = g'$, tenemos

$$\hbar\omega_\pi = \hbar\omega_0, \qquad \hbar\omega_\sigma = \hbar\omega^{(0)} \mp \mu_0 gH, \tag{51.4}$$

con independencia del valor de M; dicho de otra manera, en este caso la raya se desdobla en un triplete con una componente π no desplazada y, simétricamente colocadas a ambos lados de la misma, dos componentes σ (este es el llamado *efecto Zeeman* « normal »).

La probabilidad total de emisión (en todas direcciones) es proporcional al cuadrado del módulo $|\langle n'J'M'|d_{-m}|nJM\rangle|^2$. Por ello, en virtud de la fórmula (46.19) con $j = 1$, la probabilidad relativa de radiación para cada una de las componentes Zeeman de una raya espectral es igual a

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2. \tag{51.5}$$

En el caso particular del efecto Zeeman « normal », se tienen en total tres componentes, cada una de las cuales resulta de transiciones con todos los M iniciales para un m dado. Puesto que

$$\sum_{MM'} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3} \tag{51.6}$$

[véase III (106.12)], en este caso la radiación de las tres componentes es igualmente probable.

Un mayor interés presenta, sin embargo, la intensidad relativa de las componentes Zeeman cuando se observan en una dirección determinada (respecto de la dirección del campo magnético aplicado a la fuente luminosa). Según (45.5), la probabilidad de radiación (y con ella también la intensidad de la raya) en una dirección dada $\boldsymbol{n}$ es proporcional a $\Sigma|\boldsymbol{e}^* \cdot \boldsymbol{d}_{fi}|^2$, donde la suma se extiende a las dos polarizaciones independientes $\boldsymbol{e}$ posibles para el $\boldsymbol{n}$ dado.

Cuando se observa a lo largo del campo (eje z), esta suma vale

$$|(d_x)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2,$$

o bien, pasando a componentes esféricas:

$$|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2.$$

Esto significa que en una dirección longitudinal (respecto del campo) se observan solamente las dos componentes σ ($m = \pm 1$). Sus intensidades son proporcionales a

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2. \tag{51.7}$$

Dado que poseen valores determinados de la proyección del momento cinético m

a lo largo de la dirección de propagación, estas rayas tienen una polarización circular, levógira ($m = 1$) y dextrógira ($m = -1$) (véase § 8).

Si la radiación se observa en una dirección perpendicular al campo (dirección que tomaremos como eje x), la intensidad resulta proporcional a la suma

$$|(d_z)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2 = |(d_0)_{fi}|^2 + \frac{1}{2}\{|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2\}.$$

Así, pues, en una dirección transversal se observan dos componentes σ y una componente π con intensidades que son proporcionales a

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2 \tag{51.8}$$

respectivamente (las intensidades de las componentes σ son la mitad que en el caso de observación longitudinal). Además, la componente π está polarizada linealmente a lo largo del eje z y las componentes σ se observan en aquella dirección como polarizadas linealmente a lo largo del eje y.

Hay que observar que las intensidades relativas de las componentes Zeeman vienen por completo determinadas por los valores iniciales y finales de J y M, con independencia de las otras características de los niveles.

Las reglas de selección prohiben las transiciones dipolares eléctricas entre componentes Zeeman de un mismo nivel, puesto que todas ellas poseen la misma paridad. Por la misma causa que se señaló al final del último párrafo en el caso de las transiciones entre componentes de estructura hiperfina de un nivel, dichas transiciones se producen en la forma dipolar magnética. En virtud de la regla de selección respecto del número M, las transiciones tienen lugar solamente entre componentes contiguas ($M' - M = \pm 1$)*.

El desdoblamiento de los niveles de un átomo en un campo eléctrico débil *(efecto Stark)*, en contraste con el desdoblamiento de un campo magnético, no conduce a una supresión total de la degeneración según las direcciones del momento cinético. Todos los niveles, con la excepción de los niveles en los que $M = 0$, presentan una degeneración doble: a cada uno corresponden dos estados con las proyecciones del momento M y $-M$.

El cálculo de las intensidades relativas de las componentes Stark de una raya espectral es del todo análogo al expuesto antes para el efecto Zeeman**. Con todo, no hay que perder de vista que a la intensidad de las componentes π contribuyen (cuando $M \neq 0$) las transiciones $M \to M$ y $-M \to -M$, y a la intensidad de las

---

* Las frecuencias de estas transiciones se encuentran de ordinario en la gama centimétrica, y se observan en la absorción y en la emisión inducida (resonancia paramagnética de los electrones): los átomos absorbentes se encuentran en un intenso campo magnético constante (que provoca el desdoblamiento Zeeman) y en el campo débil de radiofrecuencia correspondiente a la resonancia.

** Nos referimos aquí al efecto Stark cuadrático, efecto que se manifiesta en todos los átomos con excepción del hidrógeno (véase III, § 76). El campo se supone tan débil que el desdoblamiento que provoca de los niveles es pequeño, incluso comparado con los intervalos de estructura fina.

componentes σ, las transiciones $M \to M \pm 1$ y $-M \to -(M \pm 1)$. En consecuencia, por ejemplo, en la observación transversal del efecto las intensidades de las componentes π son proporcionales a

$$2\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2,$$

y las intensidades de las componentes σ lo son a las sumas

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M\pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M\mp 1 & \pm 1 & M \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M\pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2$$

(recordemos que al cambiar de signo todos los números de la segunda fila, los símbolos-3*j* pueden cambiar únicamente de signo, con lo que no varían sus cuadrados).

En un campo exterior, incluso si es débil, el momento cinético $\boldsymbol{J}$ deja en rigor de conservarse; en un campo uniforme se cumple de manera exacta únicamente la conservación de la proyección del momento M. Por ello, también en las transiciones radiativas en un campo débil la conservación del momento cinético se convierte en algo no necesario y en el espectro de los átomos pueden aparecer rayas prohibidas por las reglas ordinarias de selección.

El cálculo de las intensidades de estas rayas se reduce al de las correcciones en la matriz del momento dipolar, lo que a su vez exige la determinación de las correcciones en las funciones de onda de los estados estacionarios. En la primera aproximación de la teoría de perturbaciones (respecto del campo exterior débil), en la función de onda aparecen « mezclas » de estados que se encuentran ligados con el de partida por elementos de matriz de la perturbación no nulos ($-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}$ en un campo eléctrico): la contribución de un estado ψ_2 al estado ψ_1 es

$$\frac{-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}_{21}}{E_1 - E_2}\psi_2.$$

Como resultado, en el elemento de matriz de la transición « prohibida » aparece un término

$$\frac{-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}_{21})\boldsymbol{d}_{32}}{E_1 - E_2},$$

que es diferente de cero si están permitidas las transiciones desde el estado « intermedio » 2 a los estados inicial y final 1 y 3.

§ 52. Radiación de los átomos. El átomo de hidrógeno

El átomo de hidrógeno es el único caso en que el cálculo de los elementos de matriz de una transición se puede efectuar hasta el fin en forma analítica (*W. Gordon*, 1929).

La paridad de un estado del átomo de hidrógeno es igual a $(-1)^l$, es decir, viene determinada unívocamente por el momento cinético orbital del electrón (recordemos que el número l, en tanto determina la paridad de un estado, conserva su sentido incluso para las funciones de onda relativistas exactas, es decir, las que tienen en cuenta la interacción spin-órbita). Por consiguiente, la regla de selección respecto de la paridad prohibe rigurosamente las transiciones dipolares eléctricas en las que no cambia l; sólo son posibles las transiciones con $l \to l \pm 1$. En cambio, la variación del número cuántico principal n no está sometida a limitación alguna.

El momento dipolar del átomo de hidrógeno se reduce al vector posición del electrón $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}$. Dado que la función de onda del electrón en el átomo de hidrógeno es el producto de una parte angular y de una función radial R_{nl}, también los elementos de matriz reducidos del vector posición aparecen en forma de producto

$$\langle n',\ l-1 \,\|\, r \,\|\, nl\rangle = \langle l-1 \,\|\, \mathbf{v} \,\|\, l\rangle \int_0^\infty R_{n',\,l-1} r R_{nl} r^2 dr,$$

donde $\langle l-1 \,\|\, \mathbf{v} \,\|\, l\rangle$ son los elementos de matriz reducidos del versor $\mathbf{v}$ de $\boldsymbol{r}$. Éstos son iguales a

$$\langle l-1 \,\|\, \mathbf{v} \,\|\, l\rangle = \langle l \,\|\, \mathbf{v} \,\|\, l-1\rangle^* = i\sqrt{l}$$

(véase el problema en III, § 29). De esta manera,

$$\langle n',\ l-1 \,\|\, r \,\|\, nl\rangle = -\langle nl \,\|\, r \,\|\, n',\ l-1\rangle = i\sqrt{l} \int_0^\infty R_{n',\,l-1} R_{nl} r^3\, dr. \quad (52.1)$$

Las funciones radiales no-relativistas del espectro discreto del átomo de hidrógeno vienen dadas por la fórmula III (36.13) *

$$R_{nl} = \frac{2}{n^{l+2}(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} (2r)^l e^{-r/n} F\left(-n+l+1,\ 2l+2,\ \frac{2r}{n}\right). \quad (52.2)$$

La integral (52.1), que contiene el producto de dos funciones hipergeométricas degeneradas, se calcula mediante las fórmulas deducidas en III, § f **. El cálculo conduce al resultado

$$\langle n',\ l-1 \,\|\, r \,\|\, nl\rangle =$$
$$= i\sqrt{l}\, \frac{(-1)^{n'-1}}{4(2l-1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!\,(n'+l-1)!}{(n-l-1)!\,(n'-l)!}} \frac{(4nn')^{l+1}\,(n-n')^{n+n'-2l-2}}{(n+n')^{n+n'}} \times$$

* En este párrafo utilizamos unidades atómicas. En unidades ordinarias, las expresiones que se dan más adelante para los elementos de matriz de la coordenada deben multiplicarse por $\hbar^2/me^2$ (si se trata de un ion hidrogenoide de número atómico Z, por $\hbar^2/mZe^2$).

** Siguiendo las notaciones introducidas allí, se trata de calcular la integral $J^{12}_{2l+2}(-n+l+1, -n'+l)$. Este cálculo se efectúa mediante las fórmulas (f, 12-16).

$$\times\left\{F\left(-n+l+1,\ -n'+l,\ 2l,\ -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2 F\left(-n+l-1,\ -n'+l,\ 2l,\ -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right)\right\}, \tag{52.3}$$

donde las $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ son funciones hipergeométricas. Dado que los parámetros α, β son iguales en el presente caso a números enteros negativos (o a cero), estas funciones se reducen a polinomios *.

Como referencia, he aquí las expresiones que se obtienen a partir de (52.3) en algunos casos particulares (el valor de l se indica mediante el símbolo espectroscópico $s, p, d, \ldots$):

$$\begin{aligned}
|\langle 1s \| r \| np\rangle|^2 &= \frac{2^8 n^7 (n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}},\\
|\langle 2s \| r \| np\rangle|^2 &= \frac{2^{17} n^7 (n^2-1)(n-2)^{2n-6}}{(n+2)^{2n+6}},\\
|\langle 2p \| r \| nd\rangle|^2 &= \frac{2^{19} n^9 (n^2-1)(n-2)^{2n-7}}{3(n+2)^{2n+7}},\\
|\langle 2p \| r \| ns\rangle|^2 &= \frac{2^{15} n^9 (n-2)^{2n-6}}{3(n+2)^{2n+6}}.
\end{aligned} \tag{52.4}$$

La fórmula (52.3) no vale para las transiciones en que no varía el número cuántico principal n (transiciones entre componentes de estructura fina de un nivel). En este caso ($n = n'$) para efectuar la integración partiremos de la representación de las funciones radiales mediante polinomios generalizados de Laguerre

$$R_{nl} = -\frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}\, e^{-r/n}\left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right). \tag{52.5}$$

En la integral

$$\int_0^\infty R_{n,\,l-1} R_{nl} r^3 dr \sim \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{2l+2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho) L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho)\, d\rho$$

substituiremos uno de los polinomios por su expresión en función de la derivada (véase III, § d):

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = -\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}\, e^{\rho}\rho^{-2l-1}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1} e^{-\rho}\rho^{n+l}.$$

Después de integrar por partes $(n-l-1)$ veces obtendremos una integral de la forma

---

* Tablas numéricas de los elementos de matriz y de las probabilidades de transición pueden encontrarse en la obra de *H. A. Bethe* y *E. E. Salpeter*, Quantum Mechanics of One- and Two- Electron Systems, en Encyclopedia of Physics, Vol *35*, Atoms I, Berlín, Springer 1957.

$$\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{n+l}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1}\rho L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho)\,d\rho,$$

en la que se substituye el polinomio de Laguerre por su expresión explícita de acuerdo con la fórmula

$$L_n^m(\rho)=(-1)^m n!\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n}{m+k}\frac{(-\rho)^k}{k!}.$$

Efectuada la derivación, en la suma quedan solamente tres términos, y la integración que sigue es elemental. El cálculo conduce al simple resultado:

$$\langle n,\ l-1\,\|\,r\,\|\,nl\rangle = i\sqrt{l}\cdot\frac{3}{2}n\sqrt{n^2-l^2}. \tag{52.6}$$

La integral

$$\int_0^\infty R_{n',\,l-1}R_{nl}r^3dr=\int_0^\infty \chi_{n',\,l-1}(r\chi_{nl})\,dr$$

(en la que $\chi_{nl}=rR_{nl}$) es el coeficiente del desarrollo de la función $r\chi_{nj}$ en el sistema de funciones ortogonales $\chi_{n',l-1}$ ($n'=1, 2, \ldots$). La suma de los cuadrados de los módulos de estos coeficientes es igual a la integral del cuadrado de la función que se ha desarrollado *. Por ello,

$$\sum_{n'}|\langle n',\ l-1\,\|\,r\,\|\,nl\rangle|^2 = l\int_0^\infty r^2\chi_{nl}^2\,dr. \tag{52.7}$$

Utilizando la conocida expresión para el valor medio del cuadrado r^2 en el estado nl [véase III (36.16)], se encontrará la siguiente regla de sumas

$$\sum_{n'}|\langle n',\ l-1\,\|\,r\,\|\,nl\rangle|^2 = l\frac{n^2}{2}[5n^2+1-3l(l+1)]. \tag{52.8}$$

Para valores dados n, l y grandes valores n', el elemento de matriz de la transición $nl\to n'l'$ disminuye según la ley

$$|\langle n'l'\,\|\,r\,\|\,nl\rangle|^2\backsim\frac{3}{n'^3}, \tag{52.9}$$

lo que cabe comprobar tanto partiendo de las expresiones particulares (52.4), como de la fórmula general (52.3). Este resultado es del todo natural: los niveles coulombianos de energía $E'=-1/2n'^2$ se distribuyen de manera casi continua cuando n' es grande y la probabilidad de transición a un nivel cualquiera en el intervalo dE' es proporcional a la densidad de distribución de estos niveles, que a su vez es $\backsim n'^{-3}$.

* La suma se extiende tanto a los estados del espectro discreto como a los del continuo.

El efecto Stark en el hidrógeno tiene, como es sabido, una peculiaridad específica (III, § 77): el desdoblamiento es proporcional a la primera potencia del campo eléctrico. Aunque se supone que el campo no es intenso (condición de aplicabilidad de la teoría de perturbaciones), se supone al mismo tiempo que lo es suficientemente como para que el desdoblamiento de los niveles sea grande comparado con su estructura fina. En estas condiciones, el valor absoluto del momento cinético no se conserva en general y los niveles deben clasificarse según los números cuánticos parabólicos n_1, n_2, m. El último de éstos, el número cuántico magnético m, determina como antes la proyección del momento cinético orbital sobre el eje z (dirección del campo), que en las condiciones dadas (en que se prescinde de la interacción spin-órbita) se conserva. Por ello, para dicho número vale la regla ordinaria de selección

$$m' - m = 0, \pm 1. \tag{52.10}$$

En cambio, no hay limitaciones para la variación de los números n_1, n_2.

Los elementos de matriz del momento dipolar en coordenadas parabólicas también pueden calcularse analíticamente. Sin embargo, las fórmulas que se obtienen son muy engorrosas y no nos entretendremos en deducirlas aquí *.

PROBLEMA

Hallar el desdoblamiento Stark de los niveles del hidrógeno en el caso en que la magnitud del desdoblamiento es pequeña comparada con los intervalos de estructura fina (pero grande en comparación con el corrimiento Lamb).

Solución. En las condiciones indicadas subsiste una degeneración doble de los niveles no perturbados con $l = j \pm 1/2$ debido a lo cual el desdoblamiento Stark sigue siendo lineal respecto del campo. El valor del desdoblamiento Δ se determina a partir de la ecuación secular

$$\begin{vmatrix} -\Delta & -E\,(d_z)_{12} \\ -E\,(d_z)_{21} & -\Delta \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \pm E\,|\,(d_z)_{12}\,|$$

(los índices 1, 2 corresponden a los estados con $l = j \pm 1/2$ y un valor dado del número cuántico magnético m; la perturbación $V = -Ed_z$ es diagonal respecto de m y carece de elementos diagonales según l). El elemento de matriz de la magnitud orbital d_z se calcula mediante las fórmulas III (29.7), III (109.3), según las cuales

$$\langle j,\ l-1,\ m\,|\,d_z\,|\,jlm\rangle = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)\,(2j+1)}}\langle j,\ l-1\,\|\,d\,\|\,jl\rangle,$$

$$\langle j,\ l-1\,\|\,d\,\|\,jl\rangle = -(2j+1)\begin{Bmatrix} l-1 & j & 1/2 \\ j & l & 1 \end{Bmatrix}\langle l-1\,\|\,d\,\|\,l\rangle,$$

debiendo hacer en ellas $l = j + 1/2$; la cantidad $\langle l-1\,\|\,d\,\|\,l\rangle$ se toma de (52.6). En definitiva obtendremos

* Estas fórmulas y las correspondientes tablas numéricas pueden verse en el libro de *H. Bethe* y *E. Salpeter* ya citado.

$$\Delta = \pm \frac{3}{4} \sqrt{n^2 - (j + 1/2)^2} \frac{nm}{j(j+1)} E.$$

§ 53. La radiación por moléculas diatómicas. Espectros electrónicos

Las características específicas de los espectros moleculares están vinculadas, en primer término, con la descomposición de la energía de la molécula en una parte electrónica, otra vibratoria y una tercera de rotación, cada una de las cuales es pequeña comparada con la que le precede. La estructura de los niveles de las moléculas diatómicas se estudió detenidamente en III, cap. XI. Aquí nos ocuparemos de explicar las características del espectro que resulta y de calcular las intensidades de sus rayas*.

Comencemos por el caso general en que en la transición cambia el estado electrónico de la molécula (y con él, en general, también el estado vibratorio y de rotación). Las frecuencias de estas transiciones se encuentran en las regiones visible y ultravioleta del espectro. Tomadas en conjunto, de ellas se suele decir que constituyen el *espectro electrónico* de la molécula. Además, nos referiremos siempre a transiciones dipolares eléctricas; las transiciones de otros tipos son generalmente de muy poca importancia en la espectroscopia molecular.

Como en las transiciones dipolares en un sistema cualquiera, vale aquí la regla de selección para el momento cinético total de la molécula J:

$$|J' - J| \leqslant 1 \leqslant J + J'. \tag{53.1}$$

A la regla de selección rigurosa relativa a la paridad del sistema corresponde en el caso presente una regla de selección respecto del *signo* del nivel; recordemos que, según la terminología adoptada en espectroscopia molecular, los estados con funciones de onda que no cambian o que cambian de signo en la inversión (cambio de signo de las coordenadas de los electrones y de los núcleos) se llaman *positivos* o *negativos*. Tenemos así la regla rigurosa:

$$+ \rightarrow -, \qquad - \rightarrow +. \tag{53.2}$$

Si la molécula está constituida por átomos idénticos (con núcleos de un mismo isótopo), aparece la clasificación de los niveles respecto de la permutación de las coordenadas de los núcleos: niveles *simétricos* (s), con funciones de onda que no cambian de signo en esta transformación, y niveles *antisimétricos* (a), que sí cambian de signo. Dado que el operador momento dipolar eléctrico no se ve afectado en modo alguno por dicha transformación, sus elementos de matriz son diferentes de cero tan sólo para transiciones sin cambio de esta simetría**:

$$s \rightarrow s, \qquad a \rightarrow a. \tag{53.3}$$

* La exposición que sigue se basa en el material contenido en III, §§ 78, 82-88. Para no recargar el texto, prescindiremos de las constantes referencias a estos párrafos.

** Esta regla se aplica también, evidentemente, a las transiciones de multipolaridad cualquiera.

Esta regla, sin embargo, no es absolutamente rigurosa. Ocurre, en efecto, que la existencia en un nivel de la propiedad de simetría en cuestión depende de que exista en la molécula un determinado valor del spin total de los núcleos I. Dada la extremada debilidad de la interacción de los spins nucleares con los electrones, el spin I se conserva con una gran precisión, pero, con todo, no rigurosamente. Si se tiene en cuenta esta interacción, I no tendrá un valor determinado, la propiedad de simetría (s o a) no se conserva y se pierde la regla de selección (53.3).

Los términos electrónicos de una molécula formada por átomos idénticos se caracterizan también por su *paridad* (g o u), es decir, por el comportamiento de las funciones de onda al cambiar el signo de las coordenadas de los electrones (contadas tomando como origen el centro de la molécula) manteniendo invariables las coordenadas de los núcleos. Existe una íntima relación entre esta propiedad del término electrónico, de una parte, y la simetría nuclear y el signo de los niveles de rotación que corresponden a este término, de otra. Los niveles que corresponden a un término electrónico par (g) pueden tener las características $s+$ o $a-$, y los que corresponden a un término impar, las características $s-$ o $a+$. De las reglas (53.2) y (53.3) se sigue, en consecuencia, también la regla

$$g \nrightarrow u, \qquad u \nrightarrow g. \tag{53.4}$$

Como regla aproximada (53.4), sigue siendo válida para las moléculas formadas por isótopos diferentes de un mismo elemento. Dado que las cargas de los núcleos son las mismas, al considerar un término electrónico con los núcleos en reposo el sistema objeto de estudio es un conjunto de electrones en un campo eléctrico que posee un centro de simetría (el punto medio del segmento que une los dos núcleos). La simetría de la función de onda electrónica respecto de la inversión en este punto determina también la paridad del término, y dado que el vector del momento dipolar eléctrico cambia de signo en esta transformación, llegamos a la regla (53.4). El carácter aproximado de la regla basada únicamente en este razonamiento resulta de la necesidad de admitir que los núcleos se encuentran en reposo. Por ello, esta regla se viola al tener en cuenta la interacción entre un estado electrónico y la rotación de la molécula.

Otras reglas de selección están ligadas con ciertas hipótesis concretas acerca del valor relativo de diferentes interacciones en la molécula (es decir, acerca de su tipo de enlace). Por esta razón dichas reglas sólo pueden ser aproximadas.

La mayoría de los términos electrónicos de las moléculas diatómicas corresponde a los tipos de enlace a o b. Ambos tipos se caracterizan por el hecho de que el enlace del momento cinético orbital con el eje (interacción eléctrica de ambos átomos en la molécula) es grande comparada con todas las demás interacciones. Debido a ello aparecen los números cuánticos Λ y S (proyección del momento orbital de los electrones sobre el eje de la molécula y spin total de los mismos). El operador de una magnitud orbital — como el momento cinético orbital de los electrones — conmuta con el operador de spin, de modo que

$$S' - S = 0 \qquad \text{(casos } a, b\text{)} \tag{53.5}$$

En cambio, la variación del número Λ está sometida a la regla de selección

$$\Lambda' - \Lambda = 0, \pm 1 \quad \text{(casos } a, b\text{)} \tag{53.6}$$

a la cual, para las transiciones entre estados con $\Lambda = 0$ (términos Σ), hay que añadir la regla:

$$\Sigma^+ \to \Sigma^+, \ \Sigma^- \to \Sigma^- \quad \text{(casos } a, b\text{)} \tag{53.7}$$

(recordaremos que los estados Σ^+ y Σ^- se distinguen por su comportamiento en la reflexión en un plano que pasa por el eje de la molécula). Las reglas (53.6-7) se obtienen considerando la molécula en un sistema de coordenadas unido rígidamente a los núcleos (véase III, § 87); la regla (53.6) es análoga a la regla de selección relativa al número cuántico magnético en el caso de los átomos.

Los tipos de enlace *a* y *b* difieren uno de otro en la relación entre la energía de interacción « spin-eje » y la energía de rotación (diferencias de los niveles de rotación). En el caso *a* la primera es mayor que la segunda, y en el caso *b*, mucho menor. En lo que sigue estudiaremos estos casos por separado.

Caso *a*. En este caso existe el número cuántico Σ — proyección del spin total sobre el eje de la molécula (y con él también el número $\Omega = \Sigma + \Lambda$, que es la proyección del momento cinético total). Si ambos estados (el inicial y el final) corresponden al caso *a*, vale la regla

$$\Sigma' - \Sigma = 0 \qquad \text{(caso } a\text{)} \tag{53.8}$$

(que se sigue de la conmutabilidad, ya recordada, del momento dipolar y el spin). De (53.6) y (53.8) se deduce*:

$$\Omega' - \Omega = 0, \pm 1. \tag{53.9}$$

Si $\Omega = \Omega' = 0$, a la regla general (53.1) se añade otra que prohibe las transiciones con $J' = J$**:

$$J' - J = \pm 1 \text{ para } \Omega = \Omega' = 0 \qquad \text{(caso } a\text{)} \tag{53.10}$$

Consideremos las transiciones entre dos niveles de vibración determinados cualesquiera que corresponden a dos términos electrónicos diferentes (del tipo *a*). Al tener en cuenta la estructura fina del término electrónico, cada uno de estos niveles se descompone en varias componentes, cuyo número $(2S + 1)$ debe ser el mismo en ambos en virtud de la regla (53.5). Según la regla (53.8) cada una de

---

* Esta regla conserva su validez también en el caso *c* (enlace del momento orbital con el eje débil comparado con el enlace « spin-órbita »), cuando los números Λ y Σ no existen por separado.

** Esta regla es análoga a la prohibición de las transiciones con $J = J'$, cuando $M = M' = 0$, en el caso de los átomos (véase la nota en la pág. 198), en el que, sin embargo, sólo podía tener interés cuando existe un campo exterior. En el presente caso la regla se sigue directamente de la fórmula (53.12) que se deduce más adelante ; el símbolo $3j \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se anula, para $J' = J$, cuando la suma $J' + J + 1$ es impar.

las componentes de un nivel se combina tan sólo con una de las componentes del otro, la que tenga el mismo valor de Σ.

Tomemos ahora un par de niveles con el mismo Σ; sus valores Ω y Ω' pueden diferir (junto con Λ y Λ') en 0 o en ± 1. Al tener en cuenta la rotación, cada uno de ellos se descompone en una sucesión de niveles que difieren en los valores de los números J y J', los cuales toman valores $J \geqslant |\Omega|$, $J' \geqslant |\Omega'|$. La dependencia de las probabilidades de transición respecto de estos números puede establecerse de manera general (*H. Hönl, F. London*, 1925).

El elemento de matriz de la transición $n\Lambda\Omega JM_J \to n'\Lambda'\Omega'J'M'_J$ (n caracteriza, junto con Ω y Λ, el término electrónico) es igual a

$$|\langle n'\Lambda'\Omega'J'M_{J'}|d_q|n\Lambda\Omega JM_J\rangle| = \\ = \sqrt{(2J+1)(2J'+1)}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix}|\langle n'\Lambda'|\overline{d}_{q'}|n\Lambda\rangle|, \tag{53.11}$$

donde d_q y $\overline{d}_{q'}$ son las componentes esféricas del vector momento dipolar en el sistema de coordenadas en reposo xyz y en el sistema «móvil» $\xi\eta\zeta$ de eje ζ en el sentido del eje de la molécula, respectivamente [esta fórmula se obtiene mediante (b, 6) y equivale a las fórmulas III (87.3-4)]. Los elementos de matriz $\langle n'\Lambda'|\overline{d}_{q'}|n\Lambda\rangle$ no dependen de los números cuánticos de rotación J, J', sino solamente de las características de los términos electrónicos (además, en este caso, no dependen del número Σ*); por esto, al designar el elemento de matriz se ha prescindido de los índices $\Omega' = \Lambda' + \Sigma$ y $\Omega = \Lambda + \Sigma$.

La probabilidad de la transición $n\Lambda\Omega J \to n'\Lambda'\Omega'J'$ es proporcional al cuadrado del elemento de matriz (53.11), sumado respecto de M'_J. En virtud de la fórmula III (106.12)

$$\sum_{M'_J}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J+1},$$

obtendremos

$$W(n\Lambda\Omega J \to n'\Lambda'\Omega'J') = (2J'+1)\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -\Omega' & \Omega'-\Omega & \Omega \end{pmatrix}^2 B(n', n; \Lambda', \Lambda), \tag{53.12}$$

donde los coeficientes B no dependen de J, J' (prescindimos, claro está, de la diferencia relativamente muy pequeña entre las frecuencias de las transiciones con valores J, J' diferentes)**.

---

* Esto cabe comprobarlo de manera análoga a como se procedió al principio de III, § 24, para la magnitud escalar f. En el presente caso, el operador de la magnitud vectorial $\boldsymbol{d}$ conmuta con el operador del vector $\boldsymbol{S}$, que se conserva (en la aproximación de orden cero), y Σ es la proyección de $\boldsymbol{S}$ sobre el eje ζ en el sistema de coordenadas en rotación, en el cual hay que tener en cuenta también la condición de conmutabilidad entre $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{S}$.

** Cada uno de los niveles de rotación considerados J se desdobla en dos niveles al tener en cuenta la duplicación-Λ, de los cuales uno es positivo, y el otro negativo. Por consiguiente, en vez de una transición $J \to J'$ tendremos, al introducir la regla de selección (53.2), dos transiciones: de la componente positiva (negativa) del nivel J a la componente negativa (positiva) del nivel J'. Las probabilidades de estas transiciones son iguales.

Si se suma (53.12) respecto de J', se obtendrá [en virtud de la propiedad de ortogonalidad de los símbolos-3j III (106.13)] simplemente $B(n', n; \Lambda', \Lambda)$. En otras palabras, la probabilidad total de transición desde un nivel de rotación J del estado Ω a todos los niveles J' del estado Ω' no depende J.

Caso *b*. En este caso, junto con el momento cinético total J existe también el número cuántico K — el momento cinético de la molécula sin tener en cuenta su spin—. Las reglas de selección respecto de este número coinciden con las reglas de selección generales para cualquier vector orbital (como es el momento dipolar eléctrico):

$$|K' - K| \leqslant 1 \leqslant K + K' \quad \text{(caso } b\text{)} \tag{53.13}$$

quedando además prohibida la transición con $K = K'$ cuando $\Lambda = \Lambda' = 0$ [de manera análoga a (53.10)]:

$$K' - K = \pm 1 \text{ cuando } \Lambda = \Lambda' = 0. \tag{53.14}$$

Consideremos las transiciones entre las componentes de rotación de determinados niveles vibratorios de dos estados electrónicos que pertenecen al tipo *b*. Las probabilidades de las transiciones entre ellos se determinan por las mismas fórmulas (53.12), en las que hay que escribir K, Λ en vez de J, Ω. Cuando se tiene en cuenta la estructura fina (y es $S \neq 0$), cada nivel de rotación K se desdobla en $2S + 1$ componentes con $J = |K - S|, \ldots, K + S$ con lo cual en vez de una raya $J \to J'$ aparece un multiplete. Puesto que en el caso en cuestión se trata de la composición de dos momentos cinéticos libres $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{S}$ (no ligados con el eje de la molécula), las fórmulas de las probabilidades relativas de transición para las diferentes rayas de un multiplete coinciden con las fórmulas análogas (49.15) para las componentes de estructura fina de los espectros atómicos, en los que el mismo papel lo representan los momentos $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{S}$ (en el caso de enlace LS).

Hemos considerado así las reglas de selección que determinan las rayas del espectro posibles en todos los casos importantes que se pueden presentar en las moléculas diatómicas.

El conjunto de las rayas que corresponden a las transiciones entre componentes de rotación de dos niveles dados del tipo vibratorio-electrónico constituye, como se dice en espectroscopia, una banda; dada la pequeñez de los intervalos de rotación, las rayas en una banda aparecen muy juntas entre sí. Las frecuencias de estas rayas vienen dadas por las diferencias

$$\hbar\omega_{JJ'} = \text{const} + BJ(J+1) - B'J'(J'+1), \tag{53.15}$$

donde B, B' son las constantes de rotación en ambos estados electrónicos (para evitar complicaciones innecesarias suponemos que los términos electrónicos son singletes). Para $J' = J$, $J \pm 1$ la fórmula (53.15) se presenta gráficamente (fig. 2) por tres ramas (parábolas) cuyos puntos para valores J enteros determinan los valores de las frecuencias (la disposición de las ramas en la fig. 2 corresponden al

caso $B' < B$; cuando se tiene $B' > B$, se abren en el sentido de los valores de ω pequeños y, además, la rama superior corresponde a la curva para $J' = J - 1$)*. La existencia de una rama que se dobla conduce, como es claro en la figura, a un adensamiento de las rayas hacia una determinada posición límite (*arista* o *cabeza* de la banda).

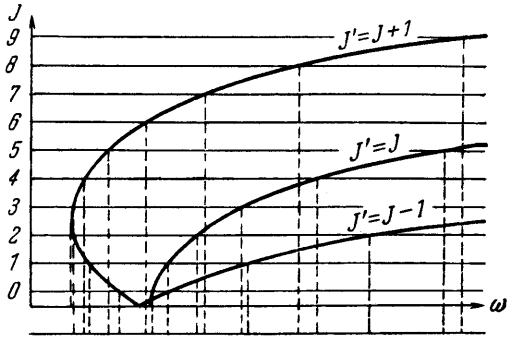


Fig. 2

Al hablar de intensidades de las rayas, hay que recordar también el peculiar fenómeno de *alternancia de las intensidades* en algunas bandas del espectro electrónico de las moléculas formadas por átomos de un mismo isótopo (*W. Heisenberg, F. Hund*, 1927). Las condiciones de simetría ligadas con los spins nucleares conducen a que, en los términos Σ electrónicos, las componentes de rotación con valores pares e impares de K posean simetría opuesta respecto de los núcleos y, de acuerdo con esto, diferentes pesos estadísticos nucleares g_s y g_a (véase III, § 86). Según la regla (53.14), en las transiciones entre dos términos Σ diferentes únicamente son admisibles los valores $J' = J \pm 1$; además, uno de los términos Σ debe ser par en virtud de la regla (53.4), y el otro, impar. Esto da lugar a que, para un valor dado de $J' - J$, las transiciones con valores consecutivos de J se producen alternativamente entre pares de niveles simétricos y pares de niveles antisimétricos (conforme ilustra el esquema de la fig. 3 en el caso de los estados Σ_g^+ y Σ_u^+). Por otra parte, la intensidad observable de una raya es proporcional al número de moléculas que se encuentran en un estado inicial dado y, en consecuencia, a su peso estadístico. Por ello, la intensidad de las rayas consecutivas ($J = 0, 1, 2, \ldots$) será alternativamente mayor y menor, proporcional a g_s y g_a alternadamente [junto con la marcha monótona que predicen las fórmulas (53.12)]**.

Para la variación del número cuántico vibratorio en las transiciones entre dos términos electrónicos diferentes no existe ninguna regla de selección rigurosa; sin

* Las series de rayas que corresponden a las transiciones con $J' = J + 1$, J, $J - 1$, se llaman ramas P, Q y R, respectivamente.

** En todo esto se supone que los estados con diferentes valores del spin nuclear total están igualmente poblados.

embargo, sí existe una regla *(principio de Frank-Condon)* que permite predecir el cambio más probable de un estado de vibración. Dicha regla se basa en el carácter cuasiclásico del movimiento de los núcleos, carácter que se debe al hecho de que su masa es grande (cf. lo dicho acerca de la predisociación en III, § 90) *.

En la integral que determina el elemento de matriz de la transición entre estados vibratorios E y E' de los términos electrónicos $U(r)$ y $U'(r)$, el papel principal lo representa el entorno del punto $r = r_0$ en el cual

$$U(r_0) - U'(r_0) = E - E' \tag{53.16}$$

(es decir, los impulsos del movimiento relativo de los núcleos son iguales en ambos estados: $p = p'$). Para un valor dado E la probabilidad de la transición (en función de la energía final E') es tanto mayor cuanto menor es cada una de las diferencias $E - U$ y $E' - U'$. Dicha probabilidad es máxima cuando

$$E - U(r_0) = E' - U'(r_0) = 0, \tag{53.17}$$

es decir, cuando « el punto de transición » r_0 [raíz de la ecuación (53.16)] coincide con el punto de parada clásico de los núcleos (la fig. 4 ilustra gráficamente esta relación entre E y el más probable valor E'). De una manera intuitiva cabe decir que la transición alcanza su mayor probabilidad cerca del punto en el que los núcleos se detienen y en el entorno del cual pasan, en consecuencia, relativamente la mayor parte del tiempo **.

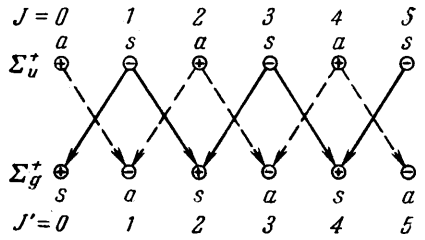


Fig. 3

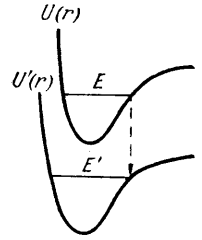


Fig. 4

§ 54. Radiación por moléculas diatómicas. Espectros vibratorio y de rotación

Las reglas de selección y las fórmulas para las probabilidades de transición presentadas en el párrafo que precede conservan también su validez en las transi-

* Rigurosamente hablando, es también necesario que el número cuántico vibratorio sea suficientemente grande.

** El problema de hallar (en la aproximación cuasiclásica) la distribución de probabilidad de las diferentes transiciones cerca de su máximo es idéntico al del ejercicio 3 en III, § 90, del cual difiere únicamente en el significado de algunos símbolos.

ciones en las que no varía el estado electrónico de la molécula*. Examinaremos aquí tan sólo algunas peculiaridades específicas de estas transiciones.

En primer lugar, la regla de selección (53.4) prohibe en general las transiciones (dipolares) sin variación del estado electrónico en las moléculas constituidas por átomos idénticos, puesto que en una tal transición la paridad del término electrónico no cambiaría. Conforme se sigue de lo dicho en el § 53, esta prohibición únicamente podría violarse al tener en cuenta la interacción de los spins nucleares con los electrones y, cuando las moléculas están formadas por isótopos diferentes de un mismo elemento, debido a la influencia de la rotación sobre el estado electrónico.

El cálculo de los elementos de matriz del momento dipolar se reduce (según las fórmulas III, § 87) a su cálculo en un sistema de coordenadas que gira junto con la molécula. La función de onda de ésta en dicho sistema es el producto de la función de onda de los electrones para la distancia dada r entre núcleos y la función de onda del movimiento vibratorio de éstos en el campo efectivo $U(r)$ de los electrones y los núcleos. Si se prescinde por completo de la influencia del movimiento de estos últimos sobre el estado de los electrones, las funciones de onda electrónicas inicial y final son las mismas en las transiciones consideradas. La integración respecto de las coordenadas de los electrones da por ello en el elemento de matriz simplemente el momento dipolar medio de la molécula $\bar{d}$ (dirigido, evidentemente, a lo largo de su eje) como función de la distancia r. Dada la pequeña amplitud de las vibraciones, se puede desarrollar la función $\bar{d}(r)$ en serie de potencias de la coordenada vibratoria $q = r - r_0$. En las transiciones acompañadas de cambio del estado vibratorio desaparece el término nulo del desarrollo del elemento de matriz en virtud de la ortogonalidad de las funciones de onda del movimiento de vibración en un mismo campo $U(q)$, de modo que queda un término proporcional a q. Si se consideran las vibraciones como armónicas, según las conocidas propiedades del oscilador lineal (III, § 23) los elementos de matriz serán diferentes de cero tan sólo para transiciones entre estados vibratorios vecinos; en otras palabras, para el número cuántico vibratorio v valdrá la regla de selección

$$v' - v = \pm 1. \tag{54.1}$$

Esta regla, sin embargo, se viola al tener en cuenta el carácter anarmónico de las vibraciones, y también los términos que siguen en el desarrollo de la función $\bar{d}(q)$.

En una transición puramente de rotación (sin que cambie también el estado vibratorio) el elemento de matriz de la proyección del momento dipolar sobre el eje en movimiento ζ se puede igualar simplemente al valor medio del momento dipolar de la molécula $\bar{d} = \bar{d}(0)$**. Para la probabilidad de la transición $J \to J - 1$

* Las transiciones en las que cambia el estado de vibración (y con él también el de rotación) constituyen, como suele decirse, el *espectro vibratorio* de la molécula; éste se encuentra en la región del infrarrojo próximo (longitud de onda $< 20\ \mu$). En cambio, las transiciones en las que varía solamente el estado de rotación forman el espectro de rotación, que se encuentra en la región del infrarrojo alejada (longitudes de onda $> 20\ \mu$).

** En una molécula formada por átomos idénticos se tiene $\bar{d} = 0$, como es evidente por razones de simetría.

se obtiene en definitiva la fórmula

$$w(nJ \to n,\ J-1) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\bar{d}^2\,\frac{J^2-\Omega^2}{J(2J+1)}, \tag{54.2}$$

que permite calcular no sólo los valores relativos [como (53.12)] de las probabilidades, sino también sus valores absolutos. [La fórmula (54.2) se refiere al caso *a*; en el caso *b*, hay que escribir K, Λ en vez de J, Ω].

Las frecuencias de las transiciones puramente rotatorias vienen dadas por las diferencias de las energías de rotación $BJ(J+1)$ y son iguales a

$$\hbar\omega_{J,\,J-1} = 2BJ. \tag{54.3}$$

Las rayas consecutivas se encuentran a iguales distancias ($2B$) una de otra.

§ 55. Radiación de los núcleos

En la radiación γ de los núcleos se cumple, como regla general, la condición de que las dimensiones del sistema (del radio del núcleo R) sean pequeñas comparadas con la longitud de onda del fotón. Con todo, la distancia entre los niveles nucleares (y por ello mismo también la energía de los cuantos γ) de ordinario es pequeña comparada con la energía por nucleón en el núcleo. Por consiguiente, la cantidad R/λ no está ligada directamente con la velocidad v/c de los nucleones en el núcleo y, en general, es considerablemente más pequeña que ésta. De acuerdo con ello, también la probabilidad de la radiación Ml será por lo general, mayor que la probabilidad de la radiación E, $l+1$ (cf. el principio del § 50).

Las reglas generales de selección relativas al momento cinético total del núcleo (su « spin ») y a la paridad son las mismas que para la radiación de un sistema cualquiera. Un rasgo característico de la radiación nuclear lo constituye la abundancia de transiciones de multipolaridad elevada. En contraste con los átomos, cuya radiación de ordinario es del tipo dipolar eléctrico, en un núcleo a bajas energías tales transiciones son relativamente raras, resultando prohibidas por reglas de selección.

Si una transición radiativa de un núcleo se puede considerar como transición relativa a una sola partícula — variación del estado de un nucleón sin que cambie el estado del « armazón » nuclear —, a dichas reglas se añaden las de selección relativas al momento cinético de este nucleón. Sin embargo, la precisión con que se cumplen estas reglas de selección « para una sola partícula » resulta ser de hecho muy pobre.

Son específicas de un núcleo las reglas de selección correspondientes al spin isotópico. Recordemos que la proyección T_3 del spin isotópico viene ya determinada por el número de masa y el número atómico del núcleo:

$$T_3 = \frac{1}{2}(Z-N) = Z - \frac{A}{2}.$$

Ahora bien, para un valor dado de T_3 el módulo del spin isotópico puede tener cualquier valor $T \geqslant |T_3|$. La regla de selección relativa al número T para las transiciones radiativas resulta como consecuencia de que los operadores de los momentos eléctrico y magnético del núcleo, expresados en función de los operadores de spin isotópico de los nucleones, son suma de un escalar y de la componente x_3 de un vector en el espacio isotópico (véase III, § 115). En consecuencia, sus elementos de matriz son diferentes de cero únicamente bajo la condición de que

$$T' - T = 0, \pm 1. \tag{55.1}$$

Sin embargo, esta regla no impone de suyo limitaciones especiales a las transiciones en los núcleos ligeros (para los cuales únicamente cabe hablar con precisión suficiente de conservación del spin isotópico). Ello se debe a que entre los niveles más bajos de estos núcleos no existen de hecho niveles con $T > 1$.

Pero para las transiciones $E1$ existe todavía una regla complementaria, vinculada ésta con el hecho de que desaparece la componente isotópica-escalar del momento dipolar eléctrico y su operador queda reducido a la componente x_3 del vector isotópico (véase III, § 115). Por consiguiente, si $T_3 = 0$, quedan prohibidas además las transiciones en las que $\Delta T = 0$. En otras palabras, en los núcleos con números iguales de neutrones o de protones ($N = Z$, $A = 2Z$) las transiciones $E1$ son posibles sólo cuando

$$T' - T = \pm 1 \quad (T_3 = 0). \tag{55.2}$$

Claro está, la precisión con que se cumple esta regla depende de la precisión con que se conserve el spin isotópico del núcleo.

Sobre el valor de la probabilidad de las transiciones $E1$ en un núcleo influye también el efecto de retroceso del armazón nuclear como consecuencia del movimiento de los nucleones individuales. Este efecto conduce a que en la formación del momento dipolar los protones participen con una carga efectiva $e(1 - Z/A)$ en vez de e, y los neutrones, con una carga $-eZ/A$ en vez de 0 (véase III, § 117). La disminución de la carga efectiva de un protón lleva a que la probabilidad de las transiciones $E1$ sea algo menor.

Los niveles de energía de los núcleos no esféricos poseen una estructura de rotación. Debido a ello, en el espectro de rayos γ se manifiesta una estructura rotacional específica de tales núcleos.

La simetría del campo en que se mueven los nucleones en un núcleo « inmóvil » no esférico (con simetría axil), coincide con la simetría del campo en que se mueven los electrones en una molécula diatómica « inmóvil » formada por átomos iguales (grupo puntual $C_{\infty h}$). Por ello, las propiedades de simetría de los niveles de un núcleo no esférico (y también, por lo tanto, las reglas de selección para los elementos de matriz) son análogas a las de la simetría de los niveles de las moléculas diatómicas (véase III, § 118). En particular, como en dichas moléculas cuando están formadas por átomos idénticos, resultan prohibidas las transiciones dipolares eléctricas dentro

de una misma banda de rotación (es decir, sin que varíe el estado interno del núcleo) — cf. § 54 —. Tales transiciones ocurren, por ello, como transiciones $E2$ o $M1$. En el primer caso el momento cinético total del núcleo J puede cambiar en 2 ó 1, y en el segundo, en 1.

Según (46.9) la probabilidad de transición cuadripolar, sumada respecto de los valores de la proyección M' del momento total del núcleo en el estado final, vale:

$$w_{E2} = \frac{\omega^5}{15\hbar c^5} \sum_{M'} |\langle J'\Omega M' | Q^{(3)}_{2,-m} | J\Omega M\rangle|^2$$

(J es el momento cinético total del núcleo; Ω, su proyección sobre el eje del mismo; $m = M - M'$). Mediante (b, 7) esta suma se expresa en función de los cuadrados de magnitudes dadas, es decir, de los momentos cuadripolares diagonales (respecto del estado interno del núcleo) de la transición $\overline{Q}_{2\lambda}$, determinados respecto de los ejes de coordenadas $\xi\eta\zeta$ ligados con el núcleo. Además, $\lambda = \Omega - \Omega'$, de modo que, en este caso ($\Omega' = \Omega$), figura solamente la componente $\overline{Q}_{20}$. Por definición, se llama momento cuadripolar, simplemente, a la cantidad

$$eQ_0 = e\int \rho_{ii}\,(2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = -2e\,(\overline{Q}_{20})_{ii}.$$

Obtendremos así

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega J') = \frac{\omega^5}{60\hbar c^5} Q_0^2 (2J+1) \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ -\Omega & 0 & \Omega \end{pmatrix}^2. \qquad (55.3)$$

En forma explícita

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega,\ J-1) = \frac{\omega^5}{20\hbar c^5} Q_0^2 \frac{\Omega^2 (J^2 - \Omega^2)}{(J-1)\,J\,(J+1)\,(2J+1)},$$

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega,\ J-2) = \frac{\omega^5}{40\hbar c^5} Q_0^2 \frac{(J^2 - \Omega^2)\,[(J-1)^2 - \Omega^2]}{(J-1)\,J\,(2J-1)\,(2J+1)}.$$

Con relación a estas fórmulas, sin embargo, hay que hacer la siguiente observación. En ellas se utilizan elementos de matriz calculados con funciones de onda de la forma

$$\psi_{J\Omega M} = \text{const} \cdot \chi_\Omega D^{(J)}_{\Omega M}(\boldsymbol{n})$$

(χ_Ω es la función de onda del estado interno del núcleo). Estas funciones corresponden a valores determinados (en valor absoluto y signo) de la proyección del momento sobre el eje ζ. En cambio, en los núcleos tenemos que considerar estados que poseen una determinada paridad, pero en los cuales solamente está definido el valor absoluto de la proyección del momento cinético (proyección que de ordinario es la que se designa por Ω). Por lo tanto, cuando $\Omega \neq 0$ habría que tomar como funciones de onda inicial y final combinaciones lineales de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{J\Omega M} \pm \psi_{J,-\Omega,M}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{J'\Omega M'} \pm \psi_{J',-\Omega,M'}).$$

Los productos de los primeros y segundos términos darán el valor anterior del elemento de matriz del momento cuadripolar. Los productos « cruzados », en cambio, conducirán a integrales diferentes de cero si $2\Omega \leqslant 2$*. En consecuencia, la fórmula (55.3), hablando propiamente, no sirve cuando $\Omega = 1/2, 1$; en estos casos aparece en la probabilidad de transición un término adicional que no se expresa en función del valor medio del momento cuadripolar**.

De manera análoga a como se dedujo la fórmula (55.3), para la probabilidad de una transición $M1$ se obtiene la fórmula

$$w_{M1}(\Omega J \to \Omega,\ J-1) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2(2J-1)\begin{pmatrix} J-1 & 1 & J \\ -\Omega & 0 & \Omega \end{pmatrix}^2 = \\ = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2\frac{J^2-\Omega^2}{J(2J+1)}, \qquad (55.4)$$

donde μ es el momento magnético del núcleo (esta fórmula no es aplicable cuando $\Omega = 1/2$).

§ 56. Efecto fotoeléctrico. Caso no-relativista

En los §§ 49-52 hemos estudiado las transiciones radiativas (emisión o absorción de un fotón) entre niveles atómicos del espectro discreto. El efecto fotoeléctrico difiere del proceso de absorción de un fotón en que el estado final pertenece al espectro continuo.

La sección eficaz del efecto fotoeléctrico puede calcularse en forma analítica hasta el final para el átomo de hidrógeno y para un ion hidrogenoide (con carga del núcleo $Z \ll 137$).

En el estado inicial se tiene un electrón en un nivel discreto $\varepsilon_i \equiv -I$ (I es el potencial de ionización del átomo) y un fotón con determinado impulso $\boldsymbol{k}$. En el estado final el electrón posee un impulso $\boldsymbol{p}$ (y una energía $\varepsilon_f \equiv \varepsilon$). Dado que $\boldsymbol{p}$ recorre una sucesión continua de valores, la sección eficaz del efecto fotoeléctrico viene dado por la fórmula

---

* Para los elementos de matriz de los momentos 2^l-polares, en los integrandos aparecen productos de la forma

$$D^{(J')*}_{-\Omega M'} D^{(l)}_{q'q} D^{(J)}_{\Omega M}$$

La integral respecto de los ángulos será diferente de cero cuando $q' = -2\Omega$, mientras que q' toma únicamente los valores comprendidos entre $-l$ y $+l$; por ello debe ser $2\Omega \leq l$.

** De hecho este término proporciona una corrección importante tan sólo en el caso en que $\Omega = 1/2$, es decir, cuando el acoplamiento entre los estados de rotación e interno del núcleo es particularmente fuerte (véase acerca de esto III, § 118).

$$d\sigma = 2\pi \mid V_{fi} \mid^2 \delta(-I + \omega - \varepsilon) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tag{56.1}$$

[cf. (44.3)], donde la función de onda del estado final del electrón se supone normalizada « a una partícula en el volumen $V = 1$ ». De la misma manera, la función de onda del fotón se normaliza como antes; para una transición de sección eficaz $d\sigma$, hay que dividir en tal caso la probabilidad dw por la densidad de flujo fotónico (igual a $c/V = c$), pero en unidades relativistas esto no se refleja en la forma de la fórmula (56.1).

Como en (45.2), eligiremos para el fotón el contraste transversal en tres dimensiones. Entonces

$$V_{fi} = -e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_{fi} = -e\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}} M_{fi},$$

donde se ha hecho

$$M_{fi} = \int \psi'^* (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \psi \, d^3x \tag{56.2}$$

($\psi \equiv \psi_i$ y $\psi' \equiv \psi_f$ son las funciones de onda inicial y final del electrón). Substituyendo en (56.1) $d^3p \to \boldsymbol{p}^2 d|\boldsymbol{p}| d\mathrm{o} = \varepsilon|\boldsymbol{p}| d\varepsilon d\mathrm{o}$ e integrando la función δ respecto de ε, escribiremos esta fórmula en la forma

$$d\sigma = e^2 \frac{\varepsilon\,|\boldsymbol{p}|}{2\pi\omega} \mid M_{fi} \mid^2 d\mathrm{o}. \tag{56.3}$$

Efectuaremos el cálculo en dos casos que difieren uno de otro en el valor de la energía del fotón: para $\omega \gg I$ y para $\omega \ll m$. Dado que $I \sim me^4Z^2 \ll m$, estos dos dominios en parte se solapan (para $I \ll \omega \ll m$), de modo que el estudio de estos casos proporciona en esencia una descripción completa del efecto fotoeléctrico.

Empezaremos por el caso

$$\omega \ll m. \tag{56.4}$$

En él, la velocidad del electrón es pequeña tanto en el estado inicial como en el final de modo que, con relación al electrón, el problema es del todo no-relativista. De acuerdo con esto, en (56.2) substituiremos $\boldsymbol{\alpha}$ por el operador velocidad no-relativista $\mathbf{v} = -i\nabla/m$ (cf. § 45). Además, cabe pasar a la aproximación dipolar, substituyendo $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx 1$, es decir, se puede prescindir del impulso del fotón frente al impulso del electrón. Entonces

$$d\sigma = e^2 \frac{m\,|\boldsymbol{p}|}{2\pi\omega} \mid \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_{fi} \mid^2 d\mathrm{o}, \quad \boldsymbol{v}_{fi} = -\frac{i}{m}\int \psi'^* \nabla\psi \cdot d^3x. \tag{56.5}$$

Estudiemos el efecto fotoeléctrico cuando se parte del nivel fundamental del átomo de hidrógeno (o del ion hidrogenoide). En tal caso

$$\psi = \frac{(Ze^2m)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Ze^2mr} \tag{56.6}$$

(en unidades ordinarias $me^2 \to 1/a_0$, donde $a_0 = \hbar^2/me^2$ es el radio de Bohr).

En cuanto a ψ', para ella hay que tomar una función de onda cuya forma asintótica contenga una onda plana ($e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$) y, junto con ella, una onda esférica divergente (véase III, § 134, donde dicha función se designó por $\psi_{\boldsymbol{p}}$). En virtud de las reglas de selección respecto de l, la transición a partir de un estado-s es posible sólo para ir a parar a un estado-p (¡caso dipolar!). Por ello, en el desarrollo *

$$\psi_p = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{-i\delta_l} R_{pl}(r) P_l(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1) \tag{56.7}$$

($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/p$, $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{r}/r$) basta conservar solamente el término con $l = 1$**. Prescindiendo de factores de fase que carecen de importancia, se tiene así

$$\psi' = \frac{3}{p}\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1) R_{p1}(r). \tag{56.8}$$

Con las funciones ψ y ψ' dadas por (56.6) y (56.8), resulta

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_{fi} = \frac{3(Ze^2m)^{5/2}}{\sqrt{2}\,mp} \int\int (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{e}) e^{-Ze^2mr} R_{p1}(r)\, do_1 \cdot r^2\, dr =$$

$$= \frac{2^{3/2}\pi (Ze^2m)^{5/2}}{pm} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}) \int_0^{\infty} r^2 e^{-Ze^2mr} R_{p1}(r)\, dr.$$

Según III (36.18) y III (36.24), la función radial (en las unidades adoptadas aquí) se escribe

$$R_{p1} = \frac{2Ze^2m}{3}\sqrt{\frac{1+\nu^2}{\nu(1-e^{-2\pi\nu})}}\, pr e^{-ipr} F(2+i\nu,\ 4,\ 2ipr),$$

donde se ha hecho

$$\nu = \frac{Ze^2m}{p}\left(= \frac{Ze^2}{\hbar v}\right). \tag{56.9}$$

La integral que necesitamos se calcula mediante la fórmula

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} z^{\gamma-1} F(\alpha,\ \gamma,\ kz)\, dz = \Gamma(\gamma)\lambda^{\alpha-\gamma}(\lambda - k)^{-\alpha}$$

[véase III (f, 3)]. Observando también que

---

* En este párrafo, p representa el $\boldsymbol{p}$.

** El coficiente común en este desarrollo difiere en el factor $(2\pi)^{3/2}$ del coeficiente en III (134.5) debido a que la onda plana está normalizada « a una partícula por unidad de volumen » y no a la función $\delta(\boldsymbol{p})$.

$$\left(\frac{\nu+i}{\nu-i}\right)^{i\nu} = e^{-2\nu \operatorname{arc\,ctg}\nu},$$

obtendremos

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_{fi} = \frac{2^{7/2}\pi\nu^3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})}{\sqrt{p}\,m(1+\nu^2)^{3/2}}\frac{e^{-2\nu \operatorname{arc\,ctg}\nu}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\nu}}}.$$

La energía de ionización a partir del nivel fundamental del átomo de hidrógeno (o de un ion hidrogenoide) vale $I = Z^2e^4m/2$. Por consiguiente,

$$\omega = \frac{p^2}{2m} + I = \frac{p^2}{2m}(1+\nu^2). \tag{56.10}$$

Teniendo en cuenta esta relación escribiremos la expresión final para la sección eficaz del efecto fotoeléctrico en el que se emite un electrón en un elemento de ángulo sólido do:

$$d\sigma = 2^7\pi\alpha a^2\left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^4\frac{e^{-4\nu \operatorname{arc\,ctg}\nu}}{1-e^{-2\pi\nu}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})^2\,do, \tag{56.11}$$

donde $a = \hbar^2/mZe^2 = a_0/Z$ (aquí y en lo que sigue las unidades son las ordinarias). Observemos que la distribución angular de los fotoelectrones viene determinada por el factor $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})^2$. Éste es máximo en las direcciones paralelas a la dirección de polarización de los fotones incidentes y se anula en las direcciones perpendiculares a $\boldsymbol{e}$, incluida la dirección de incidencia. Para fotones no polarizados la fórmula (56.11) debe promediarse respecto de las direcciones $\boldsymbol{e}$, lo que se reduce a la substitución

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})^2 \to \frac{1}{2}[\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{n}]^2,$$

donde $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{k}/k$ [véase (45.46)].

La integración de la fórmula (56.11) respecto de los ángulos da, en cambio, la sección eficaz total del efecto fotoeléctrico:

$$\sigma = \frac{2^9\pi^2}{3}\alpha a^2\left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^4\frac{e^{-4\nu \operatorname{arc\,ctg}\nu}}{1-e^{-2\pi\nu}} \tag{56.12}$$

(*M. Stobbe*, 1930).

El valor límite de σ para $\hbar\omega \to I$ (es decir, $\nu \to \infty$) es:

$$\sigma = \frac{2^9\pi^2}{3e^4}\alpha a^2 = \frac{2^9\pi^2}{3e^4}\frac{\alpha a_0^2}{Z^2} \tag{56.13}$$

(¡en el denominador $e = 2{,}71\ldots$!). Como debe ser para una reacción en la que se forman partículas cargadas (véase III, § 144), la sección eficaz de efecto fotoeléctrico tiende cerca de su umbral a un límite constante no nulo.

El caso en que $\hbar\omega \gg I$ (siendo, como antes, $\hbar\omega \ll mc^2$) corresponde a la aproximación de Born ($\nu = Ze^2/\hbar v \ll 1$). La fórmula (56.12) toma la forma

$$\sigma = \frac{2^8\pi}{3}\alpha a_0^2 Z^5 \left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{7/2} \tag{56.14}$$

($I_0 = e^4m/2\hbar^2$ es la energía de ionización del átomo de hidrógeno).

El proceso inverso del efecto fotoeléctrico es la recombinación radiativa del electrón y el ion en reposo. La sección eficaz de este proceso (σ_{rec}) se puede hallar mediante la sección eficaz del efecto fotoeléctrico (σ_F) mediante el principio de equilibrio detallado (III § 141). Según este principio, las secciones eficaces de los procesos $i \to f$ y $f \to i$ (con dos partículas en cada uno de los estados i y f) están ligadas entre sí por la relación

$$g_i p_i^2 \sigma_{i \to f} = g_f p_f^2 \sigma_{f \to i},$$

donde p_i, p_f son los impulsos del movimiento relativo de las partículas, y g_i, g_f, los pesos estadísticos de spin de los estados i y f. Teniendo en cuenta también que para el fotón es $g = 2$ (dos direcciones de polarización), se obtendrá

$$\sigma_{rec} = \sigma_F \frac{2\boldsymbol{k}^2}{\boldsymbol{p}^2} \tag{56.15}$$

($p = mv$ es el impulso del electrón incidente, $\boldsymbol{k}$ es el impulso del fotón emitido).

PROBLEMA

Determinar la sección eficaz de recombinación radiativa de un electrón rápido no-relativista ($I \ll mv^2 \ll mc^2$) y un núcleo (de carga $Z \ll 137$).

Solución. La sección eficaz de captura de la capa K (número cuántico principal $n = 1$) se obtiene substituyendo (56.14) en (56.15):

$$\sigma_1^{rec} = \frac{2^7\pi}{3} Z^5 \alpha^3 a_0^2 \left(\frac{I_0}{\varepsilon}\right)^{5/2}$$

($\varepsilon = mv^2/2$ es la energía del electrón incidente; $\hbar\omega \approx \varepsilon$). De los otros estados del átomo que se forma, son importantes tan sólo los estados-s: al calcular el elemento de matriz en la aproximación de Born, cuentan en esencia los valores de la función de onda del estado de enlace para valores pequeños de r (conforme se verá en los cálculos del § 57) y para $l > 0$ estos valores son pequeños comparados con los valores de las funciones para las que $l = 0$; además, basta tener en cuenta los dos primeros términos del desarrollo de ψ en potencias de r. Para estados con $l = 0$ y n cualquiera estos términos son

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a^{3/2} n^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{a}\right),$$

es decir, contiene n tan sólo en la forma de factor común $n^{-3/2}$ [la expresión que acabamos de escribir se obtiene desarrollando la función III (36.13)]. En consecuencia, la sección eficaz total de recombinación vale

$$\sigma^{rec} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{rec} = \sigma_1^{rec} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)\, \sigma_1^{rec}$$

[el valor de la función ζ es: $\zeta(3) = 1{,}202$].

§ 57. Efecto fotoeléctrico. Caso relativista

Pasemos al caso en que

$$\omega \gg I. \tag{57.1}$$

Entonces es también $\varepsilon = \omega - I \gg I$, y, en consecuencia, la influencia del campo de Coulomb del núcleo sobre la función de onda del fotoelectrón (ψ') se puede calcular mediante la teoría de perturbaciones. Escribamos ψ' en la forma

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(u' e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} + \psi^{(1)}\right). \tag{57.2}$$

El fotoelectrón puede ser relativista; por ello, la función no perturbada (57.2) se ha escrito en forma de onda plana relativista (23.1).

Aunque en el estado inicial el electrón es no-relativista, sin embargo, en su función de onda ψ hay que tener en cuenta de todas maneras (por razones que se explicarán más adelante) la corrección relativista ($\sim Ze^2$). Dicha función viene dada por la fórmula (véase el problema del § 39)

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\gamma^0 \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\right)\frac{u}{\sqrt{2m}}\psi_{\text{nor}}, \tag{57.3}$$

donde ψ_{nor} es la función no-relativista del estado de enlace (56.6) y u es la amplitud bispinorial del electrón en reposo normalizada de acuerdo con la condición que hemos adoptado $\bar{u}u = 2m$.

Substituyamos las funciones (57.2-3) en el elemento de matriz (56.2)*:

$$M_{fi} = \frac{1}{2\sqrt{m\varepsilon}}\int \left\{\bar{u}'(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e})\left[\left(1 - \frac{i}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\right)u\psi_{\text{nor}}\right]e^{-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}} + \right.$$
$$\left. + \bar{\psi}^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} u\psi_{\text{nor}}\right\} d^3x. \tag{57.4}$$

Dado que se trata de obtener el primer término del desarrollo de esta cantidad en potencias de Ze^2, en el segundo término entre llaves podemos substituir ψ_{nor} simplemente por la constante $(Ze^2m)^{3/2}/\sqrt{\pi}$. El primer término, en cambio, se anularía como resultado de dicha substitución (si $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k} \neq 0$) y, por esto precisamente, hay que incluir en ψ también la primera corrección relativista, que es proporcional a Ze^2; cuando $v \sim 1$, esta corrección contribuirá a la sección eficaz con un término del mismo orden que el término siguiente del desarrollo de ψ_{nor} en potencias de Ze^2.

---

* La función (57.3) se obtuvo para distancias $r \sim 1/mZe^2$ a las que el término correctivo en ella es del orden de magnitud de Ze^2. Pero para el estado fundamental (y también para todos los estados s en general) la fórmula (57.3) es válida para valores cualesquiera de r, ya que la derivada de una función exponencial pura (56.6) [y con ella también el primer término correctivo en (57.3)] es siempre proporcional a Ze^2. Esta circunstancia permite aplicar la fórmula (57.3) al problema considerado, en el cual, como veremos a continuación, importan los valores de r pequeños.

En el primer término de (57.4) integremos por partes, haciendo que el operador ∇ se aplique al factor exponencial en vez de a ψ_{nor}. El resultado que se obtiene es

$$M_{fi}=\frac{(Ze^2m)^{3/2}}{2(\pi m\varepsilon)^{1/2}}\left\{\bar{u}'(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e})\left[1+\frac{1}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\right]u\,(e^{-Ze^2mr})_{p-k}+\bar{\psi}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e})\,u\right\}, \tag{57.5}$$

donde el índice vectorial designa a la componente espacial de Fourier. Salvo términos del orden de $\sim Ze^2$ *

$$(e^{-Ze^2mr})_{p-k}=\frac{8\pi Ze^2m}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^4}. \tag{57.6}$$

Para calcular las componentes de Fourier $\psi_k^{(1)}$ escribamos la ecuación a que satisface la función $\psi^{(1)}$:

$$(\gamma^0\varepsilon+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)\,\psi^{(1)}=e\,(\gamma^\mu A_\mu)\,u'e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}=-\frac{Ze^2}{r}\gamma^0u'e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$$

[ecuación que se obtiene substituyendo (57.3) en (32.1)]. Aplicando a ambos miembros de la misma el operador $(\gamma^0\varepsilon+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+m)$, se obtendrá

$$(\Delta+\boldsymbol{p}^2)\,\psi^{(1)}=-Ze^2(\gamma^0\varepsilon+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+m)(\gamma^0u')\frac{1}{r}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

Multipliquemos esta ecuación por $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ e integremos respecto de d^3x, efectuando de la manera ordinaria la integración por partes en los términos en Δ y ∇:

$$(\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{k}^2)\,\psi_{\boldsymbol{k}}^{(1)}=-Ze^2(\gamma^0\varepsilon-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}+m)(\gamma^0u')\left(\frac{1}{r}\right)_{k-p}=$$

$$=-Ze^2(2\varepsilon\gamma^0-\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}))(\gamma^0u')\frac{4\pi}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2}.$$

En la última línea se ha tenido en cuenta que la amplitud u' satisface la ecuación

$$(\varepsilon\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}-m)\,u'=0,\quad\text{o bien}\quad(\varepsilon\gamma^0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}-m)\,\gamma^0u'=0.$$

De aquí se sigue

$$\bar{\psi}_{\boldsymbol{k}}^{(1)'}=\psi_{\boldsymbol{k}}^{(1)*}\gamma^0=4\pi Ze^2\bar{u}'\frac{2\varepsilon\gamma^0+\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{k}^2-\boldsymbol{p}^2)(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2}\gamma^0. \tag{57.7}$$

---

* Formando la componente de Fourier de ambos miembros de la igualdad

$$(\Delta-\lambda^2)\frac{e^{-\lambda r}}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}),$$

se obtiene

$$\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)_{\boldsymbol{q}}=\frac{4\pi}{\boldsymbol{q}^2+\lambda^2}. \tag{57.6a}$$

Derivando esta expresión respecto del parámetro λ, queda

$$(e^{-\lambda r})_{\boldsymbol{q}}=\frac{8\pi\lambda}{(\boldsymbol{q}^2+\lambda^2)^2}. \tag{57.6b}$$

Substituyendo (57.6-7) en el elemento de matriz (57.5), representaremos éste en la forma

$$M_{fi} = \frac{4\pi^{1/2}\,(Ze^2m)^{5/2}}{(\varepsilon m)^{1/2}\,(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2}\,\bar{u}'Au,$$

donde

$$A = a\,(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e})\,\gamma^0\,(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{c})\,\gamma^0\,(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}),$$

$$a = \frac{1}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2} + \frac{\varepsilon}{m}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2-\boldsymbol{p}^2}, \qquad \boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}{2m\,(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2}, \qquad \boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}{2m\,(\boldsymbol{k}^2-\boldsymbol{p}^2)}.$$

La sección eficaz es

$$d\sigma = \frac{8e^2\,(Ze^2m)^5\,|\,\boldsymbol{p}\,|}{\omega\,(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^4\,m}\,(\bar{u}'Au)\,(\bar{u}\bar{A}u')\,do,$$

donde $\bar{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0$ (véase § 66). Esta expresión hay que sumarla todavía respecto de las direcciones finales del spin del electrón y promediarla respecto de las iniciales. Estas operaciones se efectúan de acuerdo con las reglas que se presentan más adelante, en el § 66, mediante las matrices densidad de polarización de los estados inicial y final:

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0 + 1), \qquad \rho' = \frac{1}{2}(\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)$$

(en el estado final $\boldsymbol{p} = 0$, $\varepsilon = m$). Dichas reglas conducen a la expresión

$$d\sigma = \frac{16e^2\,(Ze^2m)^5\,|\,\boldsymbol{p}\,|}{m\omega\,(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^4}\,\mathrm{Tr}\,(\rho' A \rho \bar{A})\,do.$$

El cálculo de la traza es una operación puramente algebraica y lleva al resultado siguiente*:

$$\mathrm{Tr}\,(\rho' A \rho \bar{A}) =$$

$$= \frac{m}{\varepsilon + m}\,[a\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\varepsilon + m)]^2 + 4\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e})\,[(\varepsilon + m)(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}) + a\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e})]$$

(el vector $\boldsymbol{e}$ se supone real y representa la polarización lineal del fotón).

Daremos su forma definitiva a la fórmula de la sección eficaz del efecto fotoeléctrico introduciendo el ángulo polar θ y el acimut φ de la dirección $\boldsymbol{p}$ respecto de la dirección de $\boldsymbol{k}$ adoptada como eje z y el plano $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$, como plano xz (de modo que

---

* Las fórmulas tridimensionales para el cálculo de trazas son análogas a las fórmulas cuadridimensionales deducidas en el § 22. Diferentes de cero lo son únicamente las trazas de productos con un número par de factores γ^0 y $\boldsymbol{\gamma}$; además, todos los factores γ^0 se reducen a 1 y las trazas de los productos con dos y con cuatro factores $\boldsymbol{\gamma}$ valen:

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\gamma}) = -\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\gamma})\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\gamma})\,(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e} = |\boldsymbol{p}| \cos\varphi \operatorname{sen}\theta$). Cuando $\omega \gg I$, la conservación de la energía puede escribirse en la forma $\varepsilon - m = \omega$ (en vez de $\varepsilon - m = \omega - I$). Es fácil comprobar que entonces

$$\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{p}^2 = -2m(\varepsilon - m), \qquad (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})^2 = 2\varepsilon(\varepsilon - m)(1 - v\cos\theta),$$

donde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/\varepsilon$ es la velocidad del fotoelectrón. Después de simples transformaciones se obtiene finalmente

$$d\sigma = Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{v^3(1-v^2)^3\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\sqrt{1-v^2})^5(1-v\cos\theta)^4} \times$$
$$\times \left\{\frac{(1-\sqrt{1-v^2})^2}{2(1-v^2)^{3/2}}(1-v\cos\theta) + \left[2 - \frac{(1-\sqrt{1-v^2})(1-v\cos\theta)}{1-v^2}\right]\cos^2\varphi\right\} do, \tag{57.8}$$

donde $r_e = e^2/m$.

En el caso ultrarrelativista ($\varepsilon \gg m$) la sección eficaz del efecto fotoeléctrico presenta un máximo muy pronunciado para ángulos pequeños ($\theta \sim \sqrt{1-v^2}$), es decir, los electrones se emiten predominantemente en la dirección de incidencia del fotón. Cerca del máximo escribiremos

$$1 - v\cos\theta \approx \frac{1}{2}[(1-v^2) + \theta^2],$$

y los términos principales en (57.8) darán

$$d\sigma \approx 4Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(1-v^2)^{3/2}\theta^2}{(1-v^2+\theta^2)^3}\, d\theta\, d\varphi. \tag{57.9}$$

Una integración elemental, aunque bastante larga, de la expresión (57.8) respecto de los ángulos conduce a la fórmula siguiente para la sección eficaz total (*F. Sauter*, 1931):

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(\gamma^2-1)^{3/2}}{(\gamma-1)^5}\left\{\frac{4}{3} + \frac{\gamma(\gamma-2)}{\gamma+1}\left(1 - \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}\ln\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}}\right)\right\}, \tag{57.10}$$

donde para abreviar hemos introducido el « factor de Lorentz »

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\varepsilon}{m} \approx \frac{m+\omega}{m}. \tag{57.11}$$

En el caso ultrarrelativista esta fórmula se reduce a la sencilla expresión

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{1}{\gamma}. \tag{57.12}$$

Cuando $I \ll \omega \ll m$, el paso en (57.10) al límite para valores $\gamma - 1$ pequeños conduce al resultado (56.14) que ya conocemos.

§ 58. Fotodesintegración del deuterón

Una característica peculiar del deuterón es su pequeña energía de enlace (en

comparación con la profundidad del pozo de potencial). Esta circunstancia permite describir las reacciones en que participa el deuterón sin conocer detalladamente la marcha de las fuerzas nucleares, solamente con ayuda de la energía de enlace (véase III, § 131). Se supone, además, que las longitudes de onda de las partículas que chocan son grandes comparadas con el radio de acción a de las fuerzas nucleares.

Esto se aplica, en particular, a la desintegración del deuterón por cuantos gamma para los que $ka \ll 1$, admitiendo que también $pa \ll 1$, donde $\boldsymbol{p}$ es el impulso del movimiento relativo del neutrón y del protón que quedan libres (esta condición es más fuerte que la anterior*).

Partiremos de la fórmula no-relativista para la sección eficaz del efecto fotoeléctrico (56.5) una vez integrada respecto de las direcciones:

$$\sigma = \frac{e^2 p}{2\pi\omega} \frac{M}{2} \frac{4\pi}{3} |(\boldsymbol{v}_p)_{fi}|^2 .$$

Aquí, $\boldsymbol{p}$ es el impulso del movimiento relativo del protón y del neutrón** y m en (56.5) se ha substituido por la masa reducida $M/2$ (donde M es la masa de un nucleón). El elemento de matriz corresponde a la velocidad del protón $\boldsymbol{v}_p$, puesto que tan sólo éste interactúa con el fotón. Expresando $\boldsymbol{v}_p$ en función del impulso $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}/2 = \boldsymbol{p}/M)$, tenemos

$$\sigma^{(E)} = \frac{e^2 p}{3M\omega} |\boldsymbol{p}_{fi}|^2 . \tag{58.1}$$

El superíndice (E) indica que esta fórmula corresponde a las transiciones dipolares eléctricas: $e\boldsymbol{p}/M = e\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{d}$, de modo que $e\boldsymbol{p}_{fi}/M = i\omega \boldsymbol{d}_{fi}$.

La función de onda normalizada del estado inicial (el fundamental) del deuterón es:

$$\psi = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \qquad \varkappa = \sqrt{MI}, \tag{58.2}$$

donde $I = 2{,}23$ MeV es la energía de enlace (III, § 131)***. Como función de onda del estado final cabe tomar, en cambio, la función del movimiento libre, es decir, la onda plana

$$\psi' = e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{58.3}$$

* La energía del fotón para la cual $pa \approx 1$ ($a = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm) es de 15 MeV.

** En este párrafo p representa el $|\boldsymbol{p}|$.

*** La aproximación de esta función puede mejorarse introduciendo una corrección ligada con el valor no nulo de a. Esto se consigue substituyendo el coeficiente de normalización en (58.2) por

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi(1 - a\varkappa)}}$$

(véase III, § 131, problema 1). Aparece entonces un factor $1/(1 - a\varkappa)$ también en la fórmula para la sección eficaz. Hay que decir que, de hecho, esta corrección no es tan pequeña: para el estado fundamental del deuterón se tiene $a\varkappa \approx 0{,}4$.

El estado fundamental del deuterón es un estado ${}^3S_1$ con una pequeña « mezcla » de estado ${}^3D_1$ debida a la acción de las fuerzas tensoriales nucleares (véase III, § 116). Prescindiremos de esta contribución y, con ello, también de las fuerzas tensoriales.

La razón de esto consiste en que, en la teoría considerada, la « dimensión del deuterón » $1/\varkappa$ se supone grande comparada con el radio efectivo de interacción a. Por ello, hay que tener en cuenta la interacción entre el protón y el neutrón tan sólo en los estados-S, prescindiendo de ella cuando $l \neq 0$, estados éstos cuyas funciones de onda son pequeñas a cortas distancias. Además, según las reglas de selección, las transiciones dipolares eléctricas entre dos estados S (el estado fundamental y un estado S del espectro continuo) están prohibidas. Esto ofrece la posibilidad de prescindir en el presente caso de la interacción de los nucleones en el estado final.

Integrando por partes, para el elemento de matriz se encuentra

$$\boldsymbol{p}_{fi} = -i\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \int e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \nabla \frac{e^{-\varkappa r}}{r} d^3x = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \boldsymbol{p} \left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)_p = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \frac{4\pi \boldsymbol{p}}{p^2 + \varkappa^2}$$

(véase la nota en la pág. 223).

Teniendo también presente la igualdad

$$\frac{1}{M}(\varkappa^2 + \boldsymbol{p}^2) = I + \frac{\boldsymbol{p}^2}{M} = \omega,$$

que expresa la conservación de la energía, obtendremos la sección eficaz de fotodesintegración en la forma final (unidades ordinarias)

$$\sigma^{(E)} = \frac{8\pi}{3} \alpha \frac{\hbar^2}{M} \frac{\sqrt{I}\,(\hbar\omega - I)^{3/2}}{(\hbar\omega)^3} \tag{58.4}$$

(*H. A. Bethe, R. Peierls*, 1935). Esa presenta un máximo para $\hbar\omega = 2I$ y se anula cuando $\hbar\omega \to I$ y cuando $\hbar\omega \to \infty$.

Sin embargo, la absorción dipolar eléctrica del fotón descrita por la fórmula (58.4) no proporciona la contribución principal a la sección eficaz cerca del umbral del efecto fotónico ($\hbar\omega$ próximo a I). En dicha región, la parte principal del efecto debe proceder de transiciones que llevan a un estado-S, transiciones que no se producen en la absorción dipolar eléctrica. Tampoco tienen lugar en la absorción cuadripolar eléctrica: aunque no contradicen en este caso la regla de selección respecto de la paridad, están prohibidas por la regla de selección correspondiente al momento cinético orbital (recordemos que se prescinde de las fuerzas tensoriales, sin las cuales $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{S}$ se conservan por separado). Para calcular la sección eficaz de fotodesintegración cerca del umbral es necesario, por lo tanto, considerar la absorción dipolar magnética, a la que las reglas de selección permiten las transiciones entre estados S (*E. Fermi*, 1935).

Substituyendo en la fórmula (58.1) el momento eléctrico por el magnético, tenemos

$$\sigma^{(M)} = \frac{1}{3} \omega M p \, |\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2. \tag{58.5}$$

El momento magnético del movimiento orbital no contribuye a $\boldsymbol{\mu}_{fi}$, ya que el mo-

mento cinético orbital $\boldsymbol{L}$ carece de elementos de matriz no nulos para las transiciones entre estados S. El momento magnético espinorial vale

$$\boldsymbol{\mu} = 2\mu_p \boldsymbol{s}_p + 2\mu_n \boldsymbol{s}_n = 2(\mu_p - \mu_n)\boldsymbol{s}_p + 2\mu_n \boldsymbol{S},$$

donde $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_p + \boldsymbol{s}_n$, y μ_p, μ_n son los momentos magnéticos del protón y del neutrón. Cuando se prescinde de las fuerzas nucleares tensoriales, el spin total se conserva, de modo que su operador no da lugar a transiciones. Por ello,

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = 2(\boldsymbol{s}_p)_{fi}(\mu_p - \mu_n).$$

En la misma aproximación (sin fuerzas tensoriales) las variables de spin y de coordenadas se separan. Junto con las funciones de onda, también el elemento de matriz toma la forma de producto de una parte correspondiente al spin por otra que corresponde a las coordenadas:

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = 2(\mu_p - \mu_n)\langle s_p S' M' | \boldsymbol{s}_p | s_p S M\rangle \int \psi'^*(r)\,\psi(r)\,d^3x.$$

Pero la existencia de fuerzas nucleares spin-órbita conduce a que la ecuación de onda para las funciones de las coordenadas $\psi(r)$ contenga como parámetro el valor del spin S. Si $S' = S$, $\psi'(r)$ y $\psi(r)$ son funciones propias de un mismo operador y, por consiguiente, ortogonales entre sí. Así, pues, partiendo del estado inicial ^3S la fotodesintegración conducirá solamente a un estado ^1S del espectro continuo.

El cuadrado $|\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2$ en (58.5) debe promediarse, naturalmente, respecto de las proyecciones M del spin $\boldsymbol{S}$ en el estado inicial. De esta manera, el problema queda reducido al cálculo de la cantidad

$$\frac{1}{2S+1}\sum_M |\langle s_p S' M' | \boldsymbol{s}_p | s_p S M\rangle|^2,$$

donde $s_p = s_n = 1/2$, $S = 1$, $S' = 0$. Según las fórmulas generales para los elementos de matriz en la composición de momentos cinéticos, esta cantidad es igual a

$$\frac{1}{(2S+1)(2S'+1)}|\langle s_p S' \| s_p \| s_p S\rangle|^2 = \begin{Bmatrix} s_p & S' & s_n \\ S & s_p & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n' s_p \| s_p \| n s_p\rangle|^2 = \frac{1}{6}|\langle s_p \| s_p \| s_p\rangle|^2$$

[se han utilizado las fórmulas III (107.11), (109.3)]. El elemento de matriz reducido es

$$\langle s_p \| s_p \| s_p\rangle = \sqrt{s_p(s_p+1)(2s_p+1)} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

La fórmula (58.5) toma en definitiva la forma

$$\sigma^{(M)} = \frac{1}{3}\omega M p(\mu_p - \mu_n)^2 \left|\int \psi'^* \psi\, d^3x\right|^2. \tag{58.6}$$

La función inicial ψ viene dada por la fórmula (58.2). En cambio, la función que representa el estado final se escribe

$$\psi' = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, R_{p0}(r).$$

Esta expresión es el primer término ($l = 0$) del desarrollo (56.7) de una función que contiene asintóticamente una onda plana y una onda esférica divergente; se ha prescindido de un factor de fase que carece de importancia. Dado que la integración se extiende al dominio exterior al radio de acción de las fuerzas nucleares, la función radial se escribirá

$$R_{p0}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(pr + \delta)}{r}.$$

La fase δ está ligada con la energía de un nivel virtual ($I_1 = 0{,}067$ MeV) del sistema « protón + neutrón » para $S = 0$:

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{\varkappa_1}{p}, \quad \varkappa_1 = \sqrt{MI_1}$$

(véase III, § 131). Se tiene ahora

$$\int \psi'^* \psi\, d^3x = (2\pi)^{3/2}\frac{\sqrt{\varkappa}}{p\pi}\operatorname{Im}\int e^{-\varkappa r + ipr}e^{i\delta}\, dr = (2\pi)^{3/2}\frac{\sqrt{\varkappa}}{p\pi}\operatorname{Im}\frac{e^{i\delta}}{\varkappa - ip}.$$

Después de efectuar simples transformaciones algebraicas obtendremos la siguiente expresión para la sección eficaz de fotodesintegración (en unidades ordinarias):

$$\sigma^{(M)} = \frac{8\pi}{3\hbar c}(\mu_p - \mu_n)^2\frac{\sqrt{I(\hbar\omega - I)}\,(\sqrt{I} + \sqrt{I_1})^2}{\hbar\omega\,(\hbar\omega - I + I_1)}. \tag{58.7}$$

Cuando $\hbar\omega \to I$ esta sección eficaz tiende a cero como $\sqrt{\hbar\omega - I}$, de acuerdo con las propiedades generales del comportamiento de las secciones eficaces cerca del umbral de reacción (III, § 144).

El proceso inverso de la fotodesintegración es la captura radiativa del protón por el neutrón. La sección eficaz de captura (σ_c) se obtiene a partir de la sección eficaz correspondiente al efecto fotónico (σ_F) mediante el principio de equilibrio detallado [cf. la deducción de (56.15)]. El peso estadístico espinorial del neutrón y del protón es igual a $2 \cdot 2 = 4$. En cambio, el peso estadístico del deuterón (en un estado con $S = 1$) y del fotón es igual a $3 \cdot 2 = 6$. Por consiguiente,

$$\sigma_c = \frac{3}{2}\frac{(\hbar\omega)^2}{c^2p^2}\sigma_F = \frac{3(\hbar\omega)^2}{2Mc^2(\hbar\omega - I)}\sigma_F. \tag{58.8}$$

§ 59. Radiación de frenado magnético *

Según la teoría clásica (II, § 74), un electrón ultrarrelativista que se mueve en un campo magnético constante $\boldsymbol{H}$ emite un espectro cuasicontinuo con un máximo que se presenta en una frecuencia

* Este párrafo se ha escrito en colaboración con V. N. Baier.

$$\omega \sim \omega_0 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3, \tag{59.1}$$

donde

$$\omega_0 = \frac{veH}{|p|} \approx \frac{eH}{\varepsilon} \tag{59.2}$$

es la frecuencia de rotación de un electrón con energía ε sobre una órbita circular (en un plano perpendicular al campo) ★.

Los efectos cuánticos en la radiación de frenado magnético tienen un doble origen: la cuantificación del movimiento del electrón y el retroceso cuántico en la emisión del fotón. Este último viene determinado por el valor de la razón $\hbar\omega/\varepsilon$, y la condición de que sea aplicable la teoría clásica exige que este valor sea pequeño. Debido a esto conviene introducir el parámetro

$$\chi = \frac{H}{H_0}\frac{|p|}{m} \approx \frac{H\varepsilon}{H_0 m} \approx \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3, \tag{59.3}$$

donde $H_0 = m^2/e\hbar (= m^2c^3/e\hbar) = 4{,}4 \cdot 10^{13}$ G. En el dominio clásico es $\chi \sim \hbar\omega/\varepsilon \ll 1$. En el caso opuesto ($\chi \gg 1$), en cambio, la energía del fotón emitido es $\hbar\omega \sim \varepsilon$, siendo además esencial (como veremos más adelante) la región del espectro que se extiende hasta frecuencias para las que la energía del electrón después de la emisión vale

$$\varepsilon' \sim m\frac{H_0}{H}. \tag{59.4}$$

Para que el electrón se mantenga ultrarrelativista, el campo debe satisfacer la condición

$$\frac{H}{H_0} \ll 1. \tag{59.5}$$

En lo que concierne a la cuantificación del propio movimiento del electrón, éste se caracteriza por la razón $\hbar\omega_0/\varepsilon$; $\hbar\omega_0$ es la distancia entre niveles de energía contiguos del movimiento en el campo magnético. Dado que

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon} = \frac{H}{H_0}\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2,$$

y considerando (59.5) se tiene, evidentemente, $\hbar\omega_0 \ll \varepsilon$, es decir, el movimiento del electrón es cuasiclásico con independencia del valor de χ. En otras palabras, se puede prescindir de la no conmutabilidad entre sí de los operadores correspondientes a las variables dinámicas del electrón (cantidades $\sim \hbar\omega_0/\varepsilon$), teniendo en cuenta al mismo tiempo su no conmutabilidad con los operadores del campo fotónico (cantidades $\sim \hbar\omega/\varepsilon$)★★.

---

* En este párrafo suponemos $c = 1$, pero conservamos el factor $\hbar$.

** La solución completa del problema cuántico que plantea la radiación de frenado magnético la obtuvo primero *N. P. Klepikov* (1954) y la primera corrección cuántica a la fórmula clásica se debe a *A. A. Sokolov, N. P. Klepikov* e *I. M. Ternov* (1952).

La deducción de las fórmulas (59.23) y (59.30) que se expone en este párrafo, y en la que se utiliza de manera explícita el carácter cuasiclásico del movimiento, se debe a *V. N. Baier* y *V. M. Katkov* (1967). Un método análogo lo había utilizado anteriormente *J. Schwinger* (1954) para obtener la primera corrección cuántica en la intensidad de la radiación.

Las funciones de onda cuasiclásica de los estados estacionarios de un electrón en un campo exterior se pueden representar en la forma simbólica

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{H}}} u(\mathrm{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t} \varphi(\boldsymbol{r}), \tag{59.6}$$

donde $\varphi(\boldsymbol{r}) \sim \exp(iS/\hbar)$ son las funciones de onda clásicas de una partícula sin spin [$S(\boldsymbol{r})$ es su acción clásica]; $u(p)$ es el operador bispinorial

$$u(\mathrm{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathrm{H}+m}\, w \\ \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{H}+m}} (\sigma \cdot \mathrm{p})\, w \end{pmatrix},$$

que se obtiene a partir de la amplitud bispinorial de la onda plana $u(p)$ (23.9) substituyendo en ella $\boldsymbol{p}$ y ε por los operadores ★:

$$\mathrm{p} = \mathrm{P} - e\boldsymbol{A} = -i\hbar\nabla - e\boldsymbol{A}, \quad \mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{p}^2 + m^2}$$

$\boldsymbol{P}$ es el impulso generalizado de la partícula en el campo caracterizado por el potencial vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$; el orden en que aparecen en ψ los operadores factor carece de importancia, dado que prescindimos de su no conmutabilidad; el estado de spin del electrón se define por el espinor tridimensional w.

Para calcular la probabilidad de emisión del fotón en el caso cuasiclásico, lo más conveniente es partir no de la fórmula final de la teoría de perturbaciones (44.3), sino de la fórmula en la que todavía no se ha efectuado la integración respecto del tiempo. Para la probabilidad diferencial total (al cabo de tiempo prácticamente infinito) tenemos ★★

$$dw = \sum_f |a_{fi}|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad a_{fi} = \int_{-\infty}^{\infty} V_{fi}(t)\, dt \tag{59.7}$$

[cf., por ejemplo, III (41.2)]; la suma se extiende a todos los estados finales del electrón.

Teniendo en cuenta (59.6), el elemento de matriz V_{fi} para emisión del fotón ω, $\boldsymbol{k}$ se puede escribir en términos de operadores en la forma:

$$V_{fi}(t) = -e \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\hbar\omega}} \int d^3x \left[\varphi_f^* e^{\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t} \frac{u^+(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}} \right] e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{e}^* \boldsymbol{\alpha} \frac{u(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t} \varphi_i$$

★ En este párrafo (no como en el cap. IV) el impulso generalizado se representa en mayúscula $\boldsymbol{P}$; en cambio, la notación $\boldsymbol{p}$ se utiliza para el impulso ordinario (el cinético).

★★ Substituyendo

$$V_{fi}(t) = V_{fi} e^{i\omega_{fi}t}$$

se obtendrá: $a_{fi} = 2\pi V_{fi} \delta(\omega_{fi})$. Teniendo en cuenta que el cuadrado de la función δ ha de entenderse en el sentido de que (véase pág. 272).

$$[\delta(\omega_{fi})]^2 \to t\, 2\pi\delta(\omega_{fi})$$

(donde t es el tiempo total de observación), a partir de (59.7) obtendremos para la probabilidad por unidad de tiempo la fórmula (44.3).

donde los operadores entre corchetes [...] actúan hacia la izquierda; el campo del fotón se ha elegido de acuerdo con el contraste transversal en tres dimensiones. Los factores exp ($\pm iHt/\hbar$) transforman los operadores de Schrödinger que aparecen entre ellos en los operadores que dependen explícitamente del tiempo de la representación de Heisenberg. Escribiremos V_{fi} en la forma

$$V_{fi} = e\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\hbar\omega}} \langle f\,|Q(t)|\,i\rangle\, e^{i\omega t} \tag{59.8}$$

donde $Q(t)$ designa el operador de Heisenberg

$$Q(t) = \frac{u_f^{\dagger}(p)}{\sqrt{2H}} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^*)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{u_i(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}} \tag{59.8a}$$

y el elemento de matriz $\langle f|\ldots|i\rangle$ se toma respecto de las funciones φ_f y φ_i.

La suma en (59.7) se extiende a todas las funciones de onda finales φ_f; esta suma se efectúa mediante la igualdad

$$\sum_f \varphi_f^*(\boldsymbol{r}')\varphi_f(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}),$$

que expresa el carácter completo del sistema de funciones φ_f *. El resultado que se obtiene es

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega}\frac{d^3k}{4\pi^2}\int dt_1 \int dt_2 \cdot e^{i\omega(t_1 - t_2)}\, \langle i\,|\,\mathrm{Q}^{+}(t_2)\,\mathrm{Q}(t_1)\,|\,i\rangle. \tag{59.9}$$

Si la integración se extiende a un intervalo suficientemente largo de tiempo, en vez de t_1, t_2 cabe introducir las nuevas variables

$$\tau = t_2 - t_1, \quad t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

y en la integral respecto de t considerar el integrando como probabilidad de emisión por unidad de tiempo. Multiplicándolo por $\hbar\omega$, obtendremos la intensidad

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2}\, d^3k \int e^{-i\omega\tau} \left\langle i \middle|\, \mathrm{Q}^{+}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \mathrm{Q}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \middle|\, i\right\rangle d\tau. \tag{59.10}$$

Un electrón ultrarrelativista radia en un cono estrecho que forma ángulos $\theta \sim m/\varepsilon$ respecto de su velocidad $\boldsymbol{v}$. En consecuencia, la emisión en una dirección dada $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ se produce en el segmento de trayectoria en el que $\boldsymbol{v}$ gira un ángulo $\sim m/\varepsilon$. Dicho segmento se recorre en un tiempo τ tal que $\tau|\dot{\boldsymbol{v}}| \approx \tau\omega_0 \sim m/\varepsilon \ll 1$. Precisamente este intervalo proporciona la contribución fundamental a la integral respecto de τ. Por lo tanto, en los cálculos que siguen desarrollaremos sistemáticamente todas las cantidades en serie de potencias de $\omega_0\tau$. Al hacerlo, sin embargo,

* Recordaremos que (en 59.8) no se ha efectuado todavía la integración respecto del tiempo, de modo que no se ha expresado la conservación de la energía y la suma respecto de φ_f no queda limitada por condición alguna.

puede resultar necesario conservar más de un término en el desarrollo, debido a reducciones que se producen en virtud de que $1 - \boldsymbol{nv} \sim \theta^2 \sim (m/\varepsilon)^2$.

Si el operador Q^+Q se lleva a la forma de producto de operadores que conmuten (dentro de la aproximación exigida), para formar el elemento de matriz diagonal $\langle i | \ldots | i \rangle$ bastará substituir estos operadores por los valores clásicos (funciones del tiempo) de las correspondientes cantidades. Esto se consigue de la siguiente manera.

Conforme con lo dicho antes, en la expresión de $Q(t)$ hay que tener en cuenta únicamente la no conmutabilidad de los operadores del electrón con el operador $\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}(t)]$, ligado con el campo del fotón. Tenemos

$$\mathbf{p}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{r}}(\mathbf{p} - \hbar\boldsymbol{k}), \tag{59.11}$$

$$\mathrm{H}(\mathbf{p})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{H}(\mathbf{p} - \hbar\boldsymbol{k}), \tag{59.12}$$

Estas fórmulas son consecuencia de que $e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}$ es el operador desplazamiento en el espacio de impulsos. Mediante (59.11-12), llevaremos hacia la izquierda el operador $e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}(t)}$ en (59.8a) y escribiremos $Q(t)$ en la forma

$$Q(t) = e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}(t)}R(t), \quad R(t) = \frac{u_f^+(\mathrm{p}')}{\sqrt{2\mathrm{H}'}}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}^*)\frac{u_i(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}}, \tag{59.13}$$

donde $\mathrm{H}' = \mathrm{H}(\mathbf{p} - \hbar\boldsymbol{k})$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \hbar\boldsymbol{k}$.

Ahora bien,

$$Q_2^+Q_1 = R_2 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}_2}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}_1}R_1 \tag{59.14}$$

(aquí y en lo que sigue los índices 1 y 2 representan los valores de una magnitud en los instantes $t_1 = t - \tau/2$ y $t_2 = t + \tau/2$). Queda por calcular el producto de los dos operadores que no conmutan $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}$ y $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}$. El propio producto puede ya considerarse que conmuta con los restantes factores.

Hagamos

$$\mathrm{L}(\xi) = e^{-i\omega\tau(\xi-1)}e^{i\xi\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}_2}e^{-i\xi\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}_1}, \tag{59.15}$$

donde ξ es un parámetro auxiliar; el operador que nos interesa es $\mathrm{L}(1)$. Derivando la definición (59.15) respecto de ξ, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathrm{L}}{d\xi} = \mathrm{L}(\xi)\, e^{i\xi\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}_2}\mathrm{b}e^{-i\xi\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}_1}, \tag{59.16}$$

donde para abreviar se ha hecho

$$\mathrm{b} = i\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - i\omega\tau.$$

La cantidad b se puede expresar en función de $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}(t_1)$ mediante la ecuación del movimiento clásico en un plano perpendicular a $\boldsymbol{H}$ *:

---

* Cabe proceder así porque la no conmutabilidad de las componentes de la velocidad en el campo magnético conduce a términos cuyo orden de magnitud es el de $\hbar\omega_0/\varepsilon$ y carece de importancia.

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{eH} \operatorname{sen} \frac{eH\tau}{\varepsilon} + \frac{[\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{H}]}{eH^2} \left(1 - \cos \frac{eH\tau}{\varepsilon}\right)$$

(véase II, § 21), o bien desarrollando en potencias de τ:

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \approx \boldsymbol{v}_1 \left(\tau - \frac{e^2H^2}{6\varepsilon^2}\tau^3\right) + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{H} \frac{e}{2\varepsilon} \tau^2 \tag{59.17}$$

de aquí se sigue para $b(\boldsymbol{p}_1)$:

$$b(\boldsymbol{p}_1) \approx i\omega\tau \left\{(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} - 1) + \tau \frac{e\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{H}]}{2\varepsilon^2} - \tau^2 \frac{e^2H^2}{6\varepsilon^2}\right\} \tag{59.17a}$$

(en el último término se ha hecho $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_1 \approx 1$). Teniendo de nuevo en cuenta el sentido de $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1}$ como operador desplazamiento en el espacio-p, tenemos

$$e^{i\xi\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1} b(\boldsymbol{p}_1) e^{-i\xi\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1} = b(\boldsymbol{p}_1 - \xi\hbar\boldsymbol{k}) \equiv b_-;$$

el signo menos como subíndice significa aquí y en lo que sigue que la cantidad en cuestión se considera en tanto que función del argumento $\boldsymbol{p}_1 - \hbar\xi\boldsymbol{k}$. Transformemos b_- tomando la función $b(\boldsymbol{p})$ de (59.17a). En el primer término escribiremos

$$\boldsymbol{v}_- \cdot \boldsymbol{n} - 1 \approx \frac{1}{2}[(\boldsymbol{v}_- \cdot \boldsymbol{n})^2 - 1] = \frac{1}{2\varepsilon_-^2}\{(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{n} - \xi\hbar\omega)^2 - (\boldsymbol{p}_1 - \xi\hbar\boldsymbol{k})^2 - m^2\} =$$
$$= \frac{(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{n})^2 - \varepsilon^2}{2\varepsilon_-^2} \approx \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_-^2}(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} - 1).$$

La transformación de los términos restantes en (59.17a) queda reducida simplemente a substituir ε en el denominador por ε_-. De esta manera, $b_- = (\varepsilon/\varepsilon_-)^2 b$. Teniendo en cuenta ahora que las direcciones $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{n}$ son próximas entre sí y que $\varepsilon \approx p$, se puede suponer, dentro de los límites de aproximación fijados, que $\varepsilon_- \approx \varepsilon - \xi\hbar\omega$.

En definitiva se obtiene la ecuación (59.16) en la forma

$$\frac{dL}{d\xi} = L(\xi) \frac{\varepsilon^2 b}{(\varepsilon - \hbar\xi\omega)^2}.$$

El orden de los factores carece aquí ya de importancia y todas las cantidades se pueden entender en sentido clásico. Resolviendo esta ecuación con la condición $L(0) = e^{i\omega\tau}$, se obtendrá

$$L(\xi) = \exp\left\{b \frac{\xi\varepsilon}{\varepsilon - \hbar\omega\xi} + i\omega\tau\right\},$$

de modo que

$$L(1) = \exp\left\{i\omega\tau + i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1 - \omega\tau)\right\}, \tag{59.18}$$

donde $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$.

Transformaremos los restantes factores en (59.14). El simple desarrollo del producto en $R(t)$ [con la matriz $\boldsymbol{\alpha}$ dada por (21.20)] conduce a

$$R(t) = w_f^* e^* \cdot (A + i[B \times \sigma]) w_i, \tag{59.19}$$

$$A = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2\varepsilon'} v,$$

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\varepsilon + m} - \frac{p'}{\varepsilon' + m}\right) \approx \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon'}\left(n - v + v\,\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

donde $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$, $p'(t) = p(t) - \hbar k$, $n = k/\omega$; se ha prescindido de los términos de orden superior respecto de m/ε. De esta manera, tenemos finalmente

$$\langle i \mid Q_2^+ Q_1 \mid i\rangle = R_2^* R_1 \exp\left\{i\omega\tau + i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(k \cdot r_2 - k \cdot r_1 - \omega\tau)\right\},$$

$$R_2^* R_1 = \mathrm{Tr}\,\frac{1 + \zeta_i \cdot \sigma}{2}((A_2 - i[B_2 \times \sigma]) \cdot e)\,\frac{1 + \zeta_f \sigma}{2}((A_1 + i[B_1 \times \sigma]) \cdot e^*). \tag{59.20}$$

Los factores $(1 + \zeta \cdot \sigma)/2$ son las matrices 2×2 densidad de polarización del electrón inicial y final.

Consideremos la intensidad de la radiación sumada respecto de las polarizaciones del fotón y del electrón final y promediada respecto de las polarizaciones del electrón inicial. Como resultado de las operaciones indicadas se obtendrá, después de un cálculo simple*,

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{polar}} R_2^* R_1 = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{2\varepsilon'^2}(v_1 \cdot v_2 - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon'}\right)^2\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2.$$

Dentro de la aproximación exigida, se tiene

$$v_1 \cdot v_2 = v^2 - \frac{\tau^2}{4}\dot{v}^2 + \frac{\tau^2}{4} v \cdot \ddot{v} = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\omega_0^2 \tau^2.$$

Substituyendo estas expresiones en (59.20) y luego en (59.10), se obtendrá, teniendo en cuenta (59.17),

---

* Se han utilizado aquí, también, las siguientes propiedades. Al sumar respecto de e, se tiene

$$\sum_e (v_1 \cdot e)(v_2 \cdot e^*) = v_1 \cdot v_2 - (v_1 \cdot n)(v_2 \cdot n).$$

Pero al substituir (59.20) en (59.9) cabe efectuar la integración por partes, observando que

$$(v_1 \cdot n) \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'} k \cdot r_1\right) = \frac{i\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\frac{d}{dt_1}\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'} k \cdot r_1\right),$$

y análogamente para $v_2 \cdot n$. En definitiva se encuentra que, con vistas a la ulterior integración, $v \cdot n$ y $v_2 \cdot n$ se pueden substituir aquí por 1.

$$dI = -\frac{e^2}{4\pi^2}\omega^2 d\omega\, do_n \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m^2}{\varepsilon\varepsilon'} + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{4\varepsilon'^2}\omega_0^2\tau^2\right) \exp\left\{-\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\left(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\tau^2}{24}\omega_0^2\right)\right\} d\tau. \qquad (59.21)$$

Esta fórmula da la distribución espectral y angular de la intensidad de radiación.

Introduzcamos el ángulo ϑ formado por $\boldsymbol{n}$ y el plano de la órbita del electrón, como también el ángulo ψ entre las proyecciones del vector $\boldsymbol{v}$ sobre este plano y el vector $\boldsymbol{n}$. Teniendo en cuenta que la contribución fundamental a la integral la proporcionan los ángulos pequeños, se puede hacer

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = v\cos\vartheta\cos\psi \approx v\left(1 - \frac{\vartheta^2+\psi^2}{2}\right).$$

Al integrar (59.21) conviene introducir en vez de τ y ψ nuevas variables x, y definidas por

$$\omega_0\tau = \left(\frac{2\omega_0\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\right)^{1/3}(x+y), \qquad \psi = \left(\frac{2\omega_0\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\right)^{1/3}\frac{x-y}{2}.$$

Entonces el exponente en (59.21) toma la forma

$$-i\left(x\eta + \frac{x^3}{3} + y\eta + \frac{y^3}{3}\right),$$

donde se han introducido las notaciones

$$\eta = \left(\frac{u}{2\chi}\right)^{2/3}(1+\delta^2), \quad u = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon'} = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon - \hbar\omega}, \quad \delta = \frac{\vartheta\varepsilon}{m}. \qquad (59.22)$$

Las integrales respecto de x, y se expresan mediante la función de Airy y su derivada *. Se obtiene así la distribución espectral en forma de integral

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2e^2m^2}{\pi\hbar\varepsilon}\frac{u}{1+u}\left(\frac{u}{2\chi}\right)^{1/3} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\Phi^2(\eta) + (1+\delta^2)\left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right)\left[\Phi^2(\eta) + \frac{1}{\eta}\Phi'^2(\eta)\right]\right\} d\delta\,. \qquad (59.23)$$

La contribución fundamental a ésta la proporcionan los ángulos $\vartheta \sim m/\varepsilon$ ($\delta \sim 1$). En cambio, el máximo de la distribución se encuentra para frecuencias tales que $\eta \sim (\hbar\omega/\varepsilon'\chi)^{2/3} \sim 1$. Cuando $\chi \ll 1$ se sigue de aquí (59.1), y cuando $\chi \gg 1$, (59.4).

En la figura 5 se representa gráficamente la distribución espectral para dife-

* Para la definición de la función de Airy y su relación con las funciones de Mac Donald, véase III, § *b*; II, págs. 199, 267.

rentes valores de χ*. En ordenadas se ha tomado la magnitud

$$\frac{1}{{}^3/_2\, I_{\mathrm{cl}}} \frac{dI}{d\,(\omega/\omega_c)},$$

como función de la razón ω/ω_c, donde

$$\hbar\omega_c = \frac{\varepsilon\chi}{{}^2/_3 + \chi}, \quad I_{\mathrm{cl}} = \frac{2e^2m^2\chi^2}{3\hbar^2} = \frac{2e^4H^2\varepsilon^2}{3m^4}.$$

La cantidad I_{cl} es la intensidad total clásica de radiación [cf., II (74.2)].

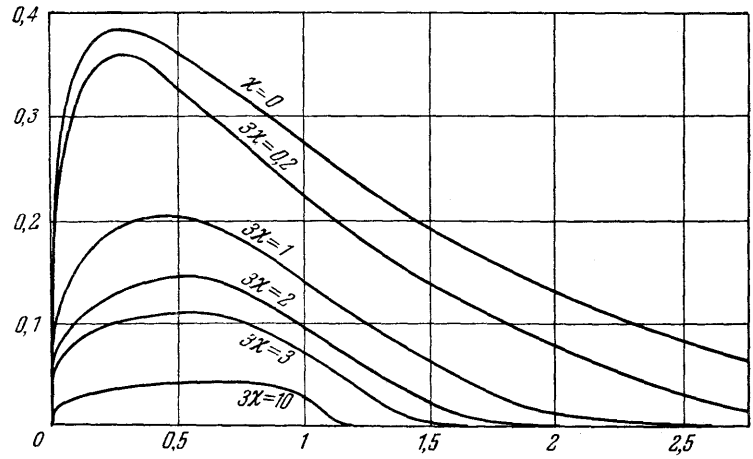


Fig. 5

Utilizando la relación

$$\Phi^2(\eta) + \frac{1}{\eta}\Phi'^2(\eta) = \frac{1}{2\eta}\frac{d^2}{d\eta^2}\Phi^2(\eta)$$

y substituyendo la variable δ por la variable $t = (u/2\chi)^{2/3}\delta^2$, escribiremos (59.23) en la forma

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2e^2m^2}{\pi\hbar\varepsilon}\frac{u}{1+u}\left\{-1 + \frac{2}{x}\left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right)\frac{d^2}{dx^2}\right\}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\,\Phi^2(2^{-2/3}x + t),$$

donde $x = (u/\chi)^{2/3}$. Valiéndonos además de la fórmula**

---

* Los gráficos de las figuras 5 y 6 se han construido de acuerdo con los valores calculados por *N. P. Klepikov*.

** La deducción de esta fórmula puede encontrarse en el artículo de D. E. Aspnes, Phys. Rev. **147**, 554 (1966).

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \Phi^2 (2^{-2/3} x + t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_x^\infty \Phi (x)\, dx,$$

reducimos la distribución espectral a la forma

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{e^2 m^2}{\sqrt{\pi}\, \hbar\varepsilon} \frac{u}{1+u} \left\{ \int_x^\infty \Phi (x)\, dx + \frac{2}{x} \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) \Phi'(x) \right\} \qquad (59.24)$$

En el caso límite clásico se tiene $\hbar\omega \ll \varepsilon$, de modo que $u \approx \hbar\omega/\varepsilon$, $x \approx (\omega/\omega_0)^{2/3} (m/\varepsilon)^2$ y (59.24) se transforma en la fórmula clásica II (74.13).

Haciendo

$$dI = \frac{dI}{d\omega}\, d\omega = \frac{dI}{d\omega} \frac{\varepsilon}{(1+u)^2 \hbar}\, du$$

e integrando respecto de u entre los límites 0 e ∞ [efectuando la integración dos veces en el primer término de (59.24)], se obtiene

$$I = -\frac{e^2 m^2 \chi^2}{2\sqrt{\pi}\, \hbar^2} \int_0^\infty \frac{4 + 5\chi x^{3/2} + 4\chi^2 x^3}{(1+\chi x^{3/2})^4} \Phi' (x)\, x\, dx. \qquad (59.25)$$

En la figura 6 se representa gráficamente la función $I(\chi)/I_{\text{cl}}$.

Cuando $\chi \ll 1$, en la integral cuenta esencialmente el dominio en que $x \sim 1$. Desarrollando el integrando en potencias de χ y efectuando la integración de este desarrollo mediante las fórmulas

$$\int_0^\infty x^\nu \Phi' (x)\, dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, 3^{(4\nu-1)/6}\, \Gamma\left(\frac{\nu}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{3}\right),$$

se obtendrá

$$I = I_{\text{cl}} \left(1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \chi + 48\chi^2 - \ldots \right). \qquad (59.26)$$

Cuando $\chi \gg 1$, en la integral influye fundamentalmente el intervalo en que $\chi x^{3/2} \sim 1$, es decir, $x \ll 1$. En primera aproximación se puede substituir, por consiguiente, $\Phi'(x)$ por $\Phi'(0) = -3^{1/6}\Gamma(2/3)/2\sqrt{\pi}$, hecho lo cual la integración conduce al resultado

$$I \approx \frac{32\Gamma(2/3)\, e^2 m^2}{243\hbar^2} (3\chi)^{2/3} = 0{,}82 \frac{e^2 m^2}{\hbar^2} \left(\frac{H\varepsilon}{H_0 m} \right)^{2/3}. \qquad (59.27)$$

La radiación de frenado magnético determina una polarización de los electrones que se mueven en el campo (*A. A. Sokolov, I. M. Ternov*, 1963). Para estudiar esta cuestión hay que hallar la probabilidad de la transición radiativa con inversión del sentido del spin.

Haciendo en (59.20) $\zeta_i = -\zeta_f \equiv \zeta$, $|\zeta| = 1$, se obtendrá

$$R_2^* R_1 = (\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2) - (e^* \cdot \boldsymbol{B}_1)(e \cdot \boldsymbol{B}_2) - (e^* \cdot [\boldsymbol{B}_1 \times \zeta])(e \cdot [\boldsymbol{B}_2 \times \zeta]) - i(\zeta \cdot e^*)(e \cdot |\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2|).$$

La suma respecto de las polarizaciones del fotón da, después de transformaciones sencillas,

$$\sum_e R_2^* R_1 = (\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2)(1 - (\zeta \cdot \boldsymbol{n})^2) + (\zeta \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_1)(\zeta \cdot \boldsymbol{B}_2) + \\ + (\zeta \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_2)(\zeta \cdot \boldsymbol{B}_1) - i(\zeta - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \zeta))|\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2|. \quad (59.28)$$

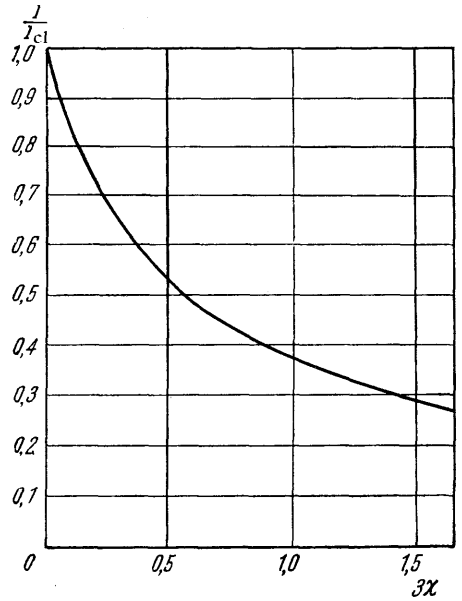


Fig. 6

Supondremos que $\chi \ll 1$ y se determinará solamente el término principal del desarrollo de la probabilidad en potencias de $\hbar$. Puesto que la expresión (59.28) [con $\boldsymbol{B}$ dado por (59.19)] contiene ya $\hbar^2$, todas las cantidades ε' que quedan [entre ellas las que aparecen en el exponente de (59.20)] se pueden substituir por ε.

Desarrollando

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v} + \frac{\tau}{2}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v} - \frac{\tau}{2}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \tau\boldsymbol{v} + \frac{\tau^3}{24}\ddot{\boldsymbol{v}}$$

y substituyendo (59.28) en (59.20) y luego en (59.10), se encuentra la probabilidad diferencial de transición por unidad de tiempo ($dw = dI/\hbar\omega$). Su integración respecto de $\boldsymbol{k}$ se efectúa mediante la fórmula

$$\int f(k_\mu)\, e^{-ikx}\, \frac{d^3k}{\omega} = -f(i\partial_\mu)\, \frac{4\pi}{(x_0 - i0)^2 - \boldsymbol{x}^2}, \tag{59.29}$$

donde en el presente caso

$$x_0 = \tau, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \qquad x^2 = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2 = \tau^2\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2} + \frac{\tau^2\omega_0^2}{12}\right).$$

El cálculo conduce al resultado

$$w = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5 \omega_0^3 \oint \frac{dz}{(1 + z^2/12)^3}\left[\frac{3}{z^4} - \frac{5}{12z^2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{z^4} + \frac{5}{12z^2}\right)(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{v})^2 - \frac{2i}{z^3\omega_0}(\boldsymbol{\zeta}\cdot[\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v}])\right],$$

donde se ha substituido $z = \tau\omega_0\varepsilon/m$ y el camino de integración respecto de z sigue el eje real por debajo y se cierra en el semiplano inferior. Efectuando esta última integración, obtendremos en definitiva la probabilidad total de transición radiativa con inversión del spin:

$$w = \frac{5\sqrt{3}\alpha}{16}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5 \omega_0^3\left(1 - \frac{2}{9}\zeta_\parallel^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp\right), \tag{59.30}$$

donde $\zeta_\parallel = \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{v}$, $\zeta_\perp = \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{H}/H$. Esta fórmula es aplicable tanto a los electrones ($e < 0$), como a los positones ($e > 0$).

La probabilidad (59.30) no depende del signo de la polarización longitudinal $\zeta_\parallel$, pero sí depende del signo de $\zeta_\perp$. En consecuencia, también es transversal la polarización que resulta de la emisión de radiación*. Para electrones la probabilidad de transición de un estado con spin orientado « según el campo » ($\zeta_\perp = 1$) a un estado con spin « opuesto al campo » es mayor que la probabilidad de la transición inversa. Por ello, la polarización de los electrones por radiación está dirigida en sentido opuesto al campo y su grado, en un estado estacionario, es igual a (para $\zeta_\parallel = 0$)

$$\frac{w(\zeta_\perp = -1) - w(\zeta_\perp = 1)}{w(\zeta_\perp = -1) + w(\zeta_\perp = 1)} = \frac{8\sqrt{3}}{15} = 0{,}93.$$

Los positones se polarizan (con igual grado de polarización) en la dirección orientada del campo.

* Esta circunstancia, por cierto, era de prever: el vector axil de la polarización resultante sólo puede estar orientado en el sentido del único vector axil que figura en el problema, el $\boldsymbol{H}$.

Capítulo 6

DISPERSIÓN DE LA LUZ

§ 60. El tensor de dispersión

La dispersión de un fotón por un sistema de electrones (para concretar, hablaremos de un átomo) consiste en la absorción de un fotón inicial $\boldsymbol{k}$ con emisión simultánea de otro fotón $\boldsymbol{k}'$. En este proceso el átomo puede quedar bien en el nivel de energía inicial, bien en otro nivel del espectro discreto. En el primer caso la frecuencia del fotón no cambia *(dipersión de Rayleigh* o *sin desplazamiento)*, pero en el segundo varía en una cantidad

$$\omega' - \omega = E_1 - E_2, \tag{60.1}$$

donde E_1, E_2 son las energías inicial y final del átomo *(dispersión combinatoria* o *con desplazamiento)**.

Dado que el operador excitación electromagnética carece de elementos de matriz no nulos para transiciones en las que cambian simultáneamente dos números de ocupación fotónica, el efecto de dispersión se manifiesta solamente en la segunda aproximación de la teoría de perturbaciones. Hay que considerarlo como un efecto que se produce pasando por determinados estados intermedios que pueden ser de dos tipos:

I. El fotón $\boldsymbol{k}$ es absorbido, el átomo pasa a uno de sus estados excitados E_n; en una transición subsiguiente que lleva al estado final se emite el fotón $\boldsymbol{k}'$;

II. Se emite el fotón $\boldsymbol{k}'$, el átomo pasa a un estado E_n; en la transición al estado final, se absorbe el fotón $\boldsymbol{k}$.

El papel de elemento de matriz para el proceso considerado lo representa la suma [véase III (43.6)]

---

* En este capítulo las cantidades que se refieren al estado inicial y al final del sistema dispersor se distinguirán por los índices 1 y 2.

$$V_{21} = \sum_n{}' \left(\frac{V'_{2n} V_{n1}}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_n^{\mathrm{I}}} + \frac{V_{2n} V'_{n1}}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_n^{\mathrm{II}}} \right), \tag{60.2}$$

donde la energía inicial del sistema « átomo + fotones » es $\mathcal{E}_1 = E_1 + \omega$ y las energías de los estados intermedios son

$$\mathcal{E}_n^{\mathrm{I}} = E_n, \quad \mathcal{E}_n^{\mathrm{II}} = E_n + \omega + \omega'.$$

$V_{..}$ son los elementos de matriz de absorción del fotón $\boldsymbol{k}$, $V'_{..}$ los elementos de matriz de emisión del fotón $\boldsymbol{k}'$; el estado inicial se excluye al sumar respecto de n (lo que se indica por un apóstrofo en el símbolo de suma). La sección eficaz de dispersión vale

$$d\sigma = 2\pi |\, V_{21} \,|^2 \frac{\omega'^2 \, do'}{(2\pi)^3}, \tag{60.3}$$

donde do' es el elemento de ángulo sólido en las direcciones $\boldsymbol{k}'$ *.

Supondremos que las longitudes de onda de los fotones inicial y final son grandes comparadas con las dimensiones a del sistema dispersor. De acuerdo con esto, todas las transiciones se estudian en la aproximación dipolar. Si los estados de los fotones se representan por ondas planas, a esta aproximación corresponde la substitución de los factores $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ por la unidad. Las funciones de onda de los fotones (en el contraste transversal en tres dimensiones) son entonces

$$\boldsymbol{A}_{e\omega} = \sqrt{4\pi} \frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{A}_{e'\omega'} = \sqrt{4\pi} \frac{\boldsymbol{e}'}{\sqrt{2\omega'}} e^{-i\omega' t}.$$

En las condiciones consideradas, el operador de interacción electromagnética se puede expresar en la forma

$$V = -\, \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \tag{60.4}$$

donde $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ es el operador campo eléctrico y $\mathbf{d}$ el operador momento dipolar del átomo (relación análoga a la expresión clásica de la energía de un sistema de pequeñas dimensiones en un campo eléctrico — véase II, § 42). Sus elementos de matriz se escriben:

$$V_{n1} = -\, i \sqrt{2\pi\omega}\, (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{d}_{n1}), \quad V'_{2n} = i \sqrt{2\pi\omega'}\, (\boldsymbol{e}'^* \cdot \boldsymbol{d}_{2n}).$$

Substituyendo estas expresiones en (60.2-3), obtendremos la sección eficaz de dispersión (que escribiremos en unidades ordinarias **):

---

* La energía de la luz dI' dispersada (por segundo) en el ángulo sólido $d\sigma'$, se expresa en función de la intensidad I (densidad de flujo de energía) de la luz incidente mediante la relación

$$dI' = I \frac{\omega'}{\omega} d\sigma.$$

** *H. A. Kramers* y *W. Heisenberg*, fueron los primeros en obtener esta fórmula. (1925)

$$d\sigma = \left| \sum_n \left\{ \frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\cdot\boldsymbol{e}'^*)(\boldsymbol{d}_{n1}\cdot\boldsymbol{e})}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\cdot\boldsymbol{e})(\boldsymbol{d}_{n1}\cdot\boldsymbol{e}'^*)}{\omega_{n2} + \omega} \right\} \right|^2 \frac{\omega\omega'^3}{\hbar^2 c^4}\, do', \tag{60.5}$$

$$\hbar\omega_{n1} = E_n - E_1, \quad \hbar\omega_{n2} = E_n - E_2.$$

La suma se extiende a todos los estados posibles del átomo, incluidos los estados del espectro continuo (los estados 1 y 2 desaparecen automáticamente de la suma porque los elementos de matriz diagonales $\boldsymbol{d}_{11} = \boldsymbol{d}_{22} = 0$).

Introduzcamos la notación *

$$(c_{ik})_{21} = \sum_n \left[\frac{(d_i)_{2n}\,(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{(d_k)_{2n}\,(d_i)_{n1}}{\omega_{n2} + \omega} \right] \tag{60.6}$$

($i, k = x, y, z$ son índices vectoriales en tres dimensiones). En función de esta magnitud, la fórmula (60.5) se escribe también en la forma

$$d\sigma = \omega\,(\omega + \omega_{12})^3 \,|\, (c_{ik})_{21} e_i^* e_k \,|^2\, do'. \tag{60.7}$$

La notación (60.6) se justifica por el hecho de que esta suma se puede efectivamente representar como elemento de matriz de un cierto tensor. La manera más simple de comprobarlo consiste en introducir una magnitud vectorial $\boldsymbol{b}$ cuyo operador satisface la ecuación

$$\left(i\frac{d}{dt} + \omega\right)\mathbf{b} = \mathbf{d}.$$

Sus elementos de matriz son:

$$\boldsymbol{b}_{n1} = \frac{\boldsymbol{d}_{n1}}{\omega - \omega_{n1}}, \qquad \boldsymbol{b}_{2n} = \frac{\boldsymbol{d}_{2n}}{\omega + \omega_{n2}},$$

de modo que

$$(c_{ik})_{21} = (b_k d_i - d_i b_k)_{21}. \tag{60.8}$$

Llamaremos *tensor de dispersión* de la luz el definido por los elementos de matriz $(c_{ik})_{21}$.

De lo dicho se sigue que las reglas de selección para la dispersión coinciden con las reglas de selección para los elementos de matriz de un tensor arbitrario de segundo orden. Pero se advierte en seguida que si el sistema posee un centro de simetría (de modo que sus estados se pueden clasificar según la paridad), las transiciones son sólo posibles entre estados cuya paridad sea la misma (entre ellas las que no van acompañadas de variación del estado). Esta regla está en contradicción con la regla de selección relativa a la paridad en el caso de radiación (dipolar eléctrica) de modo que se tiene una prohibición alternativa: las transiciones permitidas en la radiación están prohibidas en la dispersión, y las que están permitidas en la dispersión, están prohibidas en la radiación.

Descompongamos el tensor c_{ik} en partes irreducibles:

---

* La mayoría de los resultados que siguen, expuestos en los §§ 60-62, se deben sobre todo a *G. Placzek*, 1931-1933.

$$c_{ik} = c^0\delta_{ik} + c^s_{ik} + c^a_{ik}, \tag{60.9}$$

donde

$$c^0 = \frac{1}{3}c_{il},$$

$$c^s_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} + c_{ki}) - c^0\delta_{ik}, \tag{60.10}$$

$$c^a_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} - c_{ki})$$

son, respectivamente, un escalar, un tensor simétrico (de traza nula) y un tensor antisimétrico. Sus elementos de matriz se escriben:

$$(c^0)_{21} = \frac{1}{3}\sum_n \frac{\omega_{n1} + \omega_{n2}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)}(d_i)_{2n}(d_i)_{n1}, \tag{60.11}$$

$$(c^s_{ik})_{21} = \frac{1}{2}\sum_n \frac{\omega_{n1} + \omega_{n2}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)}[(d_i)_{2n}(d_k)_{n1} + (d_k)_{2n}(d_i)_{n1}] - (c^0)_{21}\delta_{ik}, \tag{60.12}$$

$$(c^a_{ik})_{21} = \frac{2\omega + \omega_{12}}{2}\sum_n \frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1} - (d_k)_{2n}(d_i)_{n1}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)}. \tag{60.13}$$

Veamos algunas propiedades del tensor de dispersión en los casos límite de frecuencias pequeñas y grandes del fotón*.

Para la dispersión sin desplazamiento ($\omega_{12} = 0$), la parte antisimétrica del tensor, tiende a cero cuando $\omega \to 0$ [gracias al factor ω delante de la suma en (60.13)]. En cambio, la parte escalar y la parte simétrica del tensor de dispersión tienden a límites finitos no nulos cuando $\omega \to 0$. De acuerdo con esto, las secciones eficaces son proporcionales a ω^4 para valores pequeños de ω.

En el caso opuesto, cuando la frecuencia ω es grande comparada con todas las frecuencias ω_{n1}, ω_{n2} que intervienen de manera esencial en (60.6) (pero, naturalmente, manteniéndose como antes la longitud de onda $\gg a$), hemos de encontrar de nuevo las fórmulas de la teoría clásica. El primer término del desarrollo del tensor de dispersión en potencias de $1/\omega$ es igual a

$$\frac{1}{\omega}\sum_n [(d_k)_{2n}(d_i)_{n1} - (d_i)_{2n}(d_k)_{n1}] = \frac{1}{\omega}(\mathrm{d}_k\mathrm{d}_i - \mathrm{d}_i\mathrm{d}_k)_{21}$$

y se anula en virtud de la conmutabilidad de los operadores d_i, d_k. El término siguiente del desarrollo se escribe

$$(c_{ik})_{21} = \frac{1}{\omega^2}\sum_n [\omega_{2n}(d_k)_{2n}(d_i)_{n1} - (d_i)_{2n}\omega_{n1}(d_k)_{n1}] = \frac{1}{i\omega^2}(\dot{\mathrm{d}}_k\mathrm{d}_l - \mathrm{d}_i\dot{\mathrm{d}}_k)_{21}.$$

Aplicando la definición $\boldsymbol{d} = \Sigma e\boldsymbol{r}$ (la suma se extiende a todos los electrones del

---

* El caso de resonancia (cuando ω difiere poco de una de las frecuencias ω_{n1} u ω_{2n}) se estudiará en el § 64.

átomo) y las reglas de conmutación entre impulsos y coordenadas, obtendremos

$$(c_{ik})_{11} = -\frac{Ze^2}{m\omega^2}\delta_{ik}, \qquad (c_{ik})_{21} = 0, \tag{60.14}$$

donde Z es el número total de electrones en el sistema. Así, pues, en el límite de grandes frecuencias queda del tensor de dispersión sólo la parte escalar, produciéndose la dispersión sin que cambie el estado del sistema (es decir, la dispersión es por completo coherente — véase más adelante —). La sección eficaz de dispersión vale en este caso

$$d\sigma = r_e^2 Z^2 \,|\, \boldsymbol{e}'^* \cdot \boldsymbol{e} \,|^2 \, do', \tag{60.15}$$

donde $r_e = e^2/m$. Después de sumar respecto de las polarizaciones del fotón final, se obtiene la fórmula

$$d\sigma = r_e^2 Z^2 \{1 - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}')^2\} \, do' = r_e^2 Z^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot do', \tag{60.16}$$

que, en efecto, coincide con la fórmula clásica de Thomson [II (80.7)] (θ es el ángulo formado por la dirección de dispersión y el vector polarización del fotón incidente).

Consideremos la dispersión de la luz por un sistema de N átomos idénticos que se encuentran en un volumen cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda. El tensor de dispersión de este conjunto de átomos será igual a la suma de los tensores de dispersión de cada uno de ellos. Sin embargo, al aplicar este criterio hay que tener en cuenta que no es posible, sin más, suponer iguales las funciones de onda (mediante las cuales se calcularán los elementos de matriz del momento dipolar) para átomos idénticos, considerados a la vez. Las funciones de onda, por su propia esencia, están definidas tan sólo salvo un factor de fase arbitrario y cada átomo posee su propio factor. La sección eficaz de dispersión debe promediarse respecto de los factores de fase de cada átomo independientemente.

El tensor de dispersión $(c_{ik})_{21}$ de cada átomo contendrá el factor $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, donde φ_1, φ_2 son las fases de las funciones de onda de los estados inicial y final. Para la dispersión con desplazamiento, los estados 1 y 2 son distintos y este factor es diferente de la unidad. En el cuadrado del módulo

$$|\, e_i'^* e_k \textstyle\sum (c_{ik})_{21} \,|^2$$

(la suma se extiende a los N átomos), los productos de términos de la suma que corresponden a átomos distintos contendrán factores de fase que se anularán en el promedio independiente respecto de las fases de los átomos; solamente quedan los cuadrados de los módulos de cada uno de los términos. Esto significa que la sección eficaz de dispersión total provocada por N átomos se obtiene multiplicando por N la sección eficaz de dispersión de uno sólo (dispersión incoherente).

Pero si el estado inicial y final del átomo coinciden, los factores $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 1$. La amplitud de dispersión del conjunto de átomos diferirá en este caso en un factor N de la amplitud de dispersión por un átomo solo, mientras que, de acuerdo

con esto, la sección eficaz de dispersión diferirá en un factor N^2 (dispersión coherente). Si el nivel de energía del átomo no es degenerado, la dispersión sin desplazamiento será, pues, del todo coherente. Pero si el nivel de energía es degenerado, se tendrá también una dispersión incoherente sin desplazamiento debida a transiciones del átomo entre estados diferentes degenerados de dicho nivel. Hay que hacer notar que esto último constituye un efecto puramente cuántico: en la teoría clásica, la dispersión sin cambio de frecuencia es, por ello mismo, coherente.

El tensor de dispersión coherente viene dado por el elemento de matriz diagonal $(c_{ik})_{11}$; designémoslo por α_{ik} (prescindiendo para simplificar la notación del índice que debería indicar el estado del átomo). Según (60.6):

$$\alpha_{ik}(\omega) \equiv (c_{ik})_{11} = \sum_n \left[\frac{(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{(d_k)_{1n}(d_i)_{n1}}{\omega_{n1} + \omega} \right]. \tag{60.17}$$

Observando que $(d_i)_{1n} = (d_i)^*_{n1}$, es fácil ver que este tensor es hermítico*:

$$\alpha_{ik} = \alpha^*_{ki}. \tag{60.18}$$

Esto significa que sus partes escalar y simétrica son reales, y la antisimétrica, imaginaria. Observemos que la parte antisimétrica se anula, evidentemente, si el átomo se encuentra en un estado no degenerado; la función de onda de un tal estado es real** y, en consecuencia, reales son también los elementos diagonales de la matriz.

El tensor α_{ik} está relacionado con la polarizabilidad del átomo en un campo eléctrico exterior. Para establecer esta relación, calculemos la corrección que afecta al valor medio del momento dipolar del sistema cuando éste se coloca en un campo eléctrico exterior

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E}^* e^{i\omega t}). \tag{60.19}$$

Puede hacerse esto utilizando una conocida fórmula de la teoría de perturbaciones (III, § 40): si sobre un sistema actúa la perturbación

$$V = \mathrm{F}e^{-i\omega t} + \mathrm{F}^+ e^{i\omega t},$$

la corrección de primer orden a los elementos de matriz diagonales de una magnitud f es igual a

---

* Este resultado se debe en parte a haber prescindido de la anchura natural de la línea y, con ello, también de la posibilidad de absorción de la luz incidente (véase § 64).

** Recordaremos que esta circunstancia está ligada con la simetría respecto del cambio de signo del tiempo (se supone que no existe campo magnético exterior). Al substituir t por $-t$, la función de onda de un estado estacionario ψ se transforma en ψ^*, es decir, ψ y ψ^* describen, ambas, posibles estados de exactamente la misma energía. De aquí se sigue que si el nivel no es degenerado, ψ y ψ^* deben coincidir (salvo un factor de fase que carece de importancia), de modo que es siempre posible definir ψ de modo que sea una función real. Pero si el nivel es degenerado, al formar las funciones de onda conjugado-complejas de las correspondientes a un nivel dado, estas funciones se transforman entre sí y, por ello, no son necesariamente reales.

$$f_{11}^{(1)}(t) = -\sum_n \left\{ \left[\frac{f_{1n}^{(0)} F_{n1}}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{f_{n1}^{(0)} F_{1n}}{\omega_{n1} + \omega} \right] e^{-i\omega t} + \left[\frac{f_{1n}^{(0)} F_{1n}^*}{\omega_{n1} + \omega} + \frac{f_{n1}^{(0)} F_{n1}^*}{\omega_{n1} - \omega} \right] e^{i\omega t} \right\}.$$

En el caso presente

$$F = -\frac{1}{2} \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{E},$$

y la corrección al elemento de matriz diagonal del momento dipolar resulta igual a

$$\boldsymbol{d}_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\boldsymbol{d}} e^{-i\omega t} + \bar{\boldsymbol{d}}^* e^{i\omega t}), \tag{60.20}$$

donde $\boldsymbol{d}$ es el vector de componentes

$$\bar{d}_i = \alpha_{ik} E_k. \tag{60.21}$$

De la última fórmula resulta, evidentemente, que el tensor de dispersión coherente sin desplazamiento $\alpha_{ik}(\omega)$ es a la vez el *tensor de polarizabilidad* del átomo en un campo de frecuencia ω. Cuando $\omega = 0$ la fórmula (60.21) pasa a ser la fórmula III (76.6), con un tensor de polarizabilidad estadística $\alpha_{ik}(0)$ cuya forma es la que resulta de aplicar la teoría ordinaria de perturbaciones en un campo constante.

PROBLEMAS*

1. Calcular la probabilidad de emisión simultánea de dos fotones por un átomo (*M. Göppert-Mayer*, 1931)**.

Solución. La emisión de dos cuantos es, al igual que la dispersión, un efecto de segunda aproximación en la teoría de perturbaciones. La probabilidad buscada difiere de (60.5) tan sólo en: 1) la substitución $\omega \to -\omega$, $\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{e}^*$ (emisión del fotón ω en vez de su absorción); 2) el factor suplementario

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\omega^2 d\omega do}{(2\pi)^3}.$$

Así, pues, la probabilidad de emisión (por unidad de tiempo) vale

$$dw = \left| \sum_n \left[\frac{(\boldsymbol{d}_{2n} \cdot \boldsymbol{e}'^*)(\boldsymbol{d}_{n1} \cdot \boldsymbol{e}^*)}{\omega_{1n} - \omega} + \frac{(\boldsymbol{d}_{2n} \cdot \boldsymbol{e}^*)(\boldsymbol{d}_{n1} \cdot \boldsymbol{e}'^*)}{\omega_{1n} - \omega'} \right] \right|^2 \frac{\omega^3 \omega'^3}{(2\pi)^3 c^6 \hbar^2} \, do do' d\omega \tag{1}$$

---

* En los problemas utilizamos unidades ordinarias.

** La probabilidad de emisión de dos fotones ω y ω' es, de ordinario, muy pequeña comparada con la probabilidad de emisión de un solo fotón de frecuencia $\omega + \omega'$. Constituyen excepción los casos en que las reglas de selección que prohiben el segundo proceso, permiten el primero. Tales son, por ejemplo, las transiciones entre dos estados con $J = 0$, para los cuales están rigurosamente prohibidos todos los procesos de emisión de un solo fotón. Otro ejemplo lo ofrece la transición desde el primer estado excitado del átomo de hidrógeno ($2s_{1/2}$) al estado fundamental ($1s_{1/2}$). Para la radiación $E1$, esta transición está prohibida rigurosamente por razones de paridad. También está prohibida (si se prescinde de la interacción spin-órbita, que es muy débil) la radiación $M1$; en este caso ($l = 0$), el momento magnético es una magnitud puramente espinorial y su elemento de matriz se anula en virtud de la ortogonalidad mutua de las funciones orbitales con diferentes números cuánticos principales. El tiempo de vida del nivel $2s_{1/2}$, determinado por la emisión de dos fotones, es del orden de unos 7 s.

(la suma de frecuencias $\omega + \omega' = \omega_{12}$). Sumando esta expresión respecto de las polarizaciones de los fotones e integrando con relación a las direcciones en que se emiten, obtendremos

$$dw = \frac{8}{9\pi} \left| \sum_n \left[\frac{(d_i)_{2n}\,(d_k)_{n1}}{\omega_{1n} - \omega} + \frac{(d_i)_{2n}\,(d_k)_{n1}}{\omega_{1n} - \omega'} \right] \right|^2 \frac{\omega^3 \omega'^3}{\hbar^2 c^6}\, d\omega.$$

2. Calcular la sección eficaz de la « dispersión forzada »: el fotón incidente $\boldsymbol{k}$ no experimenta cambio alguno, pero bajo su influencia el átomo emite dos fotones — un fotón igual al $\boldsymbol{k}$ y un fotón « dispersado » $\boldsymbol{k}'$.

Solución. La probabilidad del proceso considerado difiere de la probabilidad (1) encontrada en el problema 1 correspondiente a la emisión simultánea de dos cuantos en el factor $2N_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}}$, donde $N_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}}$ es el número de fotones de la luz incidente con $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{e}$ dados; el factor 2 tiene en cuenta que cualquiera de los dos fotones que figuran en la fórmula (1) puede ser el forzado por la radiación. La densidad de flujo de los fotones incidentes es igual a

$$dI = cN_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = N_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}} \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2}\, d\omega\, do.$$

Despejando de aquí $2N_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}}$ en función de dI y dividiendo por dI la probabilidad del proceso, obtendremos la sección eficaz

$$d\sigma = \left| \sum_n \left[\frac{(\boldsymbol{d}_{2n} \cdot \boldsymbol{e}'^*)(\boldsymbol{d}_{n1} \cdot \boldsymbol{e}^*)}{\omega_{1n} - \omega} + \frac{(\boldsymbol{d}_{2n} \cdot \boldsymbol{e}^*)(\boldsymbol{d}_{n1} \cdot \boldsymbol{e}'^*)}{\omega_{1n} - \omega'} \right] \right|^2 \frac{2\omega\omega'^3}{\hbar^2 c^4}\, do'.$$

Aquí, ω es la frecuencia de los fotones incidente y « forzado », ω' la frecuencia del fotón dispersado ($\omega + \omega' = \omega_{12}$).

3. Calcular la probabilidad de dispersión elástica de un electrón (no-relativista) en una onda luminosa estacionaria casi monocromática (*P. L. Kapitsa, P. A. M. Dirac*, 1933).

Solución. Cabe considerar una onda estacionaria como un conjunto de fotones con impulsos $\boldsymbol{k}$ y $-\boldsymbol{k}$ (y polarizaciones idénticas). En cuanto a la dispersión del electrón, puede concebirse como absorción del fotón $\boldsymbol{k}$ y emisión del fotón $-\boldsymbol{k}$, como resultado de lo cual el impulso $\boldsymbol{p}$ del electrón experimenta un incremento $2\hbar\boldsymbol{k}$, que lo hace girar (sin que cambie su valor absoluto) un ángulo θ: $|\boldsymbol{p}|\ \text{sen}\ (\theta/2) = \hbar\omega/c$. La probabilidad de este proceso se puede obtener a partir de la sección eficaz de dispersión Thomson (60.15)

$$d\sigma = r_e^2\, |\, \boldsymbol{e}'^* \cdot \boldsymbol{e}\, |^2\, do' = r_e^2\, do'$$

multiplicando por la densidad de flujo de fotones de impulso $\boldsymbol{k}$ y por el número de fotones de impulso $-\boldsymbol{k}$.

La densidad de flujo de fotones con frecuencias en el intervalo $d\omega$ es igual a

$$\frac{cU_\omega\, d\omega}{2\hbar\omega},$$

donde $U_\omega d\omega$ es la densidad de energía en la onda estacionaria correspondiente al intervalo espectral $d\omega$ (el factor 1/2 tiene en cuenta que la energía de la onda se divide por igual entre fotones que se mueven en sentidos opuestos). Los impulsos $\boldsymbol{k}$ de todos los fotones que forman la onda estacionaria son paralelos a una determinada dirección $\boldsymbol{n}$ (« dirección » de la onda estacionaria). En otras palabras, la densidad de energía como función de la frecuencia y de la dirección de los fotones $\boldsymbol{n}'$ es: $U_\omega \boldsymbol{n}' = U_\omega \delta^{(2)}(\boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n})$. De acuerdo con esto, el número de fotones $\boldsymbol{k}$ es igual a

$$\int N_{-\boldsymbol{k}}\, do' = \frac{8\pi^3 c^3}{\hbar\omega^3} \frac{U_\omega}{2}$$

[cf. (44.8)]. En definitiva obtenemos para la probabilidad de dispersión del electrón (por segundo)

$$w = \frac{2\pi^3 e^4}{m^2\hbar^2\omega^4} \int U_\omega^2 \, d\omega.$$

El factor ω^{-4} se ha sacado fuera del signo de integral porque el grado de no-monocromatismo $\Delta\omega$ se supone pequeño. El valor de la integral es inversamente proporcional al valor $\Delta\omega$ (para una intensidad total dada).

§ 61. Dispersión por sistemas que se orientan libremente

Si el nivel de energía de un átomo no es degenerado, la polarizabilidad y la intensidad de la dispersión coherente vienen determinadas por un mismo tensor $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$. Pero si el nivel es degenerado, los valores observados de dichas cantidades se obtienen promediando respecto de todos los estados correspondientes al nivel dado. La polarización debe definirse como valor medio *:

$$\alpha_{ik} = \overline{(c_{ik})_{11}}.$$

En cambio, la intensidad de dispersión observable se determina por los valores de los productos

$$\overline{(c_{ik})_{11}\,(c_{lm})_{11}}.$$

En consecuencia, el ligamen entre polarizabilidad y dispersión pasa a ser menos directo.

Para átomos o moléculas libres (que no se encuentran en un campo exterior) la degeneración de los niveles suele estar ligada con la posibilidad de que el momento cinético se oriente libremente en el espacio. Sean J_1 y J_2 los momentos cinéticos en los estados inicial y final de la dispersión, respectivamente. Como de ordinario, la sección eficaz de dispersión debe promediarse respecto de todos los valores de la proyección M_1 y sumarse respecto de los valores M_2. Después del primer promedio, la sección eficaz deja de depender de $(2J_2 + 1)$. De esta manera, la sección eficaz de dispersión promediada vale

$$d\bar{\sigma} = \omega\omega'^3 \, c_{iklm}^{(21)} \, e_i'^* e_k e_l' e_m^* do', \tag{61.1}$$

donde

$$c_{iklm}^{(21)} = \frac{1}{2J_1 + 1} \sum_{M_1 M_2} (c_{ik})_{21} (c_{lm})_{21}^* = (2J_2 + 1)\,\overline{(c_{ik})_{21}\,(c_{lm})_{21}^*}^1, \tag{61.2}$$

y el trazo con el índice 1 significa el promedio respecto de M_1.

Para la dispersión sin desplazamiento los estados 1 y 2 se refieren a un mismo nivel de energía ($\omega_{12} = 0$). Si se trata sólo de dispersión coherente, los estados 1 y 2

* Aunque cada una de las cantidades $(c_{ik})_{11}$ puede ser compleja, su valor medio (para sistemas que no se encuentran en un campo magnético exterior) es real. En efecto, para efectuar el promedio se puede elegir de manera arbitraria el conjunto de funciones de onda independientes (que corresponden al nivel degenerado dado) y mediante una elección oportuna cabe siempre conseguir que estas funciones sean reales.

deben coincidir exactamente, es decir, ha de ser $M_1 = M_2$. Entonces la suma respecto de M_2, y con ella también el factor $2J_2 + 1$ en (61.2), desaparecen:

$$c_{iklm}^{\text{coher}} = \overline{(c_{ik})_{11}\,(c_{lm})_{11}^*}^1. \tag{61.3}$$

El resultado del promedio se puede escribir sin acudir a cálculos especiales si se tiene en cuenta que el promedio respecto de M_1 equivale a promediar con relación a todas las orientaciones del sistema, hecho lo cual el valor medio puede expresarse en función del tensor unidad exclusivamente. En todo esto, pueden resultar diferentes de cero tan sólo los valores medios de los productos de las componentes de las partes escalar, simétrica y antisimétrica del tensor de dispersión por separado; es claro que con el tensor unidad es imposible construir expresiones que, por sus propiedades de simetría, puedan corresponder a productos cruzados. Así, pues,

$$c_{iklm}^{(21)} = G_{21}^0 \delta_{ik}\delta_{lm} + c_{iklm}^{(21)s} + c_{iklm}^{(21)a}, \tag{61.4}$$

donde

$$\begin{aligned} G_{21}^0 &= (2J_2+1)\,\overline{|(c^0)_{21}|^2}^1, \\ c_{iklm}^{(21)s} &= (2J_2+1)\,\overline{(c_{ik}^s)_{21}\,(c_{lm}^s)_{21}^*}^1, \\ c_{iklm}^{(21)a} &= (2J_2+1)\,\overline{(c_{ik}^a)_{21}\,(c_{lm}^a)_{21}^*}^1. \end{aligned} \tag{61.5}$$

En otras palabras, la sección eficaz de dispersión (y con ella la intensidad) provocada por un sistema que se orienta libremente se descompone en suma de tres partes independientes, a las que llamaremos *dispersión escalar*, *simétrica* y *antisimétrica*.

Cada uno de los tres términos en (61.4) se expresa en función de una única cantidad independiente. La dispersión escalar, en función de la magnitud G_{21}^0, y para la dispersión simétrica y antisimétrica tenemos

$$\begin{aligned} c_{iklm}^{(21)s} &= \frac{1}{10} G_{21}^s (\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}), \\ G_{21}^s &= (2J_2+1)\,\overline{(c_{ik}^s)_{21}\,(c_{ik}^s)_{21}}^1; \\ c_{iklm}^{(21)a} &= \frac{1}{6} G_{21}^a (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}), \\ G_{21}^a &= (2J_2+1)\,\overline{(c_{ik}^a)_{21}\,(c_{ik}^a)_{21}}^1 \end{aligned} \tag{61.6}$$

(la combinación de tensores unidad se construye según las propiedades de simetría, después de lo cual el factor común se halla por contracción respecto de los pares de índices *il* y *km*).

La substitución de las fórmulas (61.4-6) en (61.1) conduce a la siguiente expresión para la sección eficaz de dispersión:

$$d\bar{\sigma} = \omega\omega'^3 \Big\{ G_{21}^0 |\, \boldsymbol{e}'^* \cdot \boldsymbol{e} \,|^2 + \frac{1}{10} G_{21}^s \Big(1 + |\, \boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{e} \,|^2 - \frac{2}{3} |\, \boldsymbol{e}'^* \cdot \boldsymbol{e} \,|^2\Big) + \\ + \frac{1}{6} G_{21}^a (1 - |\, \boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{e} \,|^2)\Big\} do. \tag{61.7}$$

Esta fórmula determina en forma explícita la dependencia angular y las propiedades de polarización de la dispersión.

La sección eficaz total de dispersión en todas direcciones, sumada para las polarizaciones del fotón final y promediada respecto de las polarizaciones y direcciones de incidencia del fotón inicial, se obtiene con facilidad directamente a partir de (61.1). Para esto observemos que

$$\overline{e_i^* e_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik},$$

si el promedio se efectúa tanto respecto de las polarizaciones como de las direcciones de propagación del fotón (la suma respecto de ellas dará, en cambio, un resultado $2 \cdot 4\pi$ veces mayor). En definitiva se obtiene

$$\bar{\sigma} = \frac{8\pi}{9}\omega\omega'^3 c_{ikik}^{(21)} = \frac{8\pi}{9}\omega\omega'^3 (3G_{21}^0 + G_{21}^s + G_{21}^a). \tag{61.8}$$

Se indicó ya antes que las reglas de selección para la dispersión coinciden con las reglas de selección para los elementos de matriz de un tensor arbitrario de segundo orden. En relación con la descomposición de la intensidad de dispersión en tres partes independientes, es lógico formular estas reglas para cada una de las partes por separado.

Las reglas de selección para la dispersión simétrica coinciden con las reglas de selección correspondientes a la radiación cuadripolar eléctrica, puesto que ésta viene también determinada por un tensor simétrico irreducible (el tensor de momentos cuadripolares). Para la dispersión antisimétrica las reglas de selección coinciden con las de la radiación dipolar magnética, ya que una y otra se determinan por un vector axil [recordemos que un tensor antisimétrico es equivalente (dual) a un vector axil]*. Sin embargo, se tiene ahora una diferencia que consiste en que los elementos de matriz diagonales, que en el caso de radiación dan los valores medios de los momentos eléctricos o magnéticos (y no corresponden a transiciones radiativas), en el caso de dispersión son esenciales — están vinculados a la dispersión coherente.

Para la dispersión escalar las reglas de selección coinciden con las de los elementos de matriz de una magnitud escalar. Esto significa que solamente son posibles transiciones entre estados de igual simetría. En particular, deben ser iguales los valores del momento cinético total J y de su proyección M [siendo independientes de M los elementos de matriz diagonales respecto de M — véase III (29.2)]. Para la dispersión sin desplazamiento, los estados 1 y 2 deben, por ello mismo, coincidir exactamente (no sólo en lo que concierne a la energía, sino también a M), de modo que la dispersión escalar sin desplazamiento es por completo coherente.

---

* Se trata, claro está, de las reglas de selección debidas a la simetría y no a la forma concreta del vector axil en el caso de la radiación: el vector momento magnético contiene una parte espinorial, mientras que en el caso de la dispersión se trata de elementos de matriz de magnitudes de naturaleza puramente orbital (dependientes de las coordenadas).

Recíprocamente, dado que en la dispersión escalar todos los estados se combinan en cualquier caso consigo mismos, en la dispersión coherente existe siempre la parte escalar.

Análogamente al promedio efectuado más arriba de la sección eficaz de dispersión, para un sistema que se orienta libremente en el espacio también el tensor de polarizabilidad ha de promediarse respecto de las direcciones del momento cinético J_1. El promedio se calcula de manera muy sencilla: es evidente que

$$\alpha_{ik} \equiv \overline{(c_{ik})_{11}}^{1} = \overline{(c^0)_{11}}^{1} \delta_{ik}.$$

Las partes simétrica y antisimétrica del tensor de dispersión desaparecen al promediar: δ_{ik} es el único tensor isótropo de segundo orden.

Se hizo notar anteriormente que los elementos de matriz diagonales de un escalar no dependen del número M_1. Por ello, se puede prescindir del signo de promedio sobre $(c^0)_{11}$ (y calcularlo para un valor cualquiera de M_1), de modo que la polarizabilidad vale

$$\alpha_{ik} = (c^0)_{11} \delta_{ik}. \tag{61.9}$$

Por la misma razón se puede prescindir del signo de promedio también en la cantidad G^0_{11} que determina la parte escalar de la dispersión coherente:

$$G^0_{11} = \overline{|(c^0)_{11}|^2}^{1} = (c^0)^2_{11} \tag{61.10}$$

[se prescinde del factor $2J_2 + 1$ de acuerdo con (61.3)]. Se obtiene así una relación simple entre la polarizabilidad promedia y la parte escalar de la dispersión coherente. Una y otra vienen determinadas por la cantidad

$$(c^0)_{11} = \frac{2}{3} \sum_n \frac{\omega_{n1}}{\omega^2_{n1} - \omega^2} |\boldsymbol{d}_{n1}|^2. \tag{61.11}$$

PROBLEMAS

1. Hallar la distribución angular y el grado de despolarización en la dispersión de la luz polarizada linealmente.

Solución. Sea θ el ángulo formado por la dirección de dispersión $\boldsymbol{n}'$ y la de polarización de la luz incidente $\boldsymbol{e}$. La luz dispersada contiene dos componentes independientes polarizadas en el plano $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{e}$ (intensidad I_1) y en otro perpendicular a él (intensidad I_2); el grado de despolarización lo da la razón I_2/I_1. Las intensidades I_1 e I_2 se determinan por la fórmula (61.7) con los $\boldsymbol{e}'$ orientados de manera correspondiente.

En la dispersión escalar la luz se conserva por completo polarizada en el mismo plano, y la distribución angular de la intensidad es

$$I = \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \theta.$$

(Aquí y en lo que sigue las expresiones para $I = I_1 + I_2$ están normalizadas de modo que su promedio respecto de las direcciones sea igual a 1.) En la dispersión simétrica se tiene

$$I = \frac{3}{20}(6 + \operatorname{sen}^2\vartheta),\ \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{3 + \operatorname{sen}^2\vartheta}.$$

En la dispersión antisimétrica, es

$$I = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\vartheta), \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\cos^2\vartheta}.$$

2. Lo mismo para la dispersión de la luz natural.

Solución. El paso en la fórmula (61.7) a luz natural (no polarizada) incidente se lleva a cabo mediante la substitución

$$e_i e_k^* \to \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k),$$

que corresponde al promedio respecto de las direcciones de la polarización $\boldsymbol{e}$ para una dirección de incidencia $\boldsymbol{n}$ dada. La luz dispersada estará en parte polarizada, y por razones de simetría es evidente que sus dos componentes independientes estarán polarizadas linealmente en el plano de dispersión $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ (intensidad $I_\parallel$) y en un plano perpendicular al mismo (intensidad $I_\perp$). El ángulo de dispersión (el formado por $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{n}'$) lo designaremos por ϑ.

Para la dispersión escalar,

$$I = I_\perp + I_\parallel = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\vartheta),\ \frac{I_\parallel}{I_\perp} = \cos^2\vartheta.$$

Para la dispersión simétrica

$$I = \frac{3}{40}(13 + \cos^2\vartheta), \quad \frac{I_\parallel}{I_\perp} = \frac{6 + \cos^2\vartheta}{7}.$$

Para la dispersión antisimétrica,

$$I = \frac{3}{8}(2 + \operatorname{sen}^2\vartheta), \quad \frac{I_\parallel}{I_\perp} = 1 + \operatorname{sen}^2\vartheta.$$

3. Para la dispersión de luz polarizada circularmente, determinar el coeficiente de inversión (razón de la intensidad de la componente polarizada circularmente en sentido « inverso », a la intensidad de la componente polarizada en sentido « correcto »).

Solución. En el caso de luz incidente polarizada circularmente, la distribución angular y el grado de despolarización (razón $I_\parallel/I_\perp$) son los mismos que en el caso de dispersión de luz natural.

Supongamos que el vector $\boldsymbol{e}$ de la luz incidente tiene componentes $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0)$ (en el sistema de coordenadas cuyo plano xz coincide con el plano de dispersión y eje z a lo largo de la dirección $\boldsymbol{n}$). Entonces, para las componentes polarizadas circularmente « inversa » y « correcta » de la luz dispersada, los vectores de polarización son

$$\boldsymbol{e}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta, -i, -\operatorname{sen}\vartheta) \text{ y } \boldsymbol{e}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta, i, -\operatorname{sen}\vartheta).$$

Calculando la intensidad mediante (61.7), se encuentran los coeficientes de inversión P para los tres tipos de dispersión

$$P^0 = \operatorname{tg}^4\frac{\vartheta}{2}, \quad P^s = \frac{13 + \cos^2\vartheta + 10\cos\vartheta}{13 + \cos^2\vartheta - 10\cos\vartheta},$$

$$p^a = \frac{1 - \cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{1 - \operatorname{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

(ϑ es el ángulo de dispersión).

4. Calcular la sección eficaz de dispersión elástica de los rayos γ por el deuterón (*H. A. Bethe, R. Peierls*, 1935).

Solución. Las funciones de onda del estado fundamental del deuterón y de sus estados del espectro continuo (deuterón disociado) se escriben

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, e^{-\varkappa r}, \quad \psi_p = e^{ip\cdot r}, \quad \varkappa = \sqrt{MI}$$

[véase (58.2-3)]. El momento dipolar $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}/2$ (únicamente el protón posee carga y su vector posición es $\boldsymbol{r}/2$). El elemento de matriz

$$\boldsymbol{d}_{p0} = \int \psi_p^* \boldsymbol{d} \psi_0 \, d^3x = e \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \frac{\partial}{i\partial \boldsymbol{p}} \int \frac{d^3x}{r} e^{-\varkappa r + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} = 8\pi i e \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}} \frac{\boldsymbol{p}}{(\varkappa^2 + \boldsymbol{p}^2)^2}$$

[la integral se calcula mediante (57.6a)].

El tensor de polarizabilidad es

$$\alpha_{ik} = \int \frac{2\omega_{p0}}{\omega_{p0}^2 - \omega^2} (d_i)_{0p} (d_k)_{p0} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{e^2}{2M\omega^2} \delta_{ik} =$$

$$= \left\{ \frac{2}{3} \int \frac{\omega_{p0}}{\omega_{p0}^2 - \omega^2} |\boldsymbol{d}_{0p}|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{e^2}{2M\omega^2} \right\} \delta_{ik}.$$

El primer término está asociado con la excitación virtual de los grados de libertad internos del deuterón; se ha escrito en la forma (61.11), siendo las frecuencias $\omega_{\boldsymbol{p}_0} = (\boldsymbol{p}^2 + \varkappa^2)/M$. El segundo término está ligado con la acción del campo de la onda sobre el movimiento de traslación del deuterón como un todo. Dado que este movimiento es cuasiclásico, la parte correspondiente del tensor de dispersión viene dada por la fórmula (60.14) (con la masa del deuterón $2M$ en vez de m).

El cálculo de α_{ik} se reduce al de la integral

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^4 dz}{(z^2+1)^3[(z^2+1)^2 - \gamma^2]}, \quad z = \frac{p}{\varkappa}, \quad \gamma = \frac{M\omega}{\varkappa^2} = \frac{\omega}{I}.$$

Tenemos

$$J = \frac{1}{8} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{dJ_0}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda = 1},$$

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^4 dz}{(z^2 + \lambda^2)[(z^2+1)^2 - \gamma^2]}.$$

Para $\gamma < 1$ el integrando tiene polos en los puntos $i\lambda$, $i\sqrt{1+\gamma}$, $i\sqrt{1-\gamma}$ del semiplano superior de la variable compleja z; la integral J_0 se calcula a partir de los residuos en estos polos. En definitiva obtendremos

$$J = \pi \left\{ \frac{(1+\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4} + \frac{(1-\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4} - \left(\frac{3}{8\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^4} \right) \right\}.$$

La sección eficaz de dispersión total se expresa en función de α_{ik} de acuerdo con (61.8) y (en unidades ordinarias) es igual a

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\left|-1-\frac{4}{3\gamma^2}+\frac{2}{3\gamma^2}\left[(1+\gamma)^{3/2}+(1-\gamma)^{3/2}\right]\right|^2 \quad \text{para } \gamma=\frac{\hbar\omega}{I}<1.$$

La amplitud de dispersión cuando $\gamma > 1$ (por encima del umbral de disociación del deuterón) se obtiene por prolongación analítica, a partir de la amplitud para $\gamma < 1$, apareciendo entonces en ella una parte imaginaria que debe ser positiva:

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\left|-1-\frac{4}{3\gamma^2}+\frac{2}{3\gamma^2}(\gamma+1)^{3/2}+i\frac{2}{3\gamma^2}(\gamma-1)^{3/2}\right|^2 \quad \text{para } \gamma>1.$$

Cuando $\gamma \gg 1$, se obtiene $\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2$, lo que corresponde, como debía ser, a la dispersión (no-relativista) por un protón libre.

La distribución angular de la radiación tiene la forma

$$d\sigma=\sigma\frac{3}{4}(1+\cos^2\theta)\,\frac{do}{4\pi},$$

donde θ es el ángulo de dispersión. Definiendo la amplitud de dispersión de manera que sea $d\sigma=|f|^2 do$, tendremos

$$\mathrm{Im}f(0)=\frac{2e^2}{3Mc^2}\frac{(\gamma-1)^{3/2}}{\gamma^2} \quad \text{para } \gamma>1.$$

Según el teorema óptico, esta cantidad ha de coincidir con $\omega\sigma_t/4\pi$, donde σ_t es la sección eficaz total de dispersión inelástica (fotodisociación) y elástica. Pero en el presente caso la sección de dispersión elástica es de orden superior ($\sim e^4$) al de la sección eficaz de disociación [$\sim e^2$, véase (58.4)], de modo que $\mathrm{Im}f(0) \approx \omega\sigma_{\mathrm{dis}}/4\pi$. Por este motivo, en la aproximación considerada, la amplitud de dispersión para $\gamma < 1$ (es decir, por debajo del umbral de disociación) resulta real.

§ 62. Dispersión por las moléculas

La característica específica de la dispersión molecular está vinculada con las mismas propiedades de las moléculas que, de manera general, se encuentran en la base de la teoría de sus espectros — a saber, con la posibilidad de considerar por separado el estado electrónico para núcleos en reposo y el movimiento de los núcleos en un campo efectivo de electrones dado.

Supongamos que la frecuencia ω de la luz incidente es menor que la energía ω_e del primer nivel electrónico excitado. Entonces, en la dispersión, los términos electrónicos no pueden excitarse. La dispersión o será sin desplazamiento, o con desplazamiento a expensas de la excitación de los niveles de rotación o de vibración.

Supongamos, además, que el término electrónico fundamental de la molécula no es degenerado (y que carece de estructura fina). En otras palabras, se supone que son nulos el spin total de los electrones y la proyección de su momento cinético orbital total sobre el eje de la molécula (para moléculas del tipo de trompo simétrico). Así, para las moléculas diatómicas esto significa que el término electrónico

fundamental debe ser el término $^1\Sigma$. Como es sabido, estas condiciones se cumplen para los estados fundamentales de la mayoría de moléculas *.

Finalmente, supondremos que la frecuencia ω es grande comparada con los intervalos de estructura nuclear (de rotación y vibratoria) del término fundamental y que la diferencia $\omega_e - \omega$ guarda igual relación con la estructura nuclear del término electrónico excitado. En otras palabras, la frecuencia de la luz incidente debe encontrarse suficientemente lejos de las resonancias. Precisamente estas condiciones permiten prescindir primero del movimiento de los núcleos al calcular el tensor de dispersión, considerando el problema para una configuración nuclear dada.

En un problema de este tipo el tensor de dispersión coincide con el tensor de polarizabilidad $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$ y se calcula en principio según la fórmula general (60.17), en la que la suma se extiende a todos los términos electrónicos excitados. Las cantidades α_{ik} que se obtienen de esta manera serán funciones de las coordenadas q de la configuración nuclear (de las cuales dependen paramétricamente las energías y las funciones de onda de los términos electrónicos). En virtud del carácter no degenerado del estado que se considera, el tensor $\alpha_{ik}(q)$ será real y, por consiguiente, también simétrico.

El tensor $\alpha_{ik}(q)$ representa la polarizabilidad electrónica de la configuración nuclear dada de la molécula. Para resolver el problema real de la dispersión, hay que tener en cuenta todavía el movimiento de los núcleos en los estados inicial y final. Sean $\psi_{s_1}(q)$ y $\psi_{s_2}(q)$ las funciones de onda nucleares de estos estados (de modo que s_1, s_2 son los conjuntos de números cuánticos vibratorios y de rotación). El tensor de dispersión buscado es el elemento de matriz del tensor $\alpha_{ik}(q)$ calculado con relación a estas funciones:

$$\langle s_2 \mid \alpha_{ik} \mid s_1 \rangle = \int \psi^*_{s_2}(q)\, \alpha_{ik}(q)\, \psi_{s_1}(q)\, dq. \tag{62.1}$$

Dada la simetría del tensor $\alpha_{ik}(q)$, será también simétrico (tanto para valores s_1, s_2 que coinciden como para valores distintos) el tensor (62.1). Llegamos así a la consecuencia de que, en las condiciones consideradas, se anulará la parte antisimétrica tanto en la dispersión sin desplazamiento como en la desplazada. La dispersión contendrá solamente las partes escalar y simétrica.

La parte escalar de la polarizabilidad $\alpha^0(q)$ no depende de la orientación de la molécula, sino sólo de la disposición interna de los átomos en ella. Designaremos por v el conjunto de los números cuánticos vibratorios de la molécula y por r el conjunto de los números de rotación, excluido el número cuántico magnético m. Entonces los elementos de matriz se escribirán

* Sin embargo, los resultados que se exponen a continuación pueden ser también correctos (con cierta precisión) en casos en que la degeneración del término electrónico fundamental se debe a un spin diferente de cero, y el acoplamiento spin-órbita es pequeño (de modo que puede prescindirse de la estructura fina que provoca). En esta aproximación, los estados con direcciones del spin diferentes no se combinan y, en este sentido, se comportan como no degenerados. Tal es, por ejemplo, el caso de la molécula O_2 con un término fundamental $^3\Sigma$.

$$\langle v_2 r_2 m_2 \mid \alpha^0 \mid v_1 r_1 m_1 \rangle = \langle v_2 \mid \alpha^0 \mid v_1 \rangle \delta_{r_1 r_2} \delta_{m_1 m_2}. \tag{62.2}$$

El carácter diagonal respecto de los números r, m es una propiedad general de todo escalar. Una característica específica de (62.2) es el hecho de que sus elementos no dependen, en este caso, de dichos números. Así, pues, la dispersión escalar es susceptible solamente de transiciones vibratorias puras y no depende del estado de rotación.

La dispersión simétrica se determina por los elementos de matriz del tensor α^s_{ik}. Sus componentes respecto de un sistema de coordenadas en reposo xyz se expresan en función de las componentes $\bar{\alpha}^s_{i'k'}$ en un sistema ligado a la molécula de acuerdo con

$$\alpha^s_{ik} = \sum_{i'k'} \bar{\alpha}^s_{i'k'} D_{i'i} D_{k'k}, \tag{62.3}$$

donde $D_{i'i}$ son los cosenos directores de los nuevos ejes respecto de los primitivos. Las cantidades $\bar{\alpha}^s_{i'k'}$ no dependen de la orientación de la molécula y $D_{i'i}$ es independiente de sus coordenadas internas. Por ello,

$$\langle v_2 r_2 m_2 \mid \alpha^s_{ik} \mid v_1 r_1 m_1 \rangle = \\ = \sum_{i'k'} \langle v_2 \mid \bar{\alpha}^s_{i'k'} \mid v_1 \rangle \langle r_2 m_2 \mid D_{i'i} \mid r_1 m_1 \rangle \langle r_2 m_2 \mid D_{k'k} \mid r_1 m_1 \rangle.$$

La suma de los cuadrados de los módulos de estas cantidades, extendida a los valores de $r_2 m_2$, es igual, como se compruaba fácilmente *, a

$$\sum_{m_2 r_2} \sum_{ik} |\langle v_2 r_2 m_2 \mid \alpha^s_{ik} \mid v_1 r_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{i'k'} |\langle v_2 \mid \bar{\alpha}^s_{i'k'} \mid v_1 \rangle|^2. \tag{62.4}$$

Esto significa que la intensidad total de dispersión con transiciones que parten de un nivel de vibración-rotación dado v_1-r_1 a todos los niveles de rotación del estado vibratorio v_2 no depende de r_1.

Para las moléculas del tipo de trompo simétrico cabe avanzar más en los cálculos y establecer la dependencia de la intensidad de radiación respecto de los números cuánticos rotatorios para cada transición $v_1 r_1 \to v_2 r_2$. Los números r son en este caso el momento cinético J y su proyección k sobre el eje de la molécula. Introduzcamos en vez de las componentes cartesianas α^s_{ik} el correspondiente tensor esférico de segundo orden, cuyas componentes designaremos por $\alpha_\lambda (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2)$. Según (b, 6) los cuadrados de los módulos de sus elementos de matriz valen

---

* Al transformar la suma se utiliza la igualdad.

$$\sum_i \sum_{r_2 m_2} \langle r_1 m_1 \mid D_{ii'} \mid r_2 m_2 \rangle \langle r_2 m_2 \mid D_{ik'} \mid r_1 m_1 \rangle = \\ = \langle r_1 m_1 \mid \sum_i D_{ii'} D_{ik'} \mid r_1 m_1 \rangle = \langle r_1 m_1 \mid \delta_{i'k'} \mid r_1 m_1 \rangle = \delta_{i'k'}.$$

$$|\langle v_2 J_2 k_2 m_2 \,|\, \alpha_\lambda \,|\, v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 =$$
$$= (2J_1+1)(2J_2+1)\begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -m_2 & \lambda & m_1 \end{pmatrix}^2 |\langle v_2 \,|\, \bar{\alpha}_{\lambda'} \,|\, v_1 \rangle|^2,$$

donde $\alpha_{\lambda'}(q)$ es el tensor esférico de polarización referido a los ejes ligados a la molécula y $\lambda' = k_2 - k_1$. Sumando respecto de m_2 y $\lambda = m_2 - m_1$ (para un m dado), obtendremos [cf. (b, 7)]

$$\sum_{m_2\lambda} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 \,|\, \alpha_\lambda \,|\, v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 =$$
$$= (2J_2+1)\begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 |\langle v_2 \,|\, \bar{\alpha}_{\lambda'} \,|\, v_1 \rangle|^2. \qquad (62.5)$$

Esta cantidad determina la intensidad de dispersión en una transición rotatorio-vibratoria $v_1 J_1 k_1 \to v_2 J_2 k_2$. Dado que los elementos de matriz $\langle v_2 \,|\, \bar{\alpha}_{\lambda'} \,|\, v_1 \rangle$ no dependen en general de la rotación de la molécula, se determina así a la vez la dependencia de la intensidad tanto con relación a los números J_1, J_2, como respecto de k_1, k_2. Obsérvese que en el segundo miembro de (62.5) interviene tan sólo una componente esférica del tensor de polarizabilidad.

Si se suma la igualdad (62.5) respecto de J_2 y k_2, obtendremos *

$$\sum_{\lambda} \sum_{J_2 k_2 m_2} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 \,|\, \alpha_\lambda \,| v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{\lambda'} |\langle v_2 \,|\, \bar{\alpha}_{\lambda'} \,|\, v_1 \rangle|^2,$$

es decir, volvemos a la regla de sumas (62.4).

Un caso particular de trompo simétrico es un rotador — es decir, una molécula lineal (en particular, diatómica). La proyección del momento cinético sobre el eje de una de tales moléculas es igual a cero (en un estado electrónico no degenerado con momento orbital de los electrones igual a cero)**. En este caso, por lo tanto, en (62.5) hay que hacer $k_1 = k_2 = 0$.

Finalmente, consideremos el problema de las reglas de selección en la dispersión de combinación vibratoria junto con el problema análogo que plantean los espectros vibratorios de emisión (o de absorción) de una molécula***.

Para la dispersión el problema se reduce a determinar en qué condiciones son diferentes de cero los elementos de matriz del tensor $\alpha_{ik}(q)$ respecto de las fun-

---

* Al sumar respecto de J_2 para k_1 y λ' dados (y, por ello, con $k_2 = k_1 + \lambda'$) tenemos

$$\sum_{J_2} (2J_2+1)\begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 = 1$$

[en virtud de III (106.13)]. Se suma luego respecto de k_2 (o, lo que es lo mismo, respecto de $\lambda' = k_2 - k_1$) para k_1 dado.

** No consideramos aquí los efectos ligados con la interacción de las vibraciones y la rotación de la molécula (véase III, § 104).

*** Estos espectros se sitúan hacia la región del infrarrojo y se observan particularmente en la absorción.

ciones de onda vibratorias $\psi_v(q)$; al hacerlo, hay que considerar por separado el escalar α^0 (para la dispersión escalar) y el tensor simétrico irreducible α^s_{ik} (para la dispersión simétrica). Un papel análogo en la radiación (o en la absorción) lo representan los elementos de matriz del vector $\boldsymbol{d}(q)$ — el momento dipolar de la molécula promediado respecto del estado electrónico para una posición dada de los núcleos (esta relación se señaló ya en el § 54 para las moléculas diatómicas).

Las vibraciones de una molécula poliatómica se clasifican por tipos de simetría — es decir, según las representaciones irreducibles del correspondiente grupo puntual: D_a, donde a es el número de la representación (véase III, § 100). Según estas representaciones se determina también la simetría de las funciones de onda de los estados de vibración de la molécula (véase III, § 101). La simetría de las funciones de onda del primer estado de vibración (número cuántico $v_a = 1$) coincide con la simetría D_a del tipo de vibración. En cambio, la simetría de estados superiores ($v_a > 1$) viene dada por la representación $[D^{v}_{a}a]$ — producto simétrico de la representación D_a por sí misma v_a veces. Finalmente, la simetría de los estados con excitación simultánea de vibraciones diferentes a y b la da el producto directo $[D^{v}_{a}a] \times [D^{v}_{b}b]$ *. El método para hallar las reglas de selección de las diferentes cantidades (escalar, vector, tensor) según los tipos de simetría se ha expuesto en III, § 97.

Las reglas de selección basadas en las propiedades de simetría de una molécula son rigurosas. Existen, además, reglas de selección aproximadas que se deducen de la hipótesis de que las vibraciones son armónicas y del desarrollo de las funciones $\alpha_{ik}(q)$ o $\boldsymbol{d}(q)$ en potencias de las coordenadas de vibración, q. Estas reglas son consecuencia de la conocida regla de selección para el oscilador armónico, según la cual los elementos de matriz de la coordenada q es diferente de cero tan sólo para transiciones en las que el número cuántico vibratorio cambia en $\Delta v = \pm 1$ **.

§ 63. Anchura natural de las rayas espectrales

Hasta aquí al estudiar la emisión y dispersión de la luz hemos considerado todos los niveles del sistema (digamos, de un átomo) como estrictamente discretos. En realidad, los niveles excitados, que tienen una probabilidad de decaer por emisión de luz, poseen una vida finita. Según los principios generales de la mecánica cuántica, esto conduce a que los niveles se conviertan en cuasidiscretos y cobren una anchura no nula (aunque pequeña) (véase III, § 132); se representan en la

* Las propiedades de simetría de las funciones de onda de vibración no dependen, claro está, de la forma concreta de la energía potencial vibratoria; son independientes, en particular, de la hipótesis que se hizo en III, § 101, acerca del carácter armónico de las vibraciones.

** Una exposición más detallada de la teoría que estudia las cuestiones tratadas en este párrafo se puede encontrar en los libros: G. PLACZEK, Dispersión Rayleigh y efecto Raman, Jarkov, 1935; G. HERZBERG, Espectros de vibración y de rotación de las moléculas poliatómicas; M. A. EL'IASHEVICH, Atomnaia i. molekuliarnaia spektroskopiia (Espectroscopia atómica y molecular), Fizmatgiz, 1962.

forma $E-(1/2)i\Gamma$, donde $\Gamma(=\Gamma/\hbar)$ es la probabilidad total (por segundo) de todos los posibles procesos de « decaimiento » del estado dado.

Veamos cómo se manifiesta esta circunstancia en el proceso de radiación (*V. Weisskopf, E. Wigner*, 1930). Es claro que, debido a la anchura no nula de un nivel, la luz emitida no será rigurosamente monocromática: las frecuencias se distribuirán en un intervalo $\Delta\omega \sim 1/\Gamma(=\Gamma/\hbar)$. Pero para medir la distribución de fotones en la escala de frecuencias con una tal precisión es necesario un tiempo $T \gg 1/\Delta\omega \sim 1/\Gamma$. La probabilidad de que el nivel haya decaído por emisión de luz al cabo de este tiempo es muy grande. En consecuencia, lo que habrá que hacer es hallar la probabilidad total de emisión de un fotón de frecuencia dada, no la probabilidad por unidad de tiempo. Calculemos esta probabilidad en primer lugar para el caso de transición de un átomo desde un nivel excitado

$$E_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1$$

al estado fundamental E_2, cuya vida tiene una duración infinita y que, por lo tanto, es rigurosamente discreto.

Sea Ψ la función de onda del átomo y del campo fotónico, $H = H^{(0)} + V$ el hamiltoniano de este sistema, donde V es el operador interacción del átomo y del campo fotónico. Se trata de hallar el desarrollo de la solución de la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (H^{(0)} + V)\,\Psi \tag{63.1}$$

en serie de funciones propias de los estados no perturbados del sistema

$$\Psi = \sum_\nu a_\nu(t)\,\Psi_\nu^{(0)} = \sum_\nu a_\nu(t)\,e^{-i\mathcal{E}_\nu t}\,\psi_\nu^{(0)}. \tag{63.2}$$

Para los coeficientes $a_\nu(t)$ obtendremos el sistema de ecuaciones

$$i\frac{\partial a_\nu}{\partial t} = \sum_{\nu'} \langle\nu|V|\nu'\rangle\, a_{\nu'} \exp\{i(\mathcal{E}_\nu - \mathcal{E}_{\nu'})\,t\}. \tag{63.3}$$

Sea $|\nu\rangle$ el estado con energía $\mathcal{E}_\nu = E_2 + \omega$ en el cual el átomo se encuentra en su nivel fundamental E_2 y existe un cuanto de determinada frecuencia ω; designaremos este estado por el símbolo $|\omega 2\rangle$. En el instante inicial, el sistema se encuentra en el estado $|1\rangle$ en el que el átomo ocupa el nivel excitado E_1 y no hay fotones. Es decir, cuando $t = 0$ debe ser

$$a_1 = 1,\ a_{\nu'} = 0 \text{ para } |\nu'\rangle \neq |1\rangle. \tag{63.4}$$

La solución de la ecuación (63.3) que se encuentra a partir de esta condición inicial dará (de acuerdo con la normalización impuesta de las funciones de onda) la probabilidad en el instante t de que se haya producido la transición $1 \to 2$ del átomo con emisión de un fotón en el intervalo de frecuencia $d\omega$:

$$|a_{\omega 2}(t)|^2 d\omega.$$

Nos interesa la probabilidad límite cuando $t \to \infty$:

$$dw = |a_{\omega 2}(\infty)|^2 d\omega. \tag{63.5}$$

Para mejor comprender el planteo del problema, recordaremos que si se trata de hallar la probabilidad ordinaria de radiación (por segundo) en la transición $1 \to 2$ (sin tener en cuenta la anchura del nivel), hay que resolver la ecuación (63.3) substituyendo en el segundo miembro, en primera aproximación, todas las $a_{\nu'}(t)$ por los valores (63.4). La solución obtenida se toma luego para grandes valores de t (cf. III, § 42). Cabe ahora precisar el sentido de esta manera de proceder: se refiere a tiempos t que son pequeños comparados con la duración de la vida del estado excitado; valores de t grandes significa aquí tiempos grandes comparados con el período $1/(E_1 - E_2)$, pero, con todo, pequeños comparados con $1/\Gamma_1$.

Ahora bien, en nuestro caso, cuando se consideran tiempos comparables con $1/\Gamma_1$, la función $a_1(t)$ disminuye al aumentar el tiempo según la ley

$$a_1(t) = e^{-\frac{\Gamma_1}{2}t} \tag{63.6}$$

Las funciones $a_{\nu'}(t)$, en cambio, que corresponden a los estados $|\nu'\rangle$ resultado posible de la emisión de radiación por el átomo, crecen con el tiempo. Si la emisión de luz a partir del nivel dado E_1 permite pasar a diferentes niveles del átomo (además del E_2), se tendrán muchas funciones $a_{\nu'}(t)$ crecientes; cada una de ellas define un estado en que el átomo se encuentra en uno de sus niveles, a la vez que se tiene un fotón con la correspondiente energía. Con todo, en el segundo miembro de la ecuación (63.3) queda, como antes, tan sólo un término, el que corresponde a $|\nu'\rangle = |1\rangle$. En efecto, dado que los elementos de matriz pueden ser diferentes de cero únicamente para transiciones en las que el número de fotones de una energía cualquiera varía en 1, serán evidentemente iguales a cero para transiciones entre estados cada uno de los cuales contiene un fotón de energía diferente.

Así, pues, para $a_{\omega 2}(t)$ tenemos la ecuación

$$i\frac{da_{\omega 2}}{dt} = \langle \omega 2 | V | 1 \rangle e^{i(E_2+\omega-E_1)t} a_1 = \\ = \langle \omega 2 | V | 1 \rangle \exp\left\{i(\omega - \omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t\right\} \tag{63.7}$$

(donde $\omega_{12} = E_1 - E_2$). Integrando con la condición $a_{\omega 2}(0) = 0$, encontraremos

$$a_{\omega 2} = \langle \omega 2 | V | 1 \rangle \frac{1 - \exp\left\{i(\omega - \omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t\right\}}{\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}\Gamma_1}. \tag{63.8}$$

De aquí se sigue la probabilidad dw (63.5):

$$dw = |\langle \omega 2 | V | 1 \rangle|^2 \frac{d\omega}{(\omega - \omega_{12})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_1^2}.$$

Dado que la anchura $\Gamma_1 \ll \omega_{12}$, en el factor $|\langle \omega 2 | V | 1 \rangle|^2$ se puede hacer $\omega = \omega_{12}$. Entonces la cantidad $2\pi |\langle \omega 2 | V | 1 \rangle|^2$ es la probabilidad ordinaria de emisión (por segundo) del fotón que posee la frecuencia ω_{12} y también otras características (además de la frecuencia) — dirección del movimiento, polarización — de cuya existencia hemos prescindido hasta aquí para abreviar la notación. Observemos que la dependencia de la probabilidad respecto de estas características queda completamente determinada por el factor $|\langle \omega 2 | V | 1 \rangle|^2$. En otras palabras, tener en cuenta la anchura del nivel no modifica las propiedades de polarización ni la distribución angular de la radiación.

La suma

$$\Gamma_{1\to 2} = 2\pi \sum |\langle \omega 2 | V | 1 \rangle|^2, \tag{63.9}$$

extendida a las polarizaciones y direcciones del movimiento del fotón es la probabilidad total ordinaria de radiación. Al mismo tiempo es aquella parte de la anchura del nivel E_1 (anchura parcial) vinculada a la transición $1 \to 2$, anchura que difiere de la anchura total Γ_1 formada por las contribuciones de todas las maneras posibles de « decaimiento » del estado dado cuasiestacionario *.

Efectuando la misma suma de la probabilidad dw, obtendremos la siguiente fórmula final para la distribución en frecuencias de la luz emitida:

$$dw = w_l \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega_{12} - \omega)^2 + \frac{\Gamma_1^2}{4}}, \tag{63.10}$$

donde $w_l = \Gamma_{1\to 2}/\Gamma_1$ es la probabilidad relativa total de la transición dada $1 \to 2$. Esta distribución es del tipo dispersión. La forma de la raya espectral, descrita por la fórmula (63.10), es la propia de un átomo aislado en reposo; se llama forma *natural* de la raya **.

Supongamos ahora que también el nivel E_2 del átomo es excitado, con una anchura no nula Γ_2. Tendremos en cuenta esta circunstancia admitiendo que, en la ecuación (63.1), se incluyen en el hamiltoniano $\mathrm{H}^{(0)}$ « no perturbado » todos los términos (es decir, los elementos de matriz) que conducen al decaimiento del estado 2. Entonces, en el segundo miembro de la ecuación (63.7) la energía E_2 se substituye por $E_2 - (1/2)i\Gamma_2$. En cambio, en el elemento de matriz $\langle \omega 2 | V | 1 \rangle$ (que

* Obsérvese que las transiciones a los estados del espectro continuo, que determinan la anchura no nula del nivel, no están ligadas necesariamente con la emisión de fotones. Los niveles fuertemente excitados (niveles Roentgen) pueden decaer por emisión de un electrón y formación de un ion positivo en el estado fundamental (efecto Auger).

** Para distinguirla del ensanchamiento debido a la interacción del átomo con otros átomos (ensanchamiento por colisión) o a la existencia, en la fuente, de átomos que se mueven con velocidades diferentes (ensanchamiento Doppler).

es pequeño dado que es pequeña Γ_2), la variación de $H^{(0)}$ no se refleja dentro de la aproximación exigida. De esta manera, en vez de (63.8) obtendremos

$$a_{\omega 2}(t) = \langle \omega 2 \mid V \mid 1 \rangle \frac{1 - \exp\left\{i(\omega - \omega_{12})t - \frac{1}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_2)t\right\}}{\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_2)}. \qquad (63.11)$$

El estado 2, cuya vida tiene una duración finita, se desexcita con emisión de un fotón de frecuencia ω' y el átomo pasa en último término al estado fundamental E_0 (de acuerdo con esto, la probabilidad de encontrar el átomo en el estado 2, igual a $|a_{\omega 2}(t) \exp(-\Gamma_2 t/2)|^2$, tiende a cero para $t \to \infty$) *. En este estado final del sistema, el átomo se encuentra así en el nivel fundamental E_0 y se tiene un fotón para cada una de las frecuencias ω y ω'. La amplitud de este estado $a_{\omega\omega' 0}(t)$ satisface una ecuación que difiere de (63.7) tan sólo en las notaciones:

$$i\frac{da_{\omega\omega' 0}}{dt} = a_{\omega 2}\langle \omega\omega' 0 \mid V \mid \omega 2\rangle \exp\{i(E_0 + \omega + \omega')t - i(E_2 + \omega)t - \frac{\Gamma_2}{2}t\} =$$
$$= a_{\omega 2}\langle \omega\omega' 0 \mid V \mid \omega 2\rangle \exp\{i(\omega' - \omega_{20})t - \frac{\Gamma_2}{2}t\}.$$

Substituyendo en el segundo miembro de esta ecuación la expresión (63.11) de $a_{\omega 2}(t)$, integrando [con la condición inicial $a_{\omega 2}(0) = 0$] y haciendo luego que $t \to \infty$, obtendremos

$$a_{\omega\omega' 0}(\infty) = \frac{\langle \omega 2 \mid V \mid 1\rangle \langle \omega\omega' 0 \mid V \mid \omega 2\rangle}{\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_2)} \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{\omega' - \omega_{20} + \frac{i}{2}\Gamma_2} - \frac{1}{\omega + \omega' - \omega_{10} + \frac{i}{2}\Gamma_1}\right\} =$$
$$= \frac{\langle \omega\omega' 0 \mid V \mid \omega 2\rangle \langle \omega 2 \mid V \mid 1\rangle}{\left(\omega' - \omega_{20} + \frac{i}{2}\Gamma_2\right)\left(\omega + \omega' - \omega_{10} + \frac{i}{2}\Gamma_1\right)}.$$

La probabilidad de emisión de los fotones ω y ω' es igual a

$$dw = |a_{\omega\omega' 0}(\infty)|^2 d\omega\, d\omega' =$$
$$= \frac{\Gamma_{1\to 2}}{2\pi}\frac{\Gamma_{2\to 0}}{2\pi} \frac{d\omega\, d\omega'}{\left[(\omega' - \omega_{20})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_2^2\right]\left[(\omega + \omega' - \omega_{10})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_1^2\right]}. \qquad (63.12)$$

Como debía ser, esta expresión presenta máximos muy acusados en $\omega' \approx \omega_{20}$ y en $\omega \approx \omega_{12}$.

* Para simplificar, suponemos que la transición $2 \to 0$ del átomo ocurre de manera directa, sin etapas intermedias. Esta hipótesis no posee un carácter fundamental y no influye en el resultado final (63.13).

La forma buscada de la raya espectral que corresponde a la transición $1 \to 2$ se obtendrá integrando (63.12) respecto de ω' (que se puede extender a todo el intervalo de $-\infty$ a $+\infty$). La manera más fácil de calcular la integral consiste en aplicar la teoría de residuos; en definitiva se obtendrá *

$$dw = w_t \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_{12})^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}, \tag{63.13}$$

donde $w_t = \frac{\Gamma_{1\to 2}\,\Gamma_{2\to 0}}{\Gamma_1\,\Gamma_2}$ es la probabilidad total para la doble transición $1 \to 2 \to 0$ **.

La forma de la raya (63.13) difiere de la (63.10) tan sólo en la substitución de Γ_1 por $\Gamma_1 + \Gamma_2$ — es decir, la anchura de la raya es igual a la suma de las anchuras inicial y final.

Obsérvese que la anchura de una raya resulta, hablando en general, no ser igual a la probabilidad $\Gamma_{1\to 2}$ de la propia transición $1 \to 2$, es decir, no es proporcional a la intensidad de la raya (como ocurriría en la teoría clásica). Dado que $\Gamma_1 + \Gamma_2 > \Gamma_{1\to 2}$, la raya puede tener una anchura grande aun siendo la intensidad relativamente pequeña.

§ 64. Fluorescencia por resonancia

Es esencial tener en cuenta el valor no nulo de la anchura de los niveles en un problema de dispersión de la luz en los casos en que la frecuencia ω de la luz incidente es próxima a una de las frecuencias «intermedias» ω_{n1} o ω_{2n} (la llamada fluorescencia por resonancia) ***.

Consideremos la dispersión sin desplazamiento por un sistema (digamos, un átomo) en el estado fundamental, de modo que los niveles inicial y final coinciden y son rigurosamente discretos. Supongamos que la frecuencia de la luz difiere poco de una frecuencia ω_{n1}, donde el nivel n es excitado y, por lo tanto, cuasidiscreto.

Esta cuestión se podría resolver siguiendo el método expuesto en el párrafo anterior. Sin embargo, no es necesario proceder así, ya que el problema es por completo análogo al estudiado en III, § 132, acerca de la dispersión no-relativista

---

* La integral se extiende a un contorno formado por el eje real ω' y una semicircunferencia infinitamente alejada en el semiplano superior. En este semiplano, el integrando tiene dos polos:

$$\omega' = \omega_{20} + \frac{i}{2}\Gamma_2 \quad \text{y} \quad \omega' = \omega_{10} - \omega + \frac{i}{2}\Gamma_1,$$

en los que los residuos son iguales a

$$\frac{1}{i\Gamma_2}\left[(\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}\Gamma_2)^2 + \frac{\Gamma_1^2}{4}\right]^{-1} \text{ y } \frac{1}{i\Gamma_1}\left[(\omega - \omega_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_1)^2 + \frac{\Gamma_2^2}{4}\right]^{-1}.$$

** En casos más complicados (cf. la nota en la pág. 263), w_t es la probabilidad total de todas las cascadas que empiezan con la transición $1 \to 2$ y terminan en el nivel 0.

*** *V. Weisskopf* (1931) fue el primero en estudiar esta cuestión.

por resonancia en un nivel cuasidiscreto. De acuerdo con los resultados obtenidos allí, la amplitud de dispersión debe contener un factor que presenta un polo

$$\frac{1}{\omega - \left(E_n - i\frac{\Gamma_n}{2} - E_1\right)}.$$

Por otra parte, cuando $|\omega - \omega_{n1}| \gg \Gamma_n$ la fórmula ha de transformarse en la fórmula (60.5) para el caso en que no hay resonancia. Es claro, por ello, que la sección eficaz de dispersión buscada se obtendrá simplemente substituyendo E_n por $E_n - (i/2)\Gamma_n$ en la fórmula (60.5), pudiendo limitar la suma respecto de n a los términos de resonancia solamente

$$d\sigma = \frac{\left|\sum_{M_n} (\boldsymbol{d}_{2n}\cdot\boldsymbol{e}'^{*})\,(\boldsymbol{d}_{n1}\cdot\boldsymbol{e})\right|^2}{(\omega_{n1} - \omega)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2}\,\omega^4 do'. \tag{64.1}$$

La suma se extiende a todos los estados (con diferentes proyecciones del momento cinético M_n) que corresponden al nivel de resonancia E_n; los estados 1 y 2 se refieren a un mismo nivel (el fundamental), pero pueden diferir en los valores M_1 y M_2.

La sección eficaz (64.1) es máxima para $\omega = \omega_{n1}$. En orden de magnitud, su valor en el máximo es igual a $\sigma_{\max} \sim \omega^4 d^4/\Gamma_n^2$. Dado que la probabilidad de la transición espontánea $n \to 1$, y con ella también la anchura $\Gamma_n \sim \omega^3 d^2$, este valor es

$$\sigma_{\max} \sim \frac{1}{\omega^2} \sim \lambda^2, \tag{64.2}$$

es decir, del orden del cuadrado de la longitud de onda de la luz e independiente de la constante de estructura fina.

Hay que subrayar que por encontrarse el átomo antes y después de la dispersión en un nivel rigurosamente discreto (el fundamental), también las frecuencias de los fotones primario y secundario coinciden rigurosamente. Por ello, al irradiar con luz monocromática, también la raya dispersada será monocromática. Pero si la luz incidente presenta una distribución espectral de la intensidad $I(\omega)$, variando poco la función $I(\omega)$ en la anchura Γ_n, la intensidad de la luz dispersada será proporcional a

$$\frac{I(\omega_{n1})\,d\omega}{(\omega - \omega_{n1})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2}. \tag{64.3}$$

En otras palabras, la forma de la raya dispersada coincidirá con la de la raya natural para emisión espontánea desde el nivel E_n.

A la sección eficaz (64.1) corresponde el tensor de dispersión

$$(c_{ik})_{21} = \frac{\sum_{M_n} (d_i)_{2n}\,(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - \frac{i}{2}\Gamma_n}. \tag{64.4}$$

En particular, el tensor de polarizabilidad es

$$\alpha_{ik} = (c_{ik})_{11} = \frac{\sum_{M_n} (d_i)_{1n} (d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - \frac{i}{2}\Gamma_n}. \tag{64.5}$$

Inmediatamente se advierte que añadir una parte imaginaria a los niveles de energía de los estados excitados intermedios, hace perder el carácter hermítico al tensor de polarizabilidad. Aparece en él una parte antihermítica directamente vinculada, como probaremos a continuación, con la absorción de la luz.

Una vez absorbido un cuanto, el átomo, más pronto o más tarde, pasa de nuevo al estado fundamental con emisión de uno o más fotones, Por consiguiente, desde este punto de vista, la sección eficaz de absorción es, simplemente, la sección eficaz σ_t de todos los procesos de dispersión posibles *. Por otra parte, según el teorema óptico (§ 72) esta sección eficaz se expresa en función de la parte imaginaria de la amplitud $f(0)$ de dispersión elástica para ángulo cero de acuerdo con

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{\omega} \operatorname{Im} f(0).$$

Como se ve teniendo en cuenta (60.7), la amplitud de dispersión elástica del fotón es la cantidad

$$f = \omega^2 \alpha_{ik} e_i'^* e_k.$$

Pero la dispersión a « ángulo cero » significa aquí la dispersión sin variación ni del impulso ni de la polarización del fotón, es decir, $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}$. Así, pues, la sección eficaz de absorción del fotón es igual a

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi\omega \operatorname{Im} (\alpha_{ik} e_i^* e_k) = 4\pi\omega e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i}, \tag{64.6}$$

con lo que se determina a la vez su relación con la parte antihermítica del tensor de polarizabilidad.

La fórmula (64.6) tiene un sentido clásico sencillo. El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ realiza (por segundo) sobre el sistema de cargas un trabajo que es igual a $\Sigma e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{d}}$. Representando el campo en la forma (60.19), el momento dipolar en la forma (60.20-21) y promediando este trabajo respecto del tiempo, obtendremos

$$\frac{1}{2} \omega |E|^2 e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i}$$

($\boldsymbol{E} = e\boldsymbol{E}$). Por otra parte, si $\boldsymbol{E}$ es el campo de la luz incidente, la densidad media

* Hay que subrayar que se trata en este caso de la absorción por un sistema que se encuentra en un nivel estable, el fundamental. En virtud del carácter finito del tiempo de observación, el planteo del problema para un estado excitado sería otro.

de flujo de energía en él es igual a $(1/8\pi)|E|^2$ y la energía absorbida por el átomo (por segundo) vale

$$\frac{1}{8\pi}|E|^2\sigma_{\text{abs}}$$

Igualando entre sí las dos expresiones obtenidas, se obtendrá la fórmula (64.6).

Substituyendo en (64.6) la expresión (64.5) del tensor de polarizabilidad, se encuentra la siguiente fórmula para la sección eficaz de absorción de un fotón de frecuencia ω, próxima a ω_{n1}:

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi^2\sum_{M_n}|\boldsymbol{d}_{n1}\cdot\boldsymbol{e}|^2\omega\,\frac{\Gamma_n/2}{\pi\left[(\omega-\omega_{n1})^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2\right]}. \tag{64.7}$$

En el límite $\Gamma_n \to 0$ el último factor de esta fórmula tiende a la función $\delta(\omega-\omega_{n1})$, de acuerdo con el hecho de que, en este caso, sólo puede absorberse un fotón cuya frecuencia esté rigurosamente determinada. Supongamos que sobre el átomo incide luz con densidad de flujo espectral y angular de energía $I_{k\boldsymbol{e}}$ [cf. (44.7)]. Entonces, el número de fotones que por unidad de tiempo atravesarán la unidad de área es igual a $\frac{I_{k\boldsymbol{e}}}{\omega}\,d\omega do$ y la probabilidad de absorción

$$dw_{\text{abs}} = \sigma_{\text{abs}}\,\frac{I_{k\boldsymbol{e}}}{\omega}d\omega\,do. \tag{64.8}$$

Si la función $I_{k\boldsymbol{e}}(\omega)$ varía poco en la anchura Γ_n, después de integrar respecto de la frecuencia se obtiene

$$dw_{\text{abs}} = 4\pi^2\sum_{M_n}|\boldsymbol{d}_{n1}\cdot\boldsymbol{e}|^2 I_{k\boldsymbol{e}}(\omega_{n1})\,do.$$

Observando, por otra parte, que según (45.5),

$$dw_{\text{esp}} = \frac{\omega^3}{2\pi}\sum_{M_n}|\boldsymbol{d}_{1n}\cdot\boldsymbol{e}^*|^2\,do = \frac{\omega^3}{2\pi}\sum_{M_n}|\boldsymbol{d}_{n1}\cdot\boldsymbol{e}|^2\,do$$

es la probabilidad de emisión espontánea de un fotón de frecuencia ω_{n1}, volvemos de nuevo a la fórmula (44.9).

PROBLEMA

Hallar la sección eficaz total de dispersión por resonancia sumada respecto de todas las polarizaciones y direcciones finales del fotón, y también respecto de las proyecciones M_2 finales del momento cinético del átomo (y promediada con relación a las polarizaciones del fotón inicial y de los valores iniciales M_1).

Solución. Según (61.8), (61.2) y (64.4) la sección eficaz buscada es

$$\sigma = \frac{8\pi\omega^4}{9}\,\frac{1}{(\omega-\omega_{n1})^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}\left\{(2J_1+1)\overline{\Big|\sum_{M_n}(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}\Big|^2}^{1}\right\} \tag{1}$$

(dado que los estados 1 y 2 difieren únicamente en los valores M_1 y M_2, se tiene $J_2 = J_1$). Escribamos la expresión entre llaves en la forma

$$\{\dots\} = \frac{1}{2J_1+1} \sum_{M_1 M_2} \sum_{M_n M_n'} (\boldsymbol{d}_{2n} \cdot \boldsymbol{d}_{n'2})\,(\boldsymbol{d}_{1n'} \cdot \boldsymbol{d}_{n1})$$

(el cuadrado de la suma respecto de M_n lo representamos como suma doble respecto de M_n y M_n'). Las sumas

$$\sum_{M_2} (\boldsymbol{d}_{n'2} \cdot \boldsymbol{d}_{2n}) = \sum_{M_1} (\boldsymbol{d}_{n1} \cdot \boldsymbol{d}_{1n'})$$

son diferentes de cero tan sólo para $M_n = M_{n'}$ y coinciden con la cantidad $3\Gamma_{n\to 1}/4\omega^3$, donde $\Gamma_{n\to 1}$ es la probabilidad de la transición $n \to 1$ (que, sin embargo, es una anchura parcial del nivel E_n). Por ello,

$$\{\dots\} = \frac{1}{2J_1+1}(2J_n+1)\left(\frac{3}{4\omega^3}\Gamma_{n\to 1}\right)^2,$$

y la sección eficaz total★ vale

$$\sigma = g\frac{\pi}{\omega^2}\frac{\Gamma_{n1}^2}{(\omega-\omega_{n1})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2}, \tag{2}$$

donde

$$g = \frac{2J_n+1}{2(2J_1+1)}.$$

Si únicamente nos interesa la parte coherente de la dispersión (los estados 1 y 2 coinciden, es decir, $M_1 = M_2$), el factor entre llaves en (1) debe substituirse por

$$\overline{\left\{\left|\sum_{M_n}(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}\right|^2\right\}} = \frac{1}{2J_1+1}\sum_{M_1}\sum_{M_n M_n'}(\boldsymbol{d}_{1n}\cdot\boldsymbol{d}_{n'1})\,(\boldsymbol{d}_{1n'}\cdot\boldsymbol{d}_{n1})$$

[cf. (61.3)]. En términos de componentes vectoriales esféricas, el producto escalar se escribe

$$\boldsymbol{d}_{1n}\cdot\boldsymbol{d}_{n'1} = \sum_{\lambda}(-1)^{1-\lambda}(d_\lambda)_{1n}(d_{-\lambda})_{n'1};$$

es diferente de cero sólo cuando $M_n = M_{n'}$. Expresando los elementos de matriz en función de los elementos reducidos e introduciendo de nuevo las anchuras parciales

$$\Gamma_{n\to 1} = \frac{4\omega^3}{3}\frac{1}{2J_n+1}|\langle n \| d \| 1\rangle|^2,$$

obtendremos para σ_{cohe} la fórmula (2) con

---

* Como era de esperar (dada la analogía formal de los problemas), esta fórmula coincide con la fórmula de Breit-Wigner para la dispersión elástica por resonancia de los neutrones lentos por un núcleo [véase III (142.16), (142.18)]. El factor g es la probabilidad de obtener el valor dado J_n en la composición arbitraria de los momentos cinéticos del átomo inicial y del fotón.

$$g = \frac{(2J_n + 1)^2}{2(2J_1 + 1)} \sum_{M_1 M_n} \begin{pmatrix} J_n & 1 & J_1 \\ -M_n & \lambda & M_1 \end{pmatrix}^4$$

Para los tres casos posibles

$$J_n = J_1,\ J_1 \pm 1$$

el cálculo directo de la suma da

$$g = \begin{cases} \dfrac{7J_1(J_1+1)+1}{30J_1(J_1+1)}, & J_n = J_1 \neq 0; \\ \dfrac{(2J_1+3)[16(J_1+1)^2-1]}{30(2J_1+1)^2(J_1+1)}, & J_n = J_1 + 1; \\ \dfrac{(2J_1-1)(16J_1^2-1)}{30J_1(2J_1+1)^2}, & J_n = J_1 - 1,\ J_1 \geqslant 1. \end{cases}$$

CAPÍTULO 7

LA MATRIZ DE DISPERSIÓN

§ 65. Amplitud de dispersión

El planteo general del problema de las colisiones se puede formular como sigue: dado el estado inicial de un sistema (un cierto conjunto de partículas libres), hallar las probabilidades de los diferentes estados finales posibles (otros conjuntos de partículas libres). Si el símbolo $|i\rangle$ designa el estado inicial, el resultado de la colisión se puede representar como superposición de estados

$$\sum_f |f\rangle\langle f|S|i\rangle, \tag{65.1}$$

donde la suma se extiende a los diferentes estados finales posibles $|f\rangle$. Los coeficientes de este desarrollo $\langle f|S|i\rangle$ (o abreviadamente S_{fi}) constituyen la *matriz de dispersión* o *matriz-S* *. Los cuadrados $|S_{fi}|^2$ dan las probabilidades de las transiciones a determinados estados $|f\rangle$.

Si no existiera interacción entre las partículas, el estado del sistema no cambiaría y la matriz-S sería la matriz unidad (ausencia de dispersión). Es conveniente separar siempre la matriz unidad y representar la matriz de dispersión en la forma

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(P_f - P_i)\,T_{fi}, \tag{65.2}$$

donde T_{fi} es una nueva matriz. En el segundo miembro se ha separado como factor la función-δ de cuatro dimensiones que expresa la conservación del 4-impulso (P_i y P_f son las sumas de los 4-impulsos de todas las partículas en los estados inicial y final); los demás factores se han introducido porque así conviene para lo que sigue. En los elementos de matriz no diagonales no aparece el primer término de (65.2), de modo que para la transición $i \to f$ los elementos de las matrices S y T están ligados entre sí por la igualdad

* De la palabra inglesa *scattering* o del alemán *Streuung*.

$$S_{fi} = i\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(P_f - P_i)\;T_{fi}. \tag{65.3}$$

Los elementos de matriz T_{fi} que quedan después de separar la función-δ constituyen lo que llamaremos *amplitudes de dispersión*.

Al elevar al cuadrado los módulos $|S_{fi}|$ aparece el cuadrado de la función-δ. Este cuadrado debe entenderse en el sentido siguiente: la función-δ resulta de la integral

$$\delta^{(4)}\,(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\,(P_f - P_i)\,x}\,d^4x. \tag{65.4}$$

Si se calcula otra integral como ésta para $P_f = P_i$ (en virtud de que existe ya una función-δ) y se extendiese la integración a un volumen grande pero finito V y a un intervalo de tiempo t, se obtendría $Vt/(2\pi)^4$ ★. Por ello se puede escribir

$$|\,S_{fi}\,|^2 = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(P_f - P_i)\,|\,T_{\;i}\,|^2\,Vt.$$

Dividiendo por t obtendremos la probabilidad de transición por unidad de tiempo

$$w_{f\leftarrow i} = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(P_f - P_i)\,|\,T_{fi}\,|^2 V. \tag{65.5}$$

Cada una de las partículas libres (iniciales y finales) se describe por su función de onda, que es una onda plana con cierta amplitud u (para el electrón ésta es un bispinor, para un fotón, un 4-vector, etc.). La amplitud de dispersión T_{fi} tiene una estructura de la forma

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \ldots Q u_1 u_2 \ldots, \tag{65.6}$$

donde a la izquierda aparecen las amplitudes de las funciones de onda de las partículas finales, y a la derecha las amplitudes de las iniciales; Q es una cierta matriz (respecto de los índices de las componentes de las amplitudes de onda de todas las partículas).

Los casos más importantes son aquellos en que en el estado inicial se tienen solamente una o dos partículas. En los del primer tipo se trata de la desintegración de una partícula, en los del segundo, del choque de dos partículas.

Consideremos primero la desintegración de una partícula en un número arbitrario de otras partículas con impulsos $\boldsymbol{p}'_a$ en el elemento del espacio de impulsos $\prod_a d^3p'_a$ (el índice a numera las partículas en el estado final, de modo que $\sum_a p'_a = \boldsymbol{P}_f$). El número de estados que corresponden a este elemento (y al volumen de normalización V ★★) es

---

* Esto se puede probar de otra manera, calculando primero la integral para cada una de las coordenadas en (65.4) entre límites finitos y haciendo tender luego los límites a infinito mediante la fórmula III (42.4):

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\xi}{\xi\alpha^2} = \pi\delta\,(\alpha).$$

** Con el fin de hacer más evidentes los cálculos, en este párrafo no supondremos que el volumen de normalización sea igual a la unidad.

$$\prod_a \frac{Vd^3p'_a}{(2\pi)^3}.$$

La expresión (65.5) hay que multiplicarla por esta cantidad:

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \prod_a \frac{Vd^3p'_a}{(2\pi)^3}. \tag{65.7}$$

En todo esto las funciones de onda de todas las partículas, utilizadas en el cálculo del elemento de matriz, deben estar normalizadas a razón de « una partícula en el volumen V » *. Así, para un electrón dicha función es la onda plana (23.1), para una partícula de spin 1, la (14.12), para un fotón, la (4.3). Todas estas funciones contienen el factor $1/\sqrt{2\varepsilon V}$, donde ε es la energía de la partícula. Sin embargo, en lo que sigue resultará conveniente escribir en todos los cálculos la función de onda de las partículas sin dichos factores (que incluiremos en la expresión de la probabilidad). De esta manera, la onda plana del electrón será

$$\psi = ue^{-ipx}, \quad \bar{u}u = 2m, \tag{65.8}$$

y la onda de fotón

$$A = \sqrt{4\pi}\, ee^{-ikx}, \quad ee^* = -1, \quad ek = 0. \tag{65.9}$$

La amplitud de dispersión calculada con tales funciones las designaremos (para distinguirlas de las T_{fi}) por M_{fi}. Es evidente que

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2\varepsilon_1 V \ldots 2\varepsilon'_1 V \ldots)^{1/2}}; \tag{65.10}$$

en el denominador aparece un factor $\sqrt{2\varepsilon V}$ por cada una de las partículas inicial o final.

En particular, para la probabilidad de desintegración obtendremos en vez de (65.7)

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}, \tag{65.11}$$

donde ε es la energía de la partícula que se desintegra; el volumen de normalización desaparece en esta fórmula, como debía ser **.

Demos a la fórmula (65.11) una forma más acabada (eliminando de ella la función-δ) para el caso en que la desintegración se produce dando lugar a dos partículas (con impulsos $\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$ y energías $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$). En el sistema de reposo de la partícula que se desintegra se tiene $\boldsymbol{p}'_1 = -\boldsymbol{p}'_2 \equiv \boldsymbol{p}'$, $\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = m$. Por lo tanto,

---

* Recordaremos (cf. la nota de la pág. 170) que esta manera de normalizar equivale a la normalización de las funciones de onda de las partículas finales respecto de la función $\delta(\boldsymbol{p})$ y a referir la probabilidad a $d^3p'_1 \ldots$.

** Si entre las partículas finales hay N idénticas entre sí, al integrar respecto de sus impulsos (a fin de hallar la probabilidad integral) ha de introducirse el factor $1/N!$ que tiene en cuenta la identidad de los estados que difieren entre sí en una permutación de las partículas.

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{1}{2m} \frac{1}{4\varepsilon'_1\varepsilon'_2} \delta(\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2)\, \delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - m)\, d^3p'_1 d^3p'_2.$$

La primera función-δ desaparece al integrar respecto de $d^3p'_2$; la diferencial $d^3p'_1$, en cambio, la escribiremos en la forma

$$d^3p' = \boldsymbol{p}'^2 d|\boldsymbol{p}'|\, do = |\boldsymbol{p}'|\, do\, \frac{\varepsilon'_1\varepsilon'_2 d(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)}{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2} \tag{65.12}$$

(es fácil convencerse de que esta notación es correcta observando que

$$\varepsilon'^2_1 - m'^2_1 = \varepsilon'^2_2 - m'^2_2 = \boldsymbol{p}'^2).$$

La integración respecto de $d(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$ hace desaparecer la segunda función-δ y se obtiene

$$dw = \frac{1}{32\pi^2 m^2} |M_{fi}|^2 |\boldsymbol{p}'|\, do'. \tag{65.13}$$

Consideremos ahora la colisión de dos partículas (con impulsos $\boldsymbol{p}_1$ y $\boldsymbol{p}_2$ y energías ε_1 y ε_2) en la que éstas se transforman en el conjunto de un número arbitrario de partículas con impulsos $\boldsymbol{p}'_a$. En vez de (65.11) tendremos ahora

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4\varepsilon_1\varepsilon_2 V} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}.$$

En este caso la cantidad que nos interesa, sin embargo, no es la probabilidad, sino la sección eficaz $d\sigma$. La sección eficaz invariante (respecto de las transformaciones de Lorentz) se obtiene a partir de dw dividiendo por la cantidad

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1\varepsilon_2}, \tag{65.14}$$

donde I representa el 4-escalar

$$I = \sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2} \tag{65.15}$$

(véase II, § 12)*. En el sistema del centro de masa ($\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 \equiv \boldsymbol{p}$) se tiene

$$I = |\boldsymbol{p}|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \tag{65.16}$$

de modo que

$$j = \frac{|\boldsymbol{p}|}{V}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{v_1 + v_2}{V}, \tag{65.17}$$

que coincide con la definición ordinaria de la densidad de flujo de las partículas que chocan (v_1, v_2 son sus velocidades)**. Así, pues, para la sección eficaz encon-

---

* Con vistas a futuras referencias, escribiremos también la expresión de I en la forma

$$I^2 = \frac{1}{4}[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2], \tag{65.15a}$$

donde $s = (p_1 + p_2)^2$.

** En un sistema arbitrario de referencia,

$$j = \frac{1}{V}\sqrt{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2 - [\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2]^2}.$$

Esta expresión se reduce a la densidad ordinaria de flujo en todos los casos en que $\boldsymbol{v}_1 \| \boldsymbol{v}_2$: $j = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|/V$.

tramos la fórmula

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_f - P_i) \mid M_{fi} \mid^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}. \tag{65.18}$$

Demos a esta fórmula su forma definitiva eliminando de ella la función-δ para el caso en que se tienen también tan sólo dos partículas en el estado final. Estudiaremos el proceso en el sistema del centro de masa. Sea $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$ la energía total; $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 \equiv \boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p}'_1 = -\boldsymbol{p}'_2 \equiv \boldsymbol{p}'$ los impulsos inicial y final. La función-δ se elimina de la misma manera como se hizo al deducir (65.13) y se obtiene

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \mid M_{fi} \mid^2 \frac{\mid \boldsymbol{p}' \mid}{\mid \boldsymbol{p} \mid \varepsilon^2} do' \tag{65.19}$$

(en el caso particular de la dispersión elástica, cuando la especie de las partículas no cambia en la colisión, se tiene $|\boldsymbol{p}'| = |\boldsymbol{p}|$).

Escribamos esta fórmula en otra forma todavía, introduciendo en ella la cantidad invariante

$$t \equiv (p_1 - p'_1)^2 = m_1^2 + m_1'^2 - 2(p_1 p'_1) = \\ = m_1^2 + m_1'^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon'_1 + 2 \mid \boldsymbol{p}_1 \mid \mid \boldsymbol{p}'_1 \mid \cos\theta, \tag{65.20}$$

donde θ es el ángulo formado por $\boldsymbol{p}_1$ y $\boldsymbol{p}'_1$. En el sistema del centro de masa, los impulsos $|\boldsymbol{p}_1| \equiv |\boldsymbol{p}|$ y $|\boldsymbol{p}'_1| \equiv |\boldsymbol{p}'|$ vienen determinados por la energía total ε únicamente, y para ε dado se tiene

$$dt = 2 \mid \boldsymbol{p} \mid \mid \boldsymbol{p}' \mid d \cos\theta. \tag{65.21}$$

Por ello, en (65.19) se puede substituir

$$do' = -d\varphi \, d\cos\theta = \frac{d\varphi \, d(-t)}{2 \mid \boldsymbol{p} \mid \mid \boldsymbol{p}' \mid},$$

donde φ es el acimut de $\boldsymbol{p}'_1$ respecto de $\boldsymbol{p}_1$*. De esta manera,

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} \mid M_{fi} \mid^2 \frac{dt}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \tag{65.22}$$

[hemos introducido de nuevo el invariante I de acuerdo con (65.16)]. El acimut φ, y con él también la sección eficaz en la forma (65.22), son invariantes respecto de las transformaciones de Lorentz que no cambian el sentido del movimiento de las partículas. Si la sección eficaz no depende del acimut, la fórmula (65.22) toma la forma particularmente simple

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} \mid M_{fi} \mid^2 \frac{dt}{I^2}. \tag{65.23}$$

Si una de las partículas que chocan es suficientemente pesada (y su estado no

* Dado que el signo correcto de la diferencial en casos semejantes es evidente, para simplificar escribiremos en lo que sigue dt en vez de $d(-t)$, etc.

cambia a consecuencia de la colisión) su papel en el proceso queda reducido al de una fuente inmóvil de un campo constante en el que se dispersa la otra partícula. De acuerdo con el hecho de que en un campo constante se conserva la energía del sistema (¡pero no el impulso!), en esta manera de tratar el proceso de colisión representaremos los elementos de la matriz S en la forma

$$S_{fi} = i\,2\pi\delta\,(E_f - E_i)\,T_{fi}. \tag{65.24}$$

En la expresión $|S_{fi}|^2$ el cuadrado de la función-δ unidimensional debe interpretarse en el sentido de que

$$[\delta\,(E_f - E_i)]^2 \to \frac{1}{2\pi}\,\delta\,(E_f - E_i)\,t.$$

Pasando luego [al igual que en la deducción de (65.11)] a la amplitud M_{fi} en vez de T_{fi}, obtendremos la siguiente expresión para la probabilidad del proceso en que una partícula, que experimenta dispersión en un campo constante, origina en el estado final un cierto número de otras partículas:

$$dw = 2\pi\delta\,(E_f - \varepsilon)\,|\,M_{fi}\,|^2\,\frac{1}{2\varepsilon V}\prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3\,2\varepsilon'_a}.$$

También aquí $\varepsilon(= E_i)$ es la energía de la partícula inicial, $\boldsymbol{p}'_a$ y ε'_a, los impulsos y las energías de las partículas finales. En cuanto a la sección eficaz de dispersión, ésta se obtiene dividiendo dw por la densidad de flujo $j = v/V$, donde $v = |\boldsymbol{p}|/\varepsilon$ es la velocidad de la partícula dispersada. En definitiva el volumen de normalización desaparece del resultado, como debía ser, y se obtiene

$$d\sigma = 2\pi\delta\,(E_f - \varepsilon)\,|\,M_{fi}\,|^2\,\frac{1}{2\,|\,\boldsymbol{p}\,|}\prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3\,2\varepsilon'_a}. \tag{65.25}$$

En el caso particular de dispersión elástica, en el estado final se tiene también una sola partícula con igual impulso (en módulo) e igual energía. Substituyendo $d^3p' \to \boldsymbol{p}'^2 d|\boldsymbol{p}'|\,do' = |\boldsymbol{p}'|\varepsilon' d\varepsilon' do'$ y eliminando la función $\delta(\varepsilon' - \varepsilon)$ por integración respecto de $d\varepsilon'$, obtendremos la sección eficaz en la forma

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}\,|\,M_{fi}\,|^2\,do'. \tag{65.26}$$

Finalmente, si el campo exterior depende del tiempo (por ejemplo, el campo de un sistema de partículas pesadas que efectúan un movimiento dado), de la matriz S desaparece también la función-δ de la energía. Entonces es $S_{fi} = iT_{fi}$ y después de pasar de T_{fi} a M_{fi} según (65.10), la probabilidad, por ejemplo, del proceso en que el campo origina un determinado conjunto de partículas vendrá dada por la fórmula

$$dw = |\,M_{fi}|^2 \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a} \tag{65.27}$$

§ 66. Reacciones con partículas polarizadas

En este párrafo mostraremos mediante ejemplos sencillos de qué manera se tiene en cuenta en el cálculo de la sección eficaz de dispersión el estado de polarización de las partículas que participan en la reacción.

Supongamos que tanto en el estado inicial como en el final se tiene un electrón. Entonces la amplitud de dispersión tiene la forma

$$M_{fi} = \bar{u}' A u \; (\equiv \bar{u}'_i A_{ik} u_k), \tag{66.1}$$

donde u y u' son las amplitudes bispinoriales del electrón inicial y final y A una cierta matriz (que depende de los impulsos y de las polarizaciones de las demás partículas que toman parte en la reacción, si las hay).

La sección eficaz de dispersión es proporcional a $|M_{fi}|^2$. Se tiene

$$(\bar{u}' A u)^* = u' \gamma^{0*} A^* u^* = u^* A^+ \gamma^{0+} u',$$

o bien

$$(\bar{u}' A u)^* = \bar{u} \bar{A} u', \tag{66.2}$$

donde *

$$\bar{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0.$$

Así, pues,

$$|M_{fi}|^2 = (\bar{u}' A u)(\bar{u} \bar{A} u') \equiv u'_i \bar{u}'_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{A}_{mi}. \tag{66.3}$$

Si el electrón inicial se encontrara en un estado mezclado (parcialmente polarizado) con una matriz densidad ρ y si nos interesa la sección eficaz del proceso de formación de un electrón final en un estado de polarización dado a priori ρ', habrá que substituir los productos de las componentes de las amplitudes bispinoriales de acuerdo con

$$u'_i \bar{u}'_k \to \rho'_{ik}, \quad u_l \bar{u}_m \to \rho_{lm}.$$

Entonces

$$|M_{fi}|^2 = \mathrm{Tr}\,(\rho' A \rho \bar{A}). \tag{66.4}$$

Las matrices densidad ρ y ρ' vienen dadas por la fórmula (29.13)

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)(1 - \gamma^5 \hat{a}) \tag{66.5}$$

(y análogamente para ρ').

Si el electrón inicial no está polarizado, se tendrá

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m). \tag{66.6}$$

---

* En relación con la necesidad de formar la matriz $\bar{A}$ haremos observar para más adelante las siguientes igualdades que es fácil comprobar:

$$\overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^\mu \gamma^\nu \ldots \gamma^\rho} = \gamma^\rho \ldots \gamma^\nu \gamma^\mu, \qquad \overline{\gamma^5} = -\gamma^5, \quad \overline{\gamma^5 \gamma^\mu} = \gamma^5 \gamma^\mu. \tag{66.2a}$$

La substitución de esta expresión equivale a promediar respecto de las polarizaciones del electrón. Si se pide determinar la sección eficaz de dispersión con una polarización arbitraria del electrón final, hay que hacer también $\rho' = (\hat{p}' + m)/2$ y multiplicar por dos el resultado; esta operación es equivalente a la de sumar respecto de las polarizaciones del electrón. De esta manera obtendremos

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\{(\hat{p}' + m)\,A\,(\hat{p} + m)\,\bar{A}\}, \tag{66.7}$$

donde $\sum_{\text{polar}}$ designa la suma respecto de las polarizaciones iniciales y finales y el factor $1/2$ transforma una de estas sumas en un promedio.

La matriz densidad ρ' en (66.4) es un concepto auxiliar que caracteriza, en esencia, las propiedades del detector (que distingue una u otra polarización del electrón final) y no del proceso de dispersión en sí. Se plantea la cuestión de cuál sea el estado de polarización del electrón al que lo conduce el propio proceso de dispersión. Si $\rho^{(f)}$ es la matriz densidad de este estado, la probabilidad de detectar el electrón en el estado ρ' se obtendrá proyectando $\rho^{(f)}$ sobre ρ', es decir, formando la traza $\mathrm{Tr}(\rho^{(f)}\rho')$. A esta misma cantidad será proporcional la correspondiente sección eficaz, es decir, el cuadrado $|M_{fi}|^2$. Comparando con (66.4), llegamos a la conclusión de que

$$\rho^{(f)} \sim A\rho\bar{A}. \tag{66.8}$$

Dado que se sabe a priori que $\rho^{(f)}$ ha de tener la forma (66.5) con un cierto 4-vector $a^{(f)}$, el asunto se reduce a determinar este último. Esto podría hacerse mediante la fórmula (29.14), pero es todavía más fácil proceder como se indica a continuación.

En el § 29 vimos que las componentes del 4-vector a se expresan en función de las componentes de un 3-vector $\boldsymbol{\zeta}$ — que es el doble del valor medio del spin del electrón en su sistema de reposo. Los estados de polarización de los electrones quedan por completo determinados por estos vectores y es lógico expresar también en función de ellos la sección eficaz de dispersión. El cuadrado $|M_{fi}|^2$ será, evidentemente, lineal respecto de cada uno de los vectores $\boldsymbol{\zeta}$ y $\boldsymbol{\zeta}'$ que se refieren a los electrones inicial y final. Como función de $\boldsymbol{\zeta}'$ tendrá la forma

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\zeta}', \tag{66.9}$$

donde α y $\boldsymbol{\beta}$ son a su vez funciones lineales de $\boldsymbol{\zeta}$.

El vector $\boldsymbol{\zeta}'$ en (66.9) es la polarización dada del electrón final vista por el detector. En cuanto al vector $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$, que corresponde a la matriz densidad $\rho^{(f)}$, es fácil hallarlo de la siguiente manera. De acuerdo con lo dicho más arriba

$$|M_{fi}|^2 \sim \mathrm{Tr}\,(\rho'\rho^{(f)}).$$

Dada la invariancia relativista de esta magnitud, es posible calcularla en un sistema de referencia cualquiera. En el sistema de reposo del electrón final tenemos, según (29.20),

$$\rho'\rho^{(f)} \sim (1 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\zeta}')(1 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\zeta}^{(f)}).$$

Por consiguiente,

$$|M_{fi}|^2 \sim 1 + \boldsymbol{\zeta}'\cdot\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$$

y, comparando con (66.9), se encuentra que

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\alpha}. \tag{66.10}$$

De esta manera, calculando la sección eficaz en función del parámetro $\boldsymbol{\zeta}'$, determinamos también a la vez la polarización $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$.

En casos más complicados, cuando se tiene más de un electrón inicial o final, los cálculos se efectúan de manera análoga de acuerdo con el esquema expuesto.

Así, si al principio y al final se tienen dos electrones, la amplitud de dispersión tiene la forma

$$M_{fi} = (\bar{u}_1' A u_1)(\bar{u}_2' B u_2) + (\bar{u}_2' C u_1)(\bar{u}_1' D u_2),$$

donde u_1, u_2 son las amplitudes bispinoriales de los electrones iniciales, y u_1', u_2', las de los finales. Al formar el cuadrado $|M_{fi}|^2$ aparecen términos del tipo

$$|\bar{u}_1' A u_1|^2 \, |\bar{u}_2' B u_2|^2$$

y de la forma

$$(\bar{u}_1' A u_1)(\bar{u}_2' B u_2)(\bar{u}_2' C u_1)^* (\bar{u}_1' D u_2)^*.$$

Los primeros se reducen a productos de dos trazas del tipo (66.4), y los segundos, a trazas de la forma

$$\mathrm{Tr}\,(\rho_1' A \rho_1 \bar{C} \rho_2' B \rho_2 \bar{D}).$$

Los positones se representan por amplitudes « de frecuencia negativa » $u(-p)$. Para reacciones en las que participan positones la diferencia con relación a lo expuesto más arriba se reduce a que hay que utilizar como matriz densidad ciertas expresiones que difieren de (66.5-6) tan sólo en el cambio de signo de m [cf. (29.16-17)].

Pasemos ahora a los estados de polarización de los fotones que participan en la reacción.

La polarización de cada fotón inicial figura linealmente en la amplitud de dispersión en forma de 4-vector e, y la de cada fotón final, en forma de 4-vector e^*. En ambos casos, en la sección eficaz (es decir, en el cuadrado $|M_{fi}|^2$) aparece el 4-tensor $e_\mu e_\nu^*$. Para pasar al caso de un estado parcialmente polarizado arbitrario este tensor debe substituirse por una matriz densidad cuadridimensional — por un 4-tensor $\rho_{\mu\nu}$:

$$e_\mu e_\nu^* \to \rho_{\mu\nu}. \tag{66.11}$$

En particular, para un fotón no polarizado, según (8.15) se tendrá

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \tag{66.12}$$

De esta manera el promedio respecto de las polarizaciones del fotón se reduce a la contracción tensorial en $|M_{fi}|^2$ respecto de los dos índices tensoriales $\mu\nu$ *.

Si se pide efectuar no el promedio, sino la suma respecto de las polarizaciones del fotón, hay que substituir $e_\mu e_\nu^*$ por la expresión dos veces mayor

$$e_\mu e_\nu^* \to -g_{\mu\nu}. \tag{66.13}$$

La matriz densidad de un fotón polarizado viene dada por la fórmula (8.17). La elección de los 4-vectores $e^{(1)}$ y $e^{(2)}$ que figuran en esta expresión viene dictada de ordinario por las condiciones concretas del problema. En unos casos estos vectores pueden estar vinculados a determinadas direcciones espaciales en un cierto sistema de referencia. En otros casos es más conveniente referirlos a los 4-vectores característicos que figuran en las condiciones del problema — los 4-impulsos de las partículas.

En (8.17) la polarización del fotón se representó por los parámetros de Stokes, que forman un « vector » $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Al igual que en el caso del electrón, hay que distinguir la polarización $\boldsymbol{\xi}^{(f)}$ del fotón final en sí de la polarización $\boldsymbol{\xi}'$ que ve el detector. Si se conoce el cuadrado de la amplitud de dispersión en función del parámetro $\boldsymbol{\xi}'$:

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\xi}',$$

se tiene para la polarización $\boldsymbol{\xi}^{(f)} = \boldsymbol{\beta}/\alpha$, igualdad que es por completo análoga a la fórmula (66.10).

§ 67. Invariantes cinemáticos

Consideremos algunas relaciones cinemáticas para los procesos de dispersión en los cuales tanto en el estado inicial como en el estado final se tienen sólo dos partículas. Se trata de relaciones que son consecuencia únicamente de las leyes generales de conservación y que, por lo tanto, valen con independencia de cuál sea la naturaleza de las partículas y la de las leyes de su interacción.

Escribamos la ley de conservación del 4-impulso en forma general, sin decidir de antemano qué impulsos se refieren a las partículas iniciales y cuáles a las finales

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0. \tag{67.1}$$

Los $\pm q_a$ son aquí 4-vectores impulso, de los cuales dos corresponden a las partículas incidentes, y dos, a las dispersadas; para las últimas, los impulsos son los $-q_a$. En otras palabras, en dos de los q_a la componente es $q_a^0 > 0$ y para los otros dos es $q_a^0 < 0$.

Junto con la conservación del 4-impulso debe cumplirse la ley de conservación de la carga. En este sentido, se puede entender por carga no sólo la carga eléctrica, sino también otras cantidades que se conservan y que tienen signos opuestos en las partículas y en las antipartículas.

---

* La expresión (66.12) en cierto modo reduce el promedio respecto de las dos polarizaciones realmente posibles del fotón al promedio respecto de las cuatro direcciones independientes del 4-vector e.

Para especies dadas de las partículas que toman parte en el proceso, los cuadrados de los 4-vectores q_a son los cuadrados dados de las masas de las partículas ($q_a^2 = m_a^2$). Según los valores atribuidos a las componentes temporales q_a^0 y los valores de las cargas, obtendremos tres reacciones diferentes. Escribamos estos tres procesos como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{I)} \quad 1 + 2 \to 3 + 4, \\ &\text{II)} \quad 1 + \bar{3} \to \bar{2} + 4, \\ &\text{III)} \quad 1 + \bar{4} \to \bar{2} + 3. \end{aligned} \tag{67.2}$$

La cifra designa aquí el número de la partícula, y el trazo encima de la primera distingue la antipartícula de la partícula. Al paso de una de las reacciones a otra, es decir, al paso de una partícula de un miembro de la fórmula al otro, corresponde el cambio de signo de la componente temporal q_a^0 asociada y también del signo de la carga, esto es, el cambio de una partícula por la antipartícula. [Junto con los procesos (67.2) son también posibles, naturalmente, las reacciones inversas.]

De los tres procesos (67.2) se dice que son los tres *canales cruzados* (o *de cruce*) de una misma reacción (generalizada).

Veamos algunos ejemplos. Si las partículas 1 y 3 son electrones, y las 2 y 4 son fotones, el canal I es la dispersión de un fotón por un electrón; teniendo en cuenta que el fotón es una partícula realmente neutra, el canal III coincide con el canal I. En cambio, el canal II representa la transformación de un par electrón-positón en dos fotones. Si las cuatro partículas son electrones, el canal I es la dispersión de un electrón por un electrón y los canales II y III corresponden a la dispersión de un positón por un electrón. Si las partículas 1 y 3 son electrones y las 2 y 4 muones, el canal I es la dispersión de un e por un μ, el canal III, la dispersión de un e por un $\bar{\mu}$ y el canal II, la conversión de un par $e\bar{e}$ en un par $\mu\bar{\mu}$.

En el estudio de los procesos de dispersión representan un papel especial las cantidades invariantes que se pueden construir a partir de los 4-impulsos. Las amplitudes invariantes de dispersión (§ 71) son funciones de ellas.

Mediante los 4-impulsos es posible formar dos cantidades invariantes independientes. En efecto, en virtud de (67.1), sólo tres de los 4-vectores q_a son independientes; sean éstos los q_1, q_2, q_3. A partir de ellos se pueden construir seis invariantes: los tres cuadrados q_1^2, q_2^2, q_3^2 y los tres productos q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3. Pero los tres primeros son los cuadrados dados de las masas y los tres segundos están ligados por una relación que se sigue de la igualdad *

---

* En el caso general, cuando en la reacción toman parte $n \geq 4$ partículas, el número de variables invariantes funcionalmente independientes es igual a $3n - 10$. En efecto, en total se tienen $4n$ cantidades – las componentes de los n 4-impulsos q_a. Entre ellas existen n relaciones funcionales $q_a^2 = m_a^2$ y otras 4 dadas por la ley de conservación $\sum_{a=1}^{n} q_a = 0$. Se pueden dar valores arbitrarios a 6 cantidades, de acuerdo con el número de parámetros que determinan una transformación general de Lorentz (rotación cuadridimensional general). Por ello, el número de variables invariantes independientes es $4n - n - 4 - 6 = 3n - 10$.

$$(q_1 + q_2 + q_3)^2 = q_4^2 = m_4^2.$$

Para conseguir una mayor simetría conviene, sin embargo, considerar no dos, sino tres invariantes, para los cuales eligiremos los siguientes:

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2, \\ t &= (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2, \\ u &= (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2. \end{aligned} \tag{67.3}$$

Éstos están ligados, como es fácil ver, por la relación

$$s + t + u = h, \tag{67.4}$$

donde

$$h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{67.5}$$

En el canal fundamental (I) el invariante s tiene una significación física sencilla: es el cuadrado de la energía total de las partículas que chocan (1 y 2) en el sistema de su centro de masa [para $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0 : s = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$]. En el canal II representa un papel análogo el invariante t, y en el canal III, el invariante u. Debido a esto, los canales I, II, III se llaman a menudo canales s, t y u.

No ofrece dificultad expresar todos los invariantes s, t, u en función de las energías y de los impulsos de las partículas que chocan en cada uno de los canales. Consideremos el canal s. En el sistema del centro de masa de las partículas 1 y 2, las componentes temporales y espaciales de los 4-vectores q_a se dan en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 = (\varepsilon_1, \boldsymbol{p}_s), & q_2 &= p_2 = (\varepsilon_2, -\boldsymbol{p}_s), \\ q_3 &= -p_3 = (-\varepsilon_3, -\boldsymbol{p}'_s), & q_4 &= -p_4 = (-\varepsilon_4, \boldsymbol{p}'_s) \end{aligned} \tag{67.6}$$

(el índice s en $\boldsymbol{p}_s$, $\boldsymbol{p}'_s$ sirve para recordar que sus impulsos se refieren a la reacción en el canal s). Entonces

$$s = \varepsilon_s^2, \qquad \varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4; \tag{67.7}$$

$$\begin{aligned} 4s\boldsymbol{p}_s^2 &= [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2], \\ 4s\boldsymbol{p}_s'^2 &= [s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2]; \end{aligned} \tag{67.8}$$

$$\begin{aligned} 2t &= h - s + 4\boldsymbol{p}_s \cdot \boldsymbol{p}'_s - \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2), \\ 2u &= h - s - 4\boldsymbol{p}_s \cdot \boldsymbol{p}'_s + \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2). \end{aligned} \tag{67.9}$$

En el caso de dispersión elástica ($m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) tenemos $|\boldsymbol{p}_s| = |\boldsymbol{p}'_s|$, de modo que $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$. Entonces en vez de (67.9) se obtienen las fórmulas más simples

$$\begin{aligned} t &= -(\boldsymbol{p}_s - \boldsymbol{p}'_s)^2 = -2\boldsymbol{p}_s^2(1 - \cos\theta_s), \\ u &= -2\boldsymbol{p}_s^2(1 + \cos\theta_s) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2, \end{aligned} \tag{67.10}$$

donde θ_s es el ángulo formado por $\boldsymbol{p}_s$ y $\boldsymbol{p}'_s$. Obsérvese que el invariante $-t$ representa en este caso el cuadrado del impulso (tridimensional) transferido en la colisión.

Fórmulas análogas para los demás canales se obtienen mediante simples cambios de notación. Para pasar al canal t hay que efectuar en (67.6-10) la substitución $s \leftrightarrow t$, $2 \leftrightarrow 3$; para pasar al canal u, la substitución $s \leftrightarrow u$, $2 \leftrightarrow 4$.

§ 68. Regiones físicas

Al considerar las amplitudes de dispersión como funciones de las variables independientes s, t, u (ligadas solamente por la relación $s + t + u = h$), nos encontramos con la necesidad de distinguir las regiones de sus valores físicamente admisibles e inadmisibles. Los valores que pueden corresponder a un proceso físico de dispersión deben satisfacer determinadas condiciones que son consecuencias de la ley de conservación del 4-impulso y del hecho de que el cuadrado de cada uno de los 4-vectores q_a es una cantidad dada: $q_a^2 = m_a^2$.

Los productos de dos 4-impulsos son tales que

$$p_a p_b \geqslant m_a m_b. \tag{68.1}$$

En consecuencia,

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a + p_b)^2 \geqslant (m_a + m_b)^2,$$

si $q_a = p_a$, $q_b = p_b$ (o $q_a = -p_a$, $q_b = -p_b$), o bien

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a - p_b)^2 \leqslant (m_a - m_b)^2,$$

si $q_a = p_a$, $q_b = -p_b$. De aquí se sigue que para la reacción en el canal s ha de ser

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)^2 \leqslant s \geqslant (m_3 + m_4)^2, \\ &(m_1 - m_3)^2 \geqslant t \leqslant (m_2 - m_4)^2, \\ &(m_1 - m_4)^2 \geqslant u \leqslant (m_2 - m_3)^2 \end{aligned} \tag{68.2}$$

(desigualdades análogas valen en los canales t y u).

Para hallar las restantes condiciones formaremos el 4-vector L, dual del producto de tres cualesquiera de los 4-vectores q_a, por ejemplo:

$$L_\lambda = e_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho. \tag{68.3}$$

En el sistema de reposo de una de las partículas (por ejemplo, de la partícula 1) es $q_1 = (q_1^0, 0)$. En estas condiciones, L tiene únicamente componentes espaciales: $L_i = e_{i0kl} q_1^0 q_2^k q_3^l$. En otras palabras, L es un vector espacial, y en cualquier sistema de referencia se tiene $L^2 \leqslant 0$. Desarrollando el cuadrado L^2, obtenemos la condición

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{68.4}$$

Ésta puede expresarse en función de los invariantes s, t, u en una forma que es la misma para todos los canales

$$stu \geqslant as + bt + cu, \tag{68.5}$$

donde

$$\begin{aligned} ah &= (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \\ bh &= (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2), \\ ch &= (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) \end{aligned} \tag{68.6}$$

(*T. W. B. Kibble*, 1960).

Para representar gráficamente los dominios de variación de las variables s, t, u conviene utilizar las llamadas coordenadas triangulares en un plano (plano de Mandelstam, *S. Mandelstam*, 1958). Los ejes de coordenadas en él son tres rectas que se cortan formando un triángulo equilátero. Las coordenadas s, t, u se cuentan sobre direcciones perpendiculares a estas tres rectas (considerando positivas las direcciones orientadas hacia dentro del triángulo, como se indica en la figura 7 mediante flechas). En otras palabras, a cada uno de los puntos del plano corresponden valores s, t, u que se representan (con sus correspondientes signos) por las longitudes de las perpendiculares trazadas sobre los tres ejes. Que se cumple la condición $s + t + u = h$ queda garantizado por un conocido teorema de geometría (si la altura del triángulo equilátero es igual a h)*.

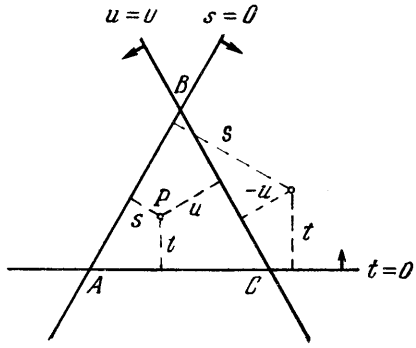


FIG. 7.

Consideremos el caso importante en que al canal fundamental (s) corresponde la dispersión elástica; entonces las masas de las partículas son iguales dos a dos:

$$m_1 = m_3 \equiv m, \qquad m_2 = m_4 \equiv \mu. \tag{68.7}$$

* Uniendo, por ejemplo, el punto P (fig. 7) con los tres vértices del triángulo ABC, lo descomponemos en tres triángulos cuyas alturas son s, t, u; igualando la suma de sus áreas al área del triángulo ABC, se encuentra la igualdad en cuestión. De manera análoga se demuestra también en el caso en que el punto P se encuentra fuera del triángulo ABC.

Sea $m > \mu$. En la condición (68.5) tenemos

$$h = 2(m^2 + \mu^2), \qquad a = c = 0, \qquad b = (m^2 - \mu^2)^2,$$

de modo que

$$stu \geqslant (m^2 - \mu^2)^2 t. \tag{68.8}$$

La frontera de la región determinada por esta desigualdad está constituida por la recta $t = 0$ y la hipérbola

$$su = (m^2 - \mu^2)^2, \tag{68.9}$$

cuyas dos ramas se encuentran en los sectores $u < 0$, $s < 0$ y $s > 0$, $u > 0$; los ejes $s = 0$ y $u = 0$ son las asíntotas de la hipérbola. En vez de (68.8) se puede escribir

$$t > 0, \quad su > (m^2 - \mu^2)^2 \text{ o bien } t < 0, \quad su < (m^2 - \mu^2)^2.$$

Además, de las condiciones (68.2) se sigue que hay que tener en cuenta también la desigualdad $s > (m + \mu)^2$ en el canal s y la $u > (m + \mu)^2$ en el canal u; las demás desigualdades se cumplen luego automáticamente. En definitiva encontramos que a los canales I, II, III (s, t, u) corresponden, como suele decirse, las *regiones físicas* representadas en sombreado en la figura 8.

Si $\mu = 0$ (las partículas 2, 4 son fotones), la rama inferior de la hipérbola es tangente al eje $t = 0$ y las regiones físicas tienen el aspecto que muestra la figura 9.

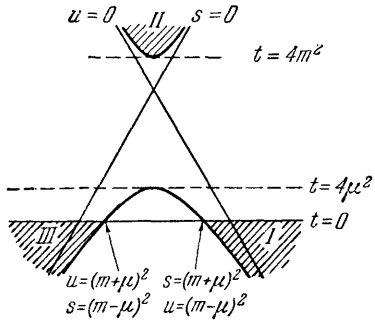


Fig. 8.

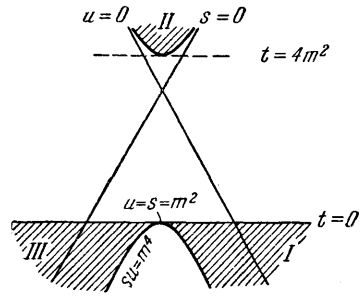


Fig. 9.

Pero si $m = \mu$, las fronteras de la región (68.8) degeneran en los ejes de coordenadas y las regiones físicas son los tres sectores representados en la figura 10.

En el caso general de cuatro masas diferentes, la ecuación

$$stu = as + bt + cu \tag{68.10}$$

determina una curva de tercer grado cuyas ramas limitan las regiones físicas de los tres canales, como muestra la figura 11. Supongamos que

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3 \geqslant m_4.$$

Entonces

$$a \geqslant b \geqslant c, \qquad a > 0, \quad b > 0.$$

La curva (68.10) corta a los ejes de coordenadas en puntos que se encuentran sobre la recta

$$as + bt + cu = 0.$$

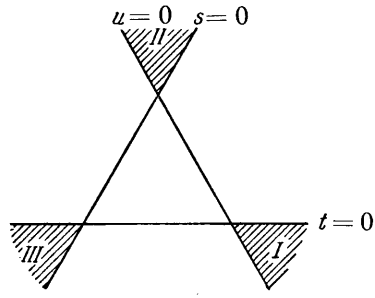


Fig. 10.

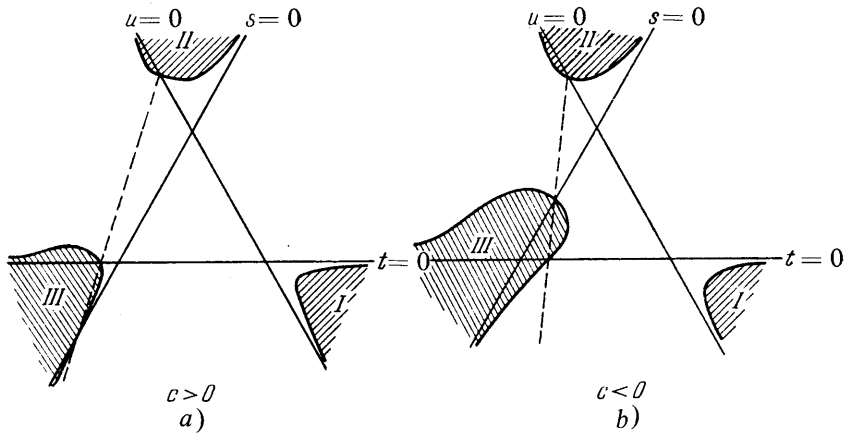


Fig. 11.

Según sea el signo de c, su forma es la que indica la figura 11, a y b. Cuando $c < 0$ la región física del canal u ocupa parte del área del triángulo de coordenadas; en otras palabras, en este caso las cantidades s, t, u pueden ser todas positivas. Las tres ramas de la curva frontera admiten como asíntotas los correspondientes ejes de coordenadas [es fácil cerciorarse de que es así eliminando de la ecuación (68.10) una de las variables mediante la relación $s + t + u = h$ y haciendo tender luego a infinito una de las variables restantes]. Las condiciones (68.2) no aportan nada

nuevo en el caso general en comparación con las fronteras que establece la ecuación (68.10). Las rectas que corresponden a los signos de igualdad en (68.2) no cortan las regiones físicas rayadas en la figura 11, *a*, *b*; algunas de ellas son tangentes a las fronteras de estas regiones, lo que corresponde a valores extremos de las variables s, t o u según sea el canal de que se trate.

En el caso en que la masa de una de las partículas sea mayor que la suma de las masas de las otras tres ($m_1 > m_2 + m_3 + m_4$), junto con los canales I, II, III es posible aun un cuarto canal de reacción que corresponde a la desintegración

$$\text{IV)}\quad 1 \to \overline{2} + 3 + 4. \tag{68.11}$$

Para este canal, en el sistema de reposo de la partícula que se desintegra se tiene

$$q_1 = (m_1, 0),\quad q_2 = (-\varepsilon_2,\ -\boldsymbol{p}_2),\quad q_3 = (-\varepsilon_3,\ -\boldsymbol{p}_3),\quad q_4 = (-\varepsilon_4, -\boldsymbol{p}_4),$$
$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = m_1,\qquad \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_4 = 0.$$

Los invariantes son:

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 - 2m_1\varepsilon_2,\\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2m_1\varepsilon_3,\\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2m_1\varepsilon_4. \end{aligned} \tag{68.12}$$

De (68.1) se deduce ahora:

$$\begin{aligned} (m_3 + m_4)^2 \leqslant s \leqslant (m_1 - m_2)^2,\\ (m_2 + m_4)^2 \leqslant t \leqslant (m_1 - m_3)^2,\\ (m_2 + m_3)^2 \leqslant u \leqslant (m_1 - m_4)^2. \end{aligned} \tag{68.13}$$

De esta manera los tres invariantes resultan todos positivos, es decir, la región física del canal de desintegración es interior al triángulo de coordenadas y está limitada por la curva cerrada que se deduce de (68.10).

PROBLEMAS

1. Hallar las regiones físicas en el caso de tres masas iguales: $m_1 \equiv m$, $m_2 = m_3 = m_4 \equiv \mu$ (por ejemplo, la reacción $K + \pi \to \pi + \pi$).

Solución. La ecuación (68.10) toma la forma

$$stu = \mu^2 (m^2 - \mu^2)^2, \tag{1}$$

con

$$s + t + u = 3\mu^2 + m^2.$$

Las regiones I, II, III están limitadas por curvas de igual forma (para I: $s > 0$, $t < 0$, $u < 0$, y análogamente para II y III). Si $m > 3\mu$, (1) tiene también una rama [curva cerrada] con $s > 0$, $t > 0$, $u > 0$, que es la frontera de la región del canal IV (fig. 12).

2. Lo mismo en el caso en que $m_1 \equiv m$, $m_2 \equiv \mu$, $m_3 = m_4 = 0$, $m > \mu$ (por ejemplo, la reacción $\mu + \nu \to e + \nu$).

Solución. La condición (68.5) toma la forma

$$stu \geqslant m^2 \mu^2 s,$$

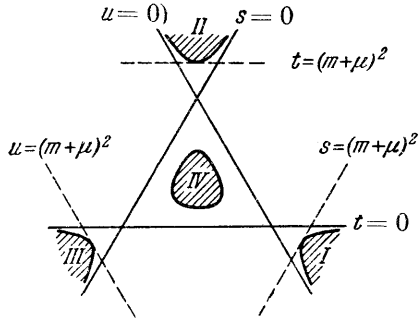


Fig. 12.

con $s + t + u = m^2 + \mu^2$. Las regiones físicas están limitadas por el eje $s = 0$ y las dos ramas de la hipérbola $tu = m^2\mu^2$ (fig. 13).

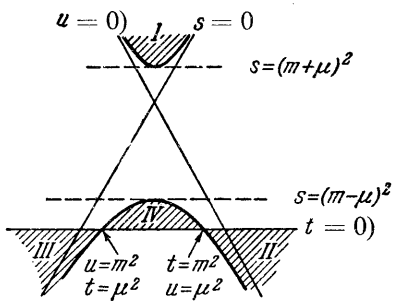


Fig. 13.

3. Lo mismo en el caso en que $m_1 = m_3 \equiv m$, $m_2 = 0$, $m_4 \equiv \mu$ y, además, $m > 2\mu$ (por ejemplo, la reacción $p + \gamma \to p + \pi^0$).

Solución. La ecuación de las fronteras (68.10) toma la forma

$$stu = a\,(s + u) + bt,$$

$$ah = m^2\mu^4,\quad bh = m^4\,(2m^2 - \mu^2),\quad h = 2m^2 + \mu^2.$$

Eliminando u, obtendremos

$$t^2 + \left(\frac{b - a}{s} + s - h\right) t + \frac{ah}{s} = 0.$$

Para s dado, ésta es una ecuación cuadrática en t. Para $s > (m + \mu)^2$ (región del canal s), a cada s corresponden dos valores negativos de t. Cuando $s = (m + \mu)^2$, estas dos raíces de la ecuación de segundo grado se confunden en una: $t = -m\mu^2/(m + \mu)$. La frontera de la región del canal s tiene la forma que indica la figura 14. La rama inferior de la curva frontera tiende asintóticamente al eje $u = 0$ y la rama superior corta este eje en el punto $t = \mu^4/(\mu^2 - m^2)$.

La región del canal u es simétrica respecto de la región del canal s, y la región del canal t está colocada según se indica en la figura.

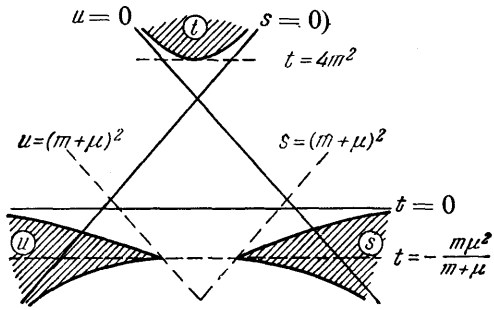


Fig. 14.

§ 69. Desarrollo en amplitudes parciales

La etapa esencial en el análisis de una reacción del tipo

$$a + b \to c + d \tag{69.1}$$

es el desarrollo de la amplitud de dispersión en amplitudes parciales, cada una de las cuales corresponde (para un valor dado de la energía total ε) a un determinado valor del momento cinético total J de las partículas en el sistema de su centro de masa*.

Estas amplitudes parciales representan, en otras palabras, los elementos de la matriz S en la representación de momentos:

$$\langle \varepsilon J' M' \mid S \mid \varepsilon J M \rangle.$$

Dado que el momento cinético J y su proyección M sobre un eje z dado se conservan, la matriz S es diagonal respecto de estos números (como también respecto de la energía ε). Además, en virtud de la isotropía del espacio los elementos diagonales son independientes del valor de M. Para J, M, ε dados, la matriz de dispersión sigue siendo una matriz respecto de los números cuánticos espinoriales; los elementos de esta matriz los representaremos de manera abreviada en la forma

$$\langle \varepsilon J M \lambda' \mid S \mid \varepsilon J M \lambda \rangle \equiv \langle \lambda' \mid S^J(\varepsilon) \mid \lambda \rangle, \tag{69.2}$$

donde λ y λ' son los conjuntos de números cuánticos espinoriales. Para estos últimos lo más natural es utilizar aquí las helicidades de las partículas. Recordaremos que la helicidad (a diferencia de la proyección del spin sobre un eje arbitrario en el espacio) se conserva para una partícula libre, y también que conmuta tanto con el impulso como con el momento cinético de la partícula (§ 16). Por ello, cabe utilizar las helicidades lo mismo en la representación de impulsos que en la representación de momentos de la matriz de dispersión.

* Gran parte de los resultados expuestos en los §§ 69, 70 se deben a *M. Jacob* y *G. C. Wick*, 1959.

Los elementos de la matriz S respecto de los índices de helicidad los llamaremos *amplitudes de helicidad* (o helicoidales) de la dispersión y, de esta manera, entenderemos por λ y λ' los conjuntos de las helicidades de las partículas iniciales y finales: $\lambda = (\lambda_a, \lambda_b)$, $\lambda' = (\lambda_c, \lambda_d)$.

En la representación de impulsos los elementos de la matriz de dispersión se determinan respecto de los estados $|\varepsilon \boldsymbol{n} \lambda\rangle$ (donde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ es la dirección orientada del impulso del movimiento relativo en el sistema del centro de masa), y en la de momentos, respecto de los estados $|\varepsilon JM\lambda\rangle$. Cada una se expresa en función de la otra mediante desarrollos de la forma

$$|JM\lambda\rangle = \int |\boldsymbol{n}\lambda\rangle \langle \boldsymbol{n}\lambda | JM\lambda\rangle \, do_{\boldsymbol{n}}, \tag{69.3}$$

donde la integración se extiende a las direcciones de $\boldsymbol{n}$ (prescindiremos, para abreviar, de la energía ε en los símbolos de los estados). En virtud del carácter unitario de esta transformación (véase III, § 12), los coeficientes de la transformación inversa son

$$\langle JM\lambda | \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \langle \boldsymbol{n}\lambda | JM\lambda\rangle^*. \tag{69.4}$$

Según la regla de transformación de las matrices, estos mismos coeficientes determinan la relación entre los elementos de la matriz S en ambas representaciones:

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | S | \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \sum_{JM} \langle \boldsymbol{n}'\lambda' | JM\lambda'\rangle \langle JM\lambda' | S | JM\lambda\rangle \langle JM\lambda | \boldsymbol{n}\lambda\rangle. \tag{69.5}$$

Los coeficientes del desarrollo (69.3) se hallan fácilmente mediante los resultados del § 16.

Expresemos las funciones de onda de todos los estados en la representación de impulsos, es decir, como funciones de la dirección orientada del impulso (para una energía dada); esta dirección, en tanto que variable independiente, la designaremos por $\boldsymbol{\nu}$ para distinguirla de la dirección $\boldsymbol{n}$ en tanto que número cuántico del estado. En esta representación, la función de onda tiene la forma (16.2)

$$\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)} \delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}). \tag{69.6}$$

Al substituir (69.6) en el desarrollo (69.3), éste se reduce a un solo término:

$$\psi_{JM\lambda} = \langle \boldsymbol{\nu}\lambda | JM\lambda\rangle \, u^{(\lambda)}. \tag{69.7}$$

Las helicidades λ_a y λ_b de cada una de las dos partículas se determinan como proyección de su spin sobre la dirección de su propio impulso. Si los impulsos de las partículas son $\boldsymbol{p}_a \equiv \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_b = -\boldsymbol{p}$, para la primera partícula dicha proyección coincide con la dirección de $\boldsymbol{n}$, y para la segunda, con la dirección de $-\boldsymbol{n}$. Si consideramos ahora el sistema como una sola partícula de helicidad Λ en la dirección $\boldsymbol{n}$, se tendrá $\Lambda = \lambda_a - \lambda_b$. Su función de onda (en la representación de impulsos) se puede representar, según (16.4), en la forma

$$\psi_{JM\lambda}(\mathbf{v}) = u^{(\lambda)} D^{(J)}_{\Lambda M}(\mathbf{v}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}. \tag{69.8}$$

Comparando las dos expresiones (69.7-8) (y cambiando la notación de la variable $\mathbf{v}$ por $\boldsymbol{n}$), obtendremos para los coeficientes buscados

$$\langle \boldsymbol{n}\lambda \mid JM\lambda \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\, D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}). \tag{69.9}$$

La substitución de estos coeficientes en (69.5) da

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \mid S \mid \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \sum_{JM} \frac{2J+1}{4\pi} D^{(J)}_{\Lambda' M}(\boldsymbol{n}') D^{(J)*}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}) \langle \lambda' \mid S^J \mid \lambda \rangle, \tag{69.10}$$

$$\Lambda = \lambda_a - \lambda_b, \quad \Lambda' = \lambda_c - \lambda_d,$$

donde se ha utilizado la notación abreviada (69.2). Elijamos el eje z en la dirección de $\boldsymbol{n}$; entonces

$$D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}) = \delta_{\Lambda M}$$

y (69.10) toma la forma

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \mid S \mid \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \sum_{J} \frac{2J+1}{4\pi} D^{(J)}_{\Lambda' \Lambda}(\boldsymbol{n}') \langle \lambda' \mid S^J \mid \lambda \rangle. \tag{69.11}$$

Vemos así que el desarrollo en amplitudes parciales se consigue tomando como coeficiente las funciones $D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}$. Para una reacción de la forma (69.1) conviene definir la amplitud de dispersión f de manera que la sección eficaz (en el sistema del centro de masa) sea

$$d\sigma = |\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \mid f \mid \boldsymbol{n}\lambda \rangle|^2 \, do' \tag{69.12}$$

[comparando con (65.19), cabe vincular esta amplitud con el elemento de matriz M_{fi}]. Escribiremos su desarrollo en amplitudes parciales en la forma

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \mid f \mid \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \sum_{JM} (2J+1)\, D^{(J)}_{\Lambda' M}(\boldsymbol{n}')\, D^{(J)*}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}) \langle \lambda' \mid f^J \mid \lambda \rangle, \tag{69.13}$$

o bien, eligiendo el eje z en la dirección de $\boldsymbol{n}$:

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \mid f \mid \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \sum_{J} (2J+1)\, D^{(J)}_{\Lambda' \Lambda}(\boldsymbol{n}') \langle \lambda' \mid f^J \mid \lambda \rangle. \tag{69.14}$$

Esta fórmula constituye la generalización del desarrollo ordinario en amplitudes parciales para la dispersión de partículas sin spin [véase III (122.13)]. Dado que $D^{(L)}_{00} = P_L(\cos\theta)$, para spins iguales a cero (69.14) se reduce al desarrollo en polinomios de Legendre

$$f(\theta) = \sum_{L} (2L+1)\, f_L P_L(\cos\theta).$$

La sección eficaz (69.12) corresponde al caso en que todas las partículas poseen

helicidades determinadas. Pero si las partículas se encuentran en estados de polarización del tipo mezcla, la sección eficaz se obtiene promediando el producto

$$\langle \lambda_c \lambda_d \,|\, f \,|\, \lambda_a \lambda_b \rangle \langle \lambda_c' \lambda_d' \,|\, f \,|\, \lambda_a' \lambda_b' \rangle^*$$

respecto de las matrices densidad de polarización de las partículas

$$\langle \lambda_a \,|\, \rho^{(a)} \,|\, \lambda_a' \rangle \langle \lambda_b \,|\, \rho^{(b)} \,|\, \lambda_b' \rangle \langle \lambda_c' \,|\, \rho^{(c)} \,|\, \lambda_c \rangle \langle \lambda_d' \,|\, \rho^{(d)} \,|\, \lambda_d \rangle$$

(véase la nota en la página 183). Así, para la reacción entre dos partículas no polarizadas a, b que conduce a la formación de partículas asimismo no polarizadas c, d, obtendremos

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \sum_{(\lambda)} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) \langle \lambda_c \lambda_d \,|\, f^J \,|\, \lambda_a \lambda_b \rangle \times$$
$$\times \langle \lambda_c \lambda_d \,|\, f^{J'} \,|\, \lambda_a \lambda_b \rangle^* D^{(J)}_{\Lambda' \Lambda}(\boldsymbol{n}') D^{(J')*}_{\Lambda' \Lambda}(\boldsymbol{n}') \quad (69.15)$$

(el eje z está orientado en la dirección de $\boldsymbol{n}$, el signo $\Sigma_{(\lambda)}$ representa la suma respecto de $\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d$). Substituyendo la función $D^{(J')*}_{\Lambda' \Lambda}$ de acuerdo con (a, 12) y utilizando luego el desarrollo (b, 2) se obtendrá finalmente

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \sum_{(\lambda) JJ'} (-1)^{\Lambda - \Lambda'} (2J+1)(2J'+1) \langle \lambda_c \lambda_d \,|\, f^J \,|\, \lambda_a \lambda_b \rangle \times$$
$$\times \langle \lambda_c \lambda_d \,|\, f^{J'} \,|\, \lambda_a \lambda_b \rangle^* \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda & -\Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda' & -\Lambda' & 0 \end{pmatrix} P_L(\cos\theta) \quad (69.16)$$

(θ es el ángulo formado por $\boldsymbol{n}'$ y el eje z); la suma respecto de L se extiende a todos los valores enteros que resultan de la composición vectorial de J y J'. El desarrollo de la amplitud de dispersión en amplitudes parciales tiene por completo en cuenta todas las propiedades de la distribución angular de la dispersión ligadas con la simetría respecto de las rotaciones espaciales. Sin embargo, no tiene en cuenta de manera explícita las propiedades vinculadas con la simetría respecto de la inversión espacial. La invariancia P (si la interacción la posee) conduce a determinadas relaciones entre las distintas amplitudes de helicidad (véase a continuación, § 70).

§ 70. Simetría de las amplitudes helicoidales de dispersión

Las condiciones que impone la simetría respecto de las transformaciones P, T, C (sí, claro está, el proceso de interacción dado entre partículas posee en efecto esta simetría), conducen al establecimiento de determinadas relaciones entre las diferentes amplitudes helicoidales de dispersión y disminuyen con ello el número de amplitudes independientes*.

---

* El número de amplitudes independientes no depende en sí, naturalmente, de la representación concreta de la matriz S^J y es el mismo cualquiera que sea la elección de variables de spin.

Para establecer estas relaciones, pongamos antes en claro las propiedades de simetría de los estados de helicidad de un sistema de dos partículas.

Consideremos las partículas en el sistema de su centro de masa. Una de ellas posee el impulso $\boldsymbol{p}_1 \equiv \boldsymbol{p}$ y la helicidad λ_1 respecto de la dirección de $\boldsymbol{p}$, y la otra, el impulso $\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}$ y la helicidad λ_2 respecto de la dirección de $-\boldsymbol{p}$. Pero si se trata de determinar la helicidad de ambas partículas respecto de una misma dirección, la de $\boldsymbol{p}$, éstas serán λ_1 y $-\lambda_2$. De acuerdo con esto, dichas partículas se representarán por ondas planas con amplitudes $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1)}$ y $u_{\boldsymbol{p}}^{(-\lambda_2)}$. En cambio, el sistema constituido por ambas partículas se representa por una función (de varias componentes) $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1\lambda_2)}$ formada a partir de los productos de las amplitudes $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1)}$ y $u_{\boldsymbol{p}}^{(-\lambda_2)}$.

Considerando ahora el sistema como una única partícula de helicidad $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ en la dirección $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, podemos escribir la función de onda (en la representación de impulsos, es decir, como función de $\boldsymbol{n}$) para el estado con valores determinados J, M, λ_1, λ_2 (y también con energía total ε):

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1\lambda_2)} D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}, \quad \Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \tag{70.1}$$

[cf. (69.8)]. Dado que Λ es la proyección del momento cinético total sobre $\boldsymbol{p}$, debe ser

$$|\Lambda| \leqslant J. \tag{70.2}$$

Según (16.14), en la inversión

$$\mathrm{P}u^{(\lambda_1\lambda_2)}(\boldsymbol{n}) = \eta_1\eta_2 u^{(\lambda_1\lambda_2)}(-\boldsymbol{n}) = \eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-\lambda_1+\lambda_2} u^{(-\lambda_1-\lambda_2)}(\boldsymbol{n}), \tag{70.3}$$

donde η_1, η_2 son las paridades intrínsecas de las partículas. Utilizando también (16.10), encontramos la ley de transformación de las funciones (70.1):

$$\mathrm{P}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-J}\psi_{JM-\lambda_1-\lambda_2}. \tag{70.4}$$

Si ambas partículas son idénticas, se plantea la cuestión de cuál sea la simetría respecto de su permutación. Permutar las partículas significa permutar sus impulsos y sus spins Para poner de manifiesto el sentido de esta operación cuando se aplica a la función (70.1), observemos que, en su definición, va implícita una asimetría que consiste en que los momentos cinéticos de ambas partículas se proyectan sobre la dirección de un mismo vector $\boldsymbol{p}_1 \equiv \boldsymbol{p}$ — es decir, sobre el impulso de una de ellas (la primera). Después de la permutación, el puesto de este vector lo ocupa el vector $\boldsymbol{p}_2 \equiv -\boldsymbol{p}$; las proyecciones de los momentos $\boldsymbol{j}_1$ y $\boldsymbol{j}_2$ sobre él serán $-\lambda_1$ y λ_2 (en vez de las proyecciones λ_1 y $-\lambda_2$ sobre $\boldsymbol{p}$). Por ello, el resultado de aplicar el operador permutación de las partículas (P_{12}) a la función (70.1) se puede representar mediante la fórmula

$$\mathrm{P}_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = u^{(-\lambda_2-\lambda_1)}(-\boldsymbol{n})\, D^{(J)}_{\Lambda M}(-\boldsymbol{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$$

(donde, como antes, $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$). Utilizando luego (70.3) y (16.10), se encuentra

$$P_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{2s-J}\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}, \tag{70.5}$$

donde $s_1 = s_2 \equiv s$.

Para partículas idénticas son admisibles sólo los estados simétricos (para bosones) o los antisimétricos (para fermiones) respecto de la permutación. Dado que el primer caso se presenta para spin de las partículas s entero, y el segundo, para spin semientero, en ambos casos los estados de helicidad admisibles del sistema de dos partículas se pueden escribir como combinaciones lineales.

$$[1 + (-1)^{2s}P_{12}]\,\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}$$

o bien, según (70.5),

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} + (-1)^J\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}. \tag{70.6}$$

Es notable que esta combinación tiene la misma forma para bosones y para fermiones.

Para un sistema formado por partículas y antipartículas el resultado de la permutación se expresa por la misma fórmula (70.5). Sin embargo, en contraste con el caso de partículas idénticas, aquí son admisibles estados de una y otra simetría, es decir, ambas combinaciones

$$\psi^{\pm} = \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \pm (-1)^J\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}. \tag{70.7}$$

Estos estados poseen paridades de carga determinadas C. La operación de conjugación de carga se puede representar como resultado de la permutación completa de todas las variables (de spin y de carga) de las dos partículas seguida de la permutación inversa de las variables de spin (de las helicidades). El resultado de la primera operación debe coincidir con el resultado de la permutación en un sistema de dos partículas idénticas. Es claro por esto, que cuando vale el signo superior en (70.7) [que coincide con el signo en un estado admisible para partículas idénticas (70.6)] el sistema será par respecto de la carga, y cuando valga el signo inferior, impar respecto de la misma

$$C\psi^{\pm} = \pm\psi^{\pm}.$$

Finalmente, consideremos la operación inversión del sentido del tiempo. La función de onda de una partícula en reposo cuyo spin es s y con proyección σ del mismo se transforma de acuerdo con

$$T\psi_{s\sigma} = (-1)^{s-\sigma}\psi_{s,-\sigma}$$

[véase III (60.2)]. La función de onda de dos partículas en el sistema de su centro de masa se puede considerar también (en relación con sus propiedades de transformación) como función de onda de una « partícula en reposo » de momento cinético J y proyección M del mismo. En lo que concierne a las helicidades λ_1, λ_2, éstas no cambian: la inversión del tiempo cambia de signo los vectores impulso y momento cinético y, en consecuencia, los productos $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{p}$ no cambian. Así, pues,

$$T\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{J-M}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}. \tag{70.8}$$

Es ahora posible escribir sin más las relaciones de simetría para las amplitudes de helicidad.

Si la interacción es invariante-P, para la reacción

$$a + b \longrightarrow c + d$$

deben coincidir (para J y ε dados) las amplitudes de las transiciones

$$|\lambda_a\lambda_b\rangle \longrightarrow |\lambda_c\lambda_d\rangle \quad \text{y} \quad P|\lambda_a\lambda_b\rangle \longrightarrow P|\lambda_c\lambda_d\rangle.$$

Utilizando (70.4), se encuentra por ello que

$$\langle\lambda_c\lambda_d|S^J|\lambda_a\lambda_b\rangle = \\ = \frac{\eta_c\eta_d}{\eta_a\eta_b}(-1)^{s_c+s_d-s_a-s_b}\langle -\lambda_c, -\lambda_d|S^J|-\lambda_a, -\lambda_b\rangle. \tag{70.9}$$

Pero si en vez de estados con helicidad determinada se eligen estados con determinadas paridades, es decir, las combinaciones

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \pm P\psi_{JM\lambda_1\lambda_2})$$

(donde $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_a\lambda_b$ o $\lambda_c\lambda_d$), se anularán las amplitudes de las transiciones en que no se conserve la paridad.

La inversión del tiempo transforma cada estado según (70.8) y, además, permuta entre sí los estados inicial y final. En consecuencia, la invariancia-T conduce a las relaciones

$$\langle\lambda_c\lambda_d|S^J(\varepsilon)|\lambda_a\lambda_b\rangle = \langle\lambda_a\lambda_b|S^J(\varepsilon)|\lambda_c\lambda_d\rangle. \tag{70.10}$$

Estas dos amplitudes, sin embargo, se refieren a procesos distintos (a la reacción directa y a la inversa). Tan sólo en el caso de dispersión elástica ambos procesos coinciden esencialmente, y entonces (70.10) constituye una determinada relación entre las amplitudes helicoidales de una misma reacción.

En la dispersión elástica de dos partículas idénticas el número de amplitudes diferentes disminuye aún más en virtud de la simetría de permutación. Vimos que, para J dado, se presenta únicamente o bien estados simétricos respecto de λ_1 y λ_2 o bien únicamente estados antisimétricos. Por este motivo, la conservación del momento cinético significa automáticamente que se conserva también la simetría respecto de la permutación de las helicidades.

Una situación análoga se presenta en la dispersión elástica de una partícula por la antipartícula asociada (o en la conversión de un tal par en otro par, es decir, en una reacción de la forma $a + \bar{a} \to b + \bar{b}$). Para J dado, existen tanto estados simétricos respecto de λ_1, λ_2, como estados antisimétricos, pero a estos estados corresponden valores diferentes de la variable carga del sistema. De aquí se sigue que si la interacción de las partículas es invariante-C, de modo que la paridad

de carga se conserva, las transiciones entre estados de diferente simetría respecto de λ_1, λ_2 están prohibidas*. Hay que subrayar, sin embargo, la diferencia respecto del caso de partículas idénticas, caso en que, para cada J dado, no existen los estados de una de las dos simetrías. En cambio, en el caso « partícula-antipartícula » están prohibidas únicamente las transiciones entre estados de diferente simetría, si bien estos estados existen de suyo (para cada J).

En virtud de la invariancia universal *CPT*, el que se cumpla la invariancia T significa que también existe la invariancia *CP*. Esta última conduce a la igualdad de las amplitudes de las reacciones, una de las cuales resulta de la otra substituyendo todas las partículas por sus antipartículas (y cambiando el signo de las helicidades):

$$\langle \lambda_c \lambda_d \,|\, S^J \,|\, \lambda_a \lambda_b \rangle = \langle \lambda_{\bar{c}} \lambda_{\bar{d}} \,|\, S^J \,|\, \lambda_{\bar{a}} \lambda_{\bar{b}} \rangle, \tag{70.11}$$

igualdad en la que $\lambda_{\bar{a}} = -\lambda_a, \ldots$**.

El número de amplitudes independientes es el mismo para todos los canales cruzados de una misma reacción generalizada; por ello, para determinar este número cabe considerar uno cualquiera de los canales. Así, por el mismo número de amplitudes independientes se representan la dispersión elástica y la aniquilación, $a + b \to a + b$ y $a + \bar{a} \to b + \bar{b}$. Además, las limitaciones impuestas en el primer caso por la invariancia-T son equivalentes a las que impone en el segundo caso la invariancia-C.

Analicemos aún la reacción en la que una partícula se desintegra en dos: $a \to b + c$. En el sistema del centro de masa (que es el sistema de reposo de la partícula a) se tiene $\boldsymbol{p}_b = -\boldsymbol{p}_c$. Multiplicando por $\boldsymbol{p}_b$ la igualdad $\boldsymbol{j}_a = \boldsymbol{j}_b + \boldsymbol{j}_c$, obtendremos

$$\lambda_a = \lambda_b - \lambda_c \tag{70.12}$$

(la helicidad λ_a de la partícula primaria se define por la proyección de su spin sobre la dirección del impulso de una de las partículas secundarias). Esta relación, por así decirlo, es consecuencia de una simetría adicional que posee el proceso en cuestión: la simetría axil en torno de la dirección de $\boldsymbol{p}_b$ y $\boldsymbol{p}_c$. Si el spin de la partícula primaria es $s_a < s_b + s_c$, la relación (70.12) disminuye el número de conjuntos posibles de valores y, con ello, el número de amplitudes de helicidad independientes para la desintegración. El momento cinético total J coincide en este caso con el spin de la partícula primaria s_a, de modo que es una cantidad fija.

La invariancia-P en la desintegración se expresa por la relación

---

* Una prohibición análoga puede surgir también como consecuencia de la invariancia isotópica de la interacción entre partículas no idénticas. Si se tiene en cuenta esta invariancia, están prohibidas las transiciones entre estados con simetría diferente respecto de λ_1, λ_2 en la dispersión de un neutrón por un protón.

** Dado que estas dos amplitudes se refieren a reacciones distintas, por lo que es imposible la interferencia entre ellas, el factor de fase (70.11) carecería en general de sentido y lo podemos igualar a 1. Únicamente posee significado real la igualdad entre secciones eficaces que se deduce de (70.11).

$$\langle \lambda_b \lambda_c \,|\, S^J \,|\, \lambda_a \rangle = \frac{\eta_b \eta_c}{\eta_a} (-1)^{s_a - s_b - s_c} \langle -\lambda_b, -\lambda_c \,|\, S^J \,|\, -\lambda_a \rangle \qquad (70.13)$$

[aquí se utiliza, junto con (70.4), también la ley de transformación de la función de onda de una sola partícula (16.16)].

Si la partícula primaria es realmente neutra, aparecen nuevas limitaciones si se conserva la paridad-C. Hay que distinguir aquí tres casos. Si los productos de desintegración son también realmente neutros, debe tenerse $C_a = C_b C_c$; esta condición o prohibe en absoluto la desintegración o queda satisfecha, sin conducir a nuevas limitaciones. Si las partículas b y c son del todo diferentes, la invariancia-C establece una relación entre las amplitudes de los diferentes procesos $a \to b + c$ y $a \to \bar{b} + \bar{c}$. Finalmente, para la desintegración $a \to b + \bar{b}$ nos encontramos con una limitación ligada a que, para una paridad de carga dada C y un momento cinético total dado $J = s_a$, el sistema puede encontrarse solamente o en estados simétricos respecto de la helicidad o en estados antisimétricos, según sea la paridad del número J y el signo de C.

La invariancia-CP conduce a la igualdad de las amplitudes de las desintegraciones $a \to b + c$ y $\bar{a} \to \bar{b} + \bar{c}$:

$$\langle \lambda_b \lambda_c \,|\, S^J \,|\, \lambda_a \rangle = \langle \lambda_{\bar{b}} \lambda_{\bar{c}} \,|\, S^J \,|\, \lambda_{\bar{a}} \rangle \qquad (70.14)$$

(donde $\lambda_{\bar{a}} = -\lambda_a, \ldots$), es decir, a la igualdad de las probabilidades de desintegración de las partículas y de las antipartículas. Si la partícula puede desintegrarse de diferentes modos (es decir, según canales distintos), esta igualdad vale para cada uno de los canales. Hay que subrayar, sin embargo, que este resultado presupone que se cumpla la invariancia-CP, invariancia que no es una propiedad universal de la naturaleza. Tan sólo la invariancia-CPT tiene carácter universal; esta condición de invariancia conduciría de suyo tan sólo a la igualdad

$$\langle \lambda_b \lambda_c \,|\, S^J \,|\, \lambda_a \rangle = \langle \lambda_{\bar{a}} \,|\, S^J \,|\, \lambda_{\bar{b}} \lambda_{\bar{c}} \rangle,$$

en la cual el segundo miembro se refiere al proceso inverso del de desintegración. Veremos más adelante (§ 72) que la condición de invariancia-CPT, junto con la condición de unitariedad, conduce, sin embargo, a una relación para la probabilidad de desintegración de una partícula y de una antipartícula, si bien más limitada.

PROBLEMAS

1. Mediante (70.6) obtener una clasificación de los estados posibles del sistema de dos fotones.

Solución. En este caso $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$. Para valores J pares ($J > 0$), según (70.6) son admisibles tres estados simétricos respecto de $\lambda_1 \lambda_2$:

$$\text{a) } \psi_{JM11}, \qquad \text{b) } \psi_{JM-1-1}, \qquad \text{c) } \psi_{JM1-1} + \psi_{JM-11}.$$

Para valores J impares (con $J > 1$) es admisible sólo un estado antisimétrico

$$\text{d) } \psi_{JM1-1} - \psi_{JM-11}.$$

Los estados c) y d) poseen a la vez determinada paridad ($+1$): según (70.4),

$$P\,(\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11}) = \pm\,(-1)^J\,(\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11});$$

el factor $\pm\,(-1)^J = 1$, ya que el signo superior se refiere a valores de J pares, y el inferior, a valores impares. En cambio, los estados a) y b) no poseen de suyo una paridad determinada, pero formando a partir de ellos las combinaciones

$$a')\ \psi_{JM11} + \psi_{JM-1-1}, \qquad b')\ \psi_{JM11} - \psi_{JM-1-1},$$

obtendremos estados pares e impares. Para $J = 0$ son admisibles (en virtud de la condición $|\lambda_1 - \lambda_2| \leq J$) solamente los valores $\lambda_1 = \lambda_2$, de modo que el estado c) desaparece y subsisten solamente un estado par a') y un estado impar b'). Finalmente, cuando $J = 1$ el único estado admisible para valores de J impares, el estado d), está prohibido, ya que para él $\lambda = 2 > J$. De esta manera llegamos a la tabla de estados admisibles (9.5).

2. En la aproximación no-relativista, el momento cinético total J del sistema resulta de la composición del spin S y del momento cinético orbital L. Para un sistema de dos partículas, hallar la relación entre los estados $|JLSM>$ y $|JM\lambda_1\lambda_2>$.

Solución. Según la regla de formación de las funciones de onda en la composición de momentos cinéticos, se tiene

$$\psi_{JLSM} = \sum \{\psi_{s_1\sigma_1}\psi_{s_2\sigma_2} C^{SM_S}_{\sigma_1\sigma_2}\}\,\psi_{LM_L} C^{JM}_{M_L M_S}. \tag{1}$$

Las $\psi_{s\sigma}$ son aquí funciones propias del spin s con proyección σ (sobre un eje fijo z), y ψ_{LM_L}, las funciones correspondientes al momento cinético orbital L con proyección M_L; la expresión entre paréntesis corresponde a la composición de s_1 y s_2 para formar S, hecho lo cual S se compone con L para dar lugar a J; la suma se extiende a todos los índices-m. Expresemos todas las funciones en la representación de impulsos como funciones de la dirección $\boldsymbol{n}$ (del impulso $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}_1$), expresando las funciones $\psi_{s\sigma}$ como combinación de funciones de estados de helicidad $\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}$ mediante (a, 1):

$$\psi_{s_1\sigma_1} = \sum_{\lambda_1} D^{(s_1)}_{\lambda_1\sigma_1}(\boldsymbol{n})\psi_{\boldsymbol{n}\lambda_1},$$
$$\psi_{s_2\sigma_2} = \sum_{\lambda_2} D^{(s_2)}_{-\lambda_2\sigma_2}(\boldsymbol{n})\psi_{\boldsymbol{n},-\lambda_2}.$$

Para la función ψ_{LM_L}, en cambio, tenemos

$$\psi_{LM_L} = Y_{LM_L}(\boldsymbol{n}) = i^L \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\, D^{(L)}_{0M_l}(\boldsymbol{n})$$

[se han utilizado (a, 18) y la definición (16.5)]. Substituyendo estas funciones en (1) y aplicando dos veces el desarrollo (b, 1), como también la propiedad de ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordan III (106.13), se obtiene en definitiva ψ_{JLSM} en forma de desarrollo

$$\psi_{JLSM} = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \langle JM\lambda_1\lambda_2 \mid JLSM\rangle, \tag{2}$$

donde

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \psi_{\boldsymbol{n}\lambda_1}\psi_{\boldsymbol{n},-\lambda_2} D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}, \quad \Lambda = \lambda_1 - \lambda_2,$$

con los coeficientes dados por

$$\langle JM\lambda_1\lambda_2 \mid JLSM\rangle = \\ = (-i)^L\,(-1)^{s_1 - s_2 + S}\sqrt{(2L+1)\,(2S+1)} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & S & J \\ 0 & \Lambda & -\Lambda \end{pmatrix}. \tag{3}$$

En virtud del carácter unitario de la transformación (2) se tiene

$$\langle JLSM \mid JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \langle JM\lambda_1\lambda_2 \mid JLSM\rangle^*.$$

3. Determinar el número de amplitudes parciales independientes para los siguientes procesos de dispersión: a) $\pi + N \to \pi + N$, b) $\gamma + \pi \to \gamma + \pi$, c) $\gamma + N \to \gamma + N$, d) $e + N \to e + N$, e) $\nu + e \to \nu + e$, f) $p + \gamma \to n + \pi^+$, g) $N + N \to N + N^*$.

Solución. a), b). El número total de elementos de la matriz S^J (es decir, el número de conjuntos diferentes de números $\lambda_1\lambda_2\lambda'_1\lambda'_2$) es $N = 4$. Teniendo en cuenta la invariancia-P, el número de elementos independientes se reduce a $N_P = 2$; si se tiene en cuenta la invariancia-T, dicho número se reduce a $N_T = 3$ y si se tienen en cuenta una y otra, a $N_{PT} = 2$.

c), d) $N = 16$, $N_P = 8$, $N_T = 10$, $N_{PT} = 6$.

e) $N = 4$, $N_T = 3$.

f) $N = 8$, $N_P = 4$.

g) Para efectuar la cuenta conviene partir de las combinaciones lineales de estados de helicidad:

$$\psi_{1g} = \psi_{++} + \psi_{--}, \quad \psi_{2g} = \psi_{++} - \psi_{--}, \quad \psi_{3g} = \psi_{+-} + \psi_{-+}, \quad \psi_u = \psi_{+-} - \psi_{-+},$$

donde los índices $\pm$ indican los signos de las helicidades ($\pm 1/2$) de las dos partículas. Los estados $1g$, $2g$, $3g$ son pares, y el estado u es impar respecto de la permutación de las partículas. En consecuencia, las transiciones $g \leftrightarrow u$ están prohibidas, de modo que, teniendo en cuenta la simetría de permutación, queda $N = 16 - 6 = 10$. Respecto de la inversión-P las funciones ψ_{1g}, ψ_{3g} y ψ_{2g}, ψ_u tienen paridades opuestas [$(-1)^{J+1}$ y $(-1)^J$, respectivamente]; la prohibición de las transiciones entre ellas reduce el número de amplitudes independientes a $N_P = 6$. Finalmente, la invariancia-T hace que coincidan las amplitudes $1g \to 3g$, $3g \to 1g$, de modo que $N_{PT} = 5$.

§ 71. Amplitudes invariantes

En las amplitudes de helicidad se utiliza un determinado sistema de referencia —el sistema del centro de masa—. En cambio, en el cálculo de las amplitudes de dispersión fundado en la teoría invariante de perturbaciones (y también para investigar sus propiedades analíticas generales) conviene escribir las amplitudes en forma explícitamente invariante.

Si las partículas que intervienen en la reacción carecen de spin, la amplitud de dispersión depende tan sólo de los productos invariantes de los 4-impulsos de las partículas. Para una reacción de la forma

$$a + b \to c + d \tag{71.1}$$

se puede elegir para tales invariantes dos cualesquiera de las magnitudes s, t, u, definidas en el § 67. Entonces, la amplitud de dispersión se reduce a una única función $M_{fi} = f(s, t)$.

Pero si las partículas poseen spin, junto con los invariantes cinemáticos s, t, u, tenemos también los invariantes que se pueden construir mediante las amplitudes de onda de las partículas (bispinores, 4-tensores, etc.). Las amplitudes de dispersión deben entonces tener la forma

---

* En estos ejemplos importan tan sólo, claro está, los spins de las partículas y la simetría de su interacción mutua.

$$M_{fi} = \sum_n f_n(s,\ t)\, F_n, \tag{71.2}$$

donde F_n son invariantes que dependen linealmente de las amplitudes de onda de todas las partículas que intervienen en la reacción (y también de sus 4-impulsos). Los coeficientes $f_n(s, t)$ se llaman *amplitudes invariantes.*

Eligiendo las amplitudes de onda de modo que correspondan a partículas con helicidades determinadas, obtendremos valores determinados de los invariantes $F_n = F_n(\lambda_i, \lambda_f)$. Las amplitudes de helicidad de la dispersión aparecen entonces en forma de combinaciones lineales homogéneas de las amplitudes invariantes f_n. Es evidente por ello que el número de funciones independientes $f_n(s, t)$ coincide con el número de amplitudes de helicidad independientes. Dado que es fácil determinar el número de éstas (conforme se explicó en el § 70), al mismo tiempo se simplifica con ello el problema de construir los invariantes F_n: sabemos a priori cuántos de ellos debe haber.

Consideremos algunos ejemplos. En todos supondremos que la interacción es invariante-T e invariante-P; esta última propiedad significa que los invariantes F_n deben ser escalares en sentido estricto (y no pseudoescalares).

1) Dispersión de una partícula de spin 0 por una partícula de spin 1/2. El número de invariantes es igual a 2 (véase el problema 3, § 70). Como a tales cabe elegir

$$F_1 = \bar{u}'u, \quad F_2 = \bar{u}'\hat{K}u, \tag{71.3}$$

donde $u = u(p)$, $u' = u(p')$ son amplitudes bispinoriales del fermión inicial y final; $K = k + k'$, donde k y k' son los 4-impulsos de los bosones inicial y final*.

La invariancia-T de las magnitudes (71.3) puede comprobarse fácilmente de modo inmediato. La inversión del tiempo permuta los estados inicial y final y substituye las amplitudes $u(p)$ por las « inversas respecto del tiempo »:

$$u^T = U_T\bar{u}, \quad \bar{u}^T = -U_T^{\dagger}u$$

[véase (28.5)]. Por ello,

$$\bar{u}'u \to \bar{u}^T u'^T = -(U_T^{\dagger}u)(U_T\bar{u}') = -\bar{u}'\tilde{U}_T U_T^{\dagger}u = \bar{u}'U_T U_T^{\dagger}u = \bar{u}'u,$$

con lo que queda demostrada la invariancia-T de F_1. De manera análoga, tenemos

$$\bar{u}'\gamma^{\mu}u \to \bar{u}^T\gamma^{\mu}u'^T = -(U_T^{\dagger}u)\,\gamma^{\mu}\,(U_T\bar{u}') = \bar{u}'U_T\tilde{\gamma}^{\mu}U_T^{\dagger}u,$$

o teniendo en cuenta (26.12) **

---

* A primera vista podría formarse todavía un invariante del tipo

$$\bar{u}'\sigma_{\mu\nu}k^{\mu}k'^{\nu}u.$$

Sin embargo, es fácil comprobar que éste se reduce a los invariantes (71.3) si se tiene en cuenta la ley de conservación $k' = p + k - p'$ y las ecuaciones $\hat{p}u = mu$, $\bar{u}'\hat{p}' = m\bar{u}'$, a que satisfacen las amplitudes bispinoriales.

** Estas leyes de transformación se siguen también, naturalmente, del comportamiento, puesto de manifiesto en el § 28, en la inversión del tiempo de los operadores $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$, cuyos elementos de matriz son precisamente los productos $\bar{u}'u$, $\bar{u}'\gamma^{\mu}u$.

$$\bar{u}'\gamma^0 u \to \bar{u}'\gamma^0 u, \quad \bar{u}'\boldsymbol{\gamma} u \to -\bar{u}'\boldsymbol{\gamma} u.$$

De la misma manera se transforman los 4-impulsos: $(K^0, \boldsymbol{K}) \to (K^0, -\boldsymbol{K})$, y el producto escalar $F_2 = K_\mu(\bar{u}'\gamma^\mu u)$, por consiguiente, es invariante.

2) Dispersión elástica de dos partículas idénticas de spin 1/2. Existen 5 invariantes independientes, para los cuales cabe elegir

$$\begin{gathered} F_1 = (\bar{u}_1' u_1)(\bar{u}_2' u_2), \quad F_2 = (\bar{u}_1'\gamma^5 u_1)(\bar{u}_2'\gamma^5 u_2), \\ F_3 = (\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2), \quad F_4 = (\bar{u}_1'\gamma^\mu\gamma^5 u_1)(\bar{u}_2'\gamma_\mu\gamma^5 u_2), \\ F_5 = (\bar{u}_1'\sigma^{\mu\nu} u_1')(\bar{u}_2'\sigma_{\mu\nu} u_2), \end{gathered} \tag{71.4}$$

donde u_1, u_2 son las amplitudes bispinoriales de las partículas iniciales, y u'_1, u'_2, las de las finales. La permutación de las partículas iniciales (o de las finales) no conduce a nuevos invariantes: los nuevos invariantes se expresan en función de los antiguos (problema 1, § 28). Pero la expresión (71.2), con F_n dada por (71.4), no tiene en cuenta de manera explícita la condición que exige que la permutación de dos fermiones idénticos debe cambiar el signo de la amplitud de dispersión. Es posible escribir la expresión correspondiente que satisface a esta condición en la forma

$$M_{fi} = [(\bar{u}_1' u_1)(\bar{u}_2' u_2) f_1(t, u) - (\bar{u}_2' u_1)(\bar{u}_1' u_2) f_1(u, t)] + \ldots \tag{71.5}$$

Al permutar p'_1 y p'_2 (o p_1 y p_2) los invariantes cinemáticos se transforman de acuerdo con: $s \to s$, $t \to u$, $u \to t$, de modo que la condición antes indicada se cumple automáticamente.

Consideremos aún dos ejemplos más: la dispersión elástica de un fotón por partículas de spin 0 ó 1/2. Es lógico expresar la amplitud de este proceso mediante los 4-vectores unitarios espaciales $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ que satisfacen las condiciones

$$\begin{gathered} e^{(1)2} = e^{(2)2} = -1, \qquad e^{(1)}e^{(2)} = 0, \\ e^{(1)}k = e^{(2)}k = 0, \quad e^{(1)}k' = e^{(2)}k' = 0 \end{gathered} \tag{71.6}$$

(para cada uno de los dos fotones, el papel de estos 4-vectores pueden representarlo los 4-versores que permitieron conseguir la representación invariante de las propiedades de polarización de aquéllos — véase § 8).

Sean k y k' los 4-impulsos del fotón inicial y final y p y p' los correspondientes a la partícula dispersada. Consideremos los 4-vectores

$$\begin{gathered} P^\lambda = p^\lambda + p'^\lambda - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2}, \\ N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho, \end{gathered} \tag{71.7}$$

donde

$$K = k + k', \quad q = p - p' = k' - k.$$

Es evidente que son ortogonales entre sí. También son ortogonales a los 4-vectores K y q y, por consiguiente, a k, k'. Por ser ortogonales al 4-vector temporal K ($K^2 = 2kk' > 0$), son del tipo espacial (en efecto, en el sistema de referencia en el cual $\boldsymbol{K} = 0$, de $KP = 0$ se sigue que $P_0 = 0$ y, por lo tanto, que $P^2 < 0$). Norma-

lizando P y N, es decir, formando los vectores

$$e^{(1)\lambda} = \frac{N^\lambda}{\sqrt{-N^2}}, \qquad e^{(2)\lambda} = \frac{P^\lambda}{\sqrt{-P^2}}, \tag{71.8}$$

obtenemos un par de 4-vectores que poseen todas las propiedades exigidas. Obsérvese que $e^{(2)}$ es un vector en sentido estricto, y $e^{(1)}$ un pseudovector.

Representaremos la amplitud de dispersión del fotón en la forma

$$M_{fi} = F^{\lambda\mu} e'^*_\lambda e_\mu, \tag{71.9}$$

separando en ella los 4-vectores polarización e y e' de los fotones inicial y final.

3) Dispersión de un fotón por una partícula de spin 0. El tensor $F^{\lambda\mu}$ de (71.9) ha de construirse exclusivamente a partir de los 4-impulsos de las partículas. Es posible representarlo en la forma

$$F^{\lambda\mu} = f_1 e^{(1)\lambda} e^{(1)\mu} + f_2 e^{(2)\lambda} e^{(2)\mu}, \tag{71.10}$$

donde f_1, f_2 son amplitudes invariantes, cuyo número, en el presente caso, es igual a 2. Hay que prestar atención al hecho de que es imposible que en $F^{\lambda\mu}$ aparezca un término con el producto $e^{(1)\lambda} e^{(2)\mu}$, ya que este producto es un pseudotensor y al substituirlo en (71.9) daría lugar a un pseudoescalar.

4) Dispersión de un fotón por una partícula de spin 1/2. Representemos el tensor $F_{\lambda\mu}$ en la forma

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu} = {} & G_0 (e^{(1)}_\lambda e^{(1)}_\mu + e^{(2)}_\lambda e^{(2)}_\mu) + G_1 (e^{(1)}_\lambda e^{(2)}_\mu + e^{(2)}_\lambda e^{(1)}_\mu) + \\ & + G_2 (e^{(1)}_\lambda e^{(2)}_\mu - e^{(2)}_\lambda e^{(1)}_\mu) + G_3 (e^{(1)}_\lambda e^{(1)}_\mu - e^{(2)}_\lambda e^{(2)}_\mu), \end{aligned} \tag{71.11}$$

donde G_0, G_3 son escalares, y G_1, G_2, pseudoescalares. Tanto unos como otros son bilineales respecto de las amplitudes bispinoriales de los fermiones $\bar{u}(p')$ y $u(p)$, es decir, tienen la forma

$$G_n = \bar{u}(p') Q_n u(p). \tag{71.12}$$

La forma general de las matrices (respecto de los índices bispinoriales) Q_n es:

$$\begin{aligned} Q_0 &= f_1 + f_2 \hat{K}, \qquad Q_1 = \gamma^5 (f_3 + f_4 \hat{K}), \\ Q_2 &= \gamma^5 (f_5 + f_6 \hat{K}), \qquad Q_3 = f_7 + f_8 \hat{K}, \end{aligned} \tag{71.13}$$

donde $K = k + k'$. Los coeficientes $f_1, \ldots, f_8$ son amplitudes invariantes, cuyo número resulta ser aquí igual a 8 (en vez del número necesario de 6) debido a que todavía no se ha tenido en cuenta la condición de invariancia-T.

La inversión del tiempo permuta los 4-impulsos de las partículas iniciales y finales, cambiando también los signos de sus componentes espaciales:

$$(k_0, \boldsymbol{k}) \leftrightarrow (k'_0, -\boldsymbol{k}'), \qquad (p_0, \boldsymbol{p}) \leftrightarrow (p'_0, -\boldsymbol{p}'). \tag{71.14}$$

Los 4-vectores polarización de los fotones se transforman según la ley

$$(e_0,\ e) \leftrightarrow (e_0'^*,\ -e'^*) \tag{71.15}$$

[cf. (8, 11a)], de modo que

$$(e_0'^* e_0,\ e_i'^* e_0,\ e_i'^* e_k) \rightarrow (e_0'^* e_0,\ -e_0'^* e_i,\ e_k'^* e_i).$$

En virtud de esta última transformación, la condición de invariancia de la amplitud de dispersión (71.9) equivale a exigir que

$$(F_{00},\ F_{i0},\ F_{ik}) \rightarrow (F_{00},\ -F_{0i},\ F_{ki}).$$

Por otra parte, como consecuencia de las substituciones (71.14) tenemos

$$(K_0,\ \boldsymbol{K}) \rightarrow (K_0,\ -\boldsymbol{K}), \qquad (q_0,\ \boldsymbol{q}) \rightarrow (-q_0,\ \boldsymbol{q}),$$
$$(P_0,\ \boldsymbol{P}) \rightarrow (P_0,\ -\boldsymbol{P}), \qquad (N_0,\ \boldsymbol{N}) \rightarrow (N_0,\ -\boldsymbol{N}),$$

de modo que

$$(e_0^{(1,2)},\ \boldsymbol{e}^{(1,2)}) \rightarrow (e_0^{(1,2)},\ -\boldsymbol{e}^{(1,2)}). \tag{71.16}$$

De la expresión (71.11) se sigue, por lo tanto, que debe ser

$$G_{0,1,3} \rightarrow G_{0,1,3}, \qquad G_2 \rightarrow -G_2.$$

Vimos antes que en la inversión del tiempo se tiene

$$\bar{u}'u \rightarrow \bar{u}'u, \qquad \bar{u}'\hat{K}u \rightarrow \bar{u}'\hat{K}u. \tag{71.17}$$

De manera análoga se puede hallar que

$$\bar{u}'\gamma^5 u \rightarrow -\bar{u}'\gamma^5 u, \qquad \bar{u}'\gamma^5\hat{K}u \rightarrow \bar{u}'\gamma^5\hat{K}u. \tag{71.18}$$

De las expresiones (71.12-13) se sigue ahora claramente que, en virtud de la invariancia-T de la amplitud de dispersión, ha de ser

$$f_3 = f_6 = 0. \tag{71.19}$$

§ 72. La condición de unitariedad

La matriz de dispersión debe ser unitaria: $SS^+ = 1$, o bien en elementos de matriz

$$(SS^+)_{fi} = \sum_n S_{fn} S_{in}^* = \delta_{fi}, \tag{72.1}$$

donde el índice n numera todos los estados intermedios posibles *. Es ésta la propiedad más general de la matriz-S, propiedad que permite garantizar la conservación de la ortogonalidad y la normalización de los estados en una reacción (cf. III, § 124, 141). En particular, los elementos diagonales de la igualdad (72.1) expresan

* El significado concreto del símbolo δ_{fi} en (72.1) depende, naturalmente, de cuál sea la elección particular de números cuánticos y de la normalización de las funciones de onda del sistema. Hay que definirlo de manera que sea: $\sum_f \delta_{fi} = 1$.

simplemente el hecho de que la suma de las probabilidades de la transición del estado inicial dado a un estado final arbitrario es igual a la unidad:

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1.$$

Substituyendo en (72.1) los elementos de matriz dados por (65.2), se obtendrá *

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n)\, T_{fn} T^*_{in} \tag{72.2}$$

Conviene observar que el primer miembro de esta igualdad es lineal en los elementos de matriz de T, y el segundo miembro, cuadrático. Si la interacción (como, por ejemplo, la electromagnética) contiene un pequeño parámetro, el primer miembro será, por ello, de primer orden de pequeñez, y el segundo miembro, de segundo orden. Por consiguiente, en primera aproximación cabe prescindir de este último, con lo cual

$$T_{fi} = T^*_{if}, \tag{72.3}$$

es decir, la matriz T es hermítica.

Para dar a la condición de unitariedad (72.2) un aspecto más concreto hay que precisar qué se entiende exactamente por suma respecto de n. Hagámoslo para el caso de la colisión de dos partículas suponiendo, además, que las leyes de conservación permiten solamente la dispersión elástica; entonces también todos los estados intermedios en (72.2) serán estados de « dos partículas ». La suma respecto de dichos estados significa la integración con relación a los impulsos intermedios $\boldsymbol{p}''_1$, $\boldsymbol{p}''_2$ y la suma para los números cuánticos espinoriales (por ejemplo, las helicidades) de ambas partículas, que representaremos por λ'':

$$\sum_n = \int \frac{V^2\, d^3p''_1\, d^3p''_2}{(2\pi)^6} \sum_{\lambda''}.$$

Eliminando las funciones-δ de la misma manera como se hizo en el § 65, obtendremos la condición de unitariedad « para dos partículas » en la forma

$$T_{fi} - T^*_{if} = \frac{iV^2}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon} \int T_{fn} T^*_{in} \varepsilon''_1 \varepsilon''_2\, do'',$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el impulso y ε es la energía total en el sistema del centro de masa. El volumen de normalización desaparece de esta relación después de pasar de las amplitudes T_{fi} a las amplitudes M_{fi} de acuerdo con (65.10):

---

* Si se escribe la condición de unitariedad en la forma $S^+S = 1$ (con los factores S^+ y S en el otro orden) (72.2), se presenta en la forma equivalente

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n)\, T^*_{nf}\, T_{ni}. \tag{72.2a}$$

$$M_{fi} - M_{if}^{*} = \frac{i}{(4\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|p|}{\varepsilon} \int M_{fn} M_{in}^{*} \, do'' \tag{72.4}$$

Definiremos la amplitud de dispersión elástica de manera que sea

$$d\sigma = |\langle n'\lambda' | f | n\lambda \rangle|^2 \, do' \tag{72.5}$$

($\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ son las direcciones de los impulsos inicial y final; λ, λ', los números cuánticos espinoriales iniciales y finales) La comparación con (65.19) prueba que

$$\langle n'\lambda' | f | n\lambda \rangle = \frac{1}{8\pi\varepsilon} M_{fi}, \tag{72.6}$$

y la condición de unitariedad (72.4) toma la forma

$$\langle n'\lambda' | f | n\lambda \rangle - \langle n\lambda | f | n'\lambda' \rangle^{*} = \\ = \frac{i|p|}{2\pi} \sum_{\lambda''} \int \langle n'\lambda' | f | n''\lambda'' \rangle \langle n\lambda | f | n''\lambda'' \rangle^{*} \, do'', \tag{72.7}$$

que generaliza la conocida fórmula de la teoría no-relativista III (124.8).

Se llama amplitud de dispersión elástica a ángulo cero el elemento de matriz diagonal T_{ii} en el que el estado final de la partícula coincide con el inicial*. Para esta amplitud la condición de unitariedad (72.2) toma la forma

$$2 \operatorname{Im} T_{ii} = (2\pi)^4 \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n). \tag{72.8}$$

El segundo miembro de esta igualdad difiere únicamente en un factor de la sección eficaz total de todos los procesos posibles de dispersión que parten del estado inicial dado i; designemos esta sección eficaz por σ_t. En efecto, sumando la probabilidad (65.5) respecto de los estados f y dividiendo por la densidad de flujo j, se encuentra

$$\sigma_t = \frac{(2\pi)^4 V}{j} \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n),$$

de modo que

$$\frac{2V}{j} \operatorname{Im} T_{ii} = \sigma_t.$$

El volumen de normalización desaparece de aquí después de hacer

$$T_{ii} = M_{ii}/(2\varepsilon_1 V \cdot 2\varepsilon_2 V)$$

(ε_1, ε_2 son las energías de las partículas en el sistema del centro de masa), y substituyendo la expresión (65.17) de j se obtiene:

$$\operatorname{Im} M_{ii} = 2|p|\varepsilon\sigma_t. \tag{72.9}$$

Esta fórmula expresa el contenido del llamado *teorema óptico*. Si se introduce la amplitud de dispersión elástica (72.6), adopta su forma ordinaria

---

* Hay que subrayar que se trata precisamente de los elementos de la matriz T, y no de la S, es decir, los elementos de matriz se toman después de restar de S la matriz unidad.

$$\operatorname{Im}\langle \boldsymbol{n}\lambda \,|\, f \,|\, \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \frac{|\boldsymbol{p}|}{4\pi}\sigma_t \tag{72.10}$$

[cf. III (139.10)].

Si la matriz S se da en la representación de momentos cinéticos (amplitudes parciales) y se tiene en cuenta que es diagonal respecto de J, la condición de unitariedad se escribe para cada valor de J por separado.

Así, si sólo es posible la dispersión elástica, la condición de unitariedad tiene la forma

$$\sum_{\lambda''} \langle \lambda' \,|\, S^J \,|\, \lambda''\rangle \langle \lambda \,|\, S^J \,|\, \lambda''\rangle^* = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{72.11}$$

En virtud de la invariancia-T, la matriz de dispersión elástica es simétrica [cf. (70.10)] y, en consecuencia, se puede reducir a la forma diagonal. Efectuada esta reducción, la condición de unitariedad exige que los elementos diagonales sean iguales a la unidad en módulo; en tal caso, se suele escribirlos en la forma

$$S^J_n = \exp(2i\delta_{Jn}), \tag{72.12}$$

donde los δ_{Jn} — que son constantes reales — dependen de la energía (el subíndice n numera los elementos diagonales para el valor dado de J). En el caso general, cuando el número N de amplitudes independientes supera a la característica de la matriz (cuadrada) S^J, los coeficientes de la transformación que permite reducir S^J a la forma diagonal dependen de J y de E (en estos coeficientes, junto con los valores principales de la matriz, se incluyen entonces cantidades independientes equivalentes a las N cantidades de partida). Pero si el número N coincide con la característica de la matriz S^J (y, por ello, con el número de sus valores principales), los coeficientes de la diagonalización son universales. En tal caso, los estados que permite la diagonalización son estados con paridades determinadas (pero, claro está, sin poseer ya helicidades determinadas).

La condición (72.11), expresada mediante las amplitudes parciales $\langle \lambda' | f^J | \lambda,\rangle$ tiene la forma

$$\langle \lambda' \,|\, f^J \,|\, \lambda\rangle - \langle \lambda \,|\, f^J \,|\, \lambda'\rangle^* = 2i\,|\boldsymbol{p}| \sum_{\lambda''} \langle \lambda' \,|\, f^J \,|\, \lambda''\rangle \langle \lambda \,|\, f^J \,|\, \lambda''\rangle^*, \tag{72.13}$$

lo que es fácil comprobar substituyendo en (72.7) el desarrollo (69.13) y teniendo en cuenta el carácter ortogonal de las funciones D. Si se cumple la invariancia-T, la matriz $\langle \lambda' | f^J | \lambda\rangle$ es simétrica y (72.13) toma la forma

$$\operatorname{Im}\langle \lambda' \,|\, f^J \,|\, \lambda\rangle = |\boldsymbol{p}|\,\langle \lambda' \,|\, \mathrm{f}^J \mathrm{f}^{J+} \,|\, \lambda\rangle. \tag{72.14}$$

Si la matriz se ha diagonalizado, sus elementos diagonales son

$$f^J_n = \frac{1}{2i\,|\boldsymbol{p}|}(e^{2i\delta_{Jn}} - 1) = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|} e^{i\delta_{Jn}} \operatorname{sen} \delta_{Jn}. \tag{72.15}$$

Finalmente, señalemos algunas consecuencias que se siguen de la condición de

unitariedad junto con la condición de que se cumpla la invariancia-*CPT*. En virtud de esta última

$$T_{fi} = T_{\bar{i}\bar{f}}, \tag{72.16}$$

donde $\bar{i}$ y $\bar{f}$ son estados que difieren de i y f en la substitución de todas las partículas por antipartículas (y también en el cambio de signo de los vectores momento cinético manteniendo invariables los impulsos). En particular, para los elementos diagonales se tiene

$$T_{ii} = T_{\bar{i}\bar{i}}.$$

De (72.8) o de (72.9) se sigue por ello que la sección eficaz total de todos los procesos posibles (con estado inicial dado) es la misma para las reacciones entre partículas y antipartículas.

En particular, son iguales las probabilidades totales de desintegración (es decir, el tiempo de vida) de las partículas y antipartículas. Estos resultados (junto con la igualdad de las masas de unas y de otras — § 11) constituyen las más importantes consecuencias de la invariancia-*CPT* de las interacciones. Recordaremos (véase el final del § 70) que poder afirmar lo mismo para cada uno de los posibles canales de desintegración por separado exigiría que se cumpliera también la invariancia-*CP*.

PROBLEMA

Partiendo de la condición de unitariedad, hallar la relación que existe entre las fases de las amplitudes parciales de la fotoproducción de piones en nucleones ($\gamma + N \to \pi + N$) y de la dispersión elástica de piones por nucleones ($\pi + N \to \pi + N$); además, se tiene en cuenta que la dispersión-πN está ligada con las interacciones fuertes, y que la fotoproducción y la dispersión-γN dependen de la interacción electromagnética.

Solución. Designemos las amplitudes parciales como sigue:

$$\langle \pi N \mid S \mid \gamma N \rangle = S_{\pi\gamma}, \quad \langle \gamma N \mid S \mid \gamma N \rangle = S_{\gamma\gamma}, \quad \langle \pi N \mid S \mid \pi N \rangle = S_{\pi\pi}$$

(se ha prescindido de los índices J y de las helicidades). La fotoproducción es un proceso de primer orden respecto de la carga e, y la dispersión-γN, un proceso de segundo orden; en consecuencia, $S_{\pi\gamma} \sim e$, $S_{\gamma\gamma} - 1 \sim e^2$. En cambio, la amplitud $S_{\pi\pi}$ no contiene ningún elemento pequeño. Limitando la aproximación a los términos $\sim e$, las condiciones (72.1) darán

$$S_{\pi\gamma} S^*_{\gamma\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\gamma\pi} \approx S_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\gamma\pi} = 0, \tag{1}$$

$$S_{\pi\gamma} S^*_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\pi\pi} \approx S_{\pi\pi} S^*_{\pi\pi} = 1 \tag{2}$$

[en el segundo miembro de la igualdad (2) hay que interpretar 1 como matriz unidad respecto de las variables de spin]. En virtud de la invariancia-T la matriz $S_{\pi\pi}$ es simétrica, y $S_{\gamma\pi} = S_{\pi\gamma}$. Eligiremos la matriz $S_{\pi\pi}$ en forma diagonal, es decir, con relación a estados del pión de paridades determinadas: de (2) se sigue entonces que los elementos diagonales tienen la forma $e^{2i\delta_\pi}$ con diferentes constantes δ_π. Hecho esto, a partir de (1) encontramos para cada uno de los elementos de la matriz $S_{\pi\gamma}$:

$$\frac{S_{\pi\gamma}}{S^*_{\pi\gamma}} = -e^{2i\delta_\pi},$$

de donde

$$S_{\pi\gamma} = \pm \mid S_{\pi\gamma} \mid ie^{i\delta_\pi}.$$

De esta manera, la fase de la amplitud parcial de fotoproducción (en un estado con paridad dada) se determina por la fase de la dispersión-πN elástica.

CAPÍTULO 8

TEORÍA INVARIANTE DE PERTURBACIONES

§ 73. Producto cronológico

Las probabilidades de los diferentes procesos en las colisiones entre partículas, cuya interacción mutua se puede considerar pequeña, se calculan mediante la teoría de perturbaciones. En su forma ordinaria (para la mecánica cuántica no-relativista) el formalismo de esta teoría tiene, sin embargo, el inconveniente de que en él no aparecen de manera explícita las condiciones que impone la invariancia relativista. Si bien al aplicar este formalismo a los problemas relativistas el resultado final cumplirá también dichas condiciones, con todo la forma no-invariante de las fórmulas intermedias complica mucho los cálculos. El presente capítulo se dedica al desarrollo de una teoría de perturbaciones relativista coherente libre del inconveniente aquél. Esta teoría fue construida por R. P. Feynman, 1948-1949.

Con vistas a la descripción de un sistema en el formalismo de la segunda cuantificación, designaremos por Φ su función de onda en el « espacio » de los números de ocupación de los diferentes estados de las partículas libres. El hamiltoniano del sistema es $H = H_0 + V$, donde V es el operador de interacción. Sean Φ_n las funciones propias del hamiltoniano no perturbado; cada una de ellas corresponde a determinados valores de todos los números de ocupación. Una función arbitraria Φ se representa en forma de desarrollo $\Phi = \Sigma C_n \Phi_n$. Entonces, la ecuación de onda exacta

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (H_0 + V) \Phi \tag{73.1}$$

adopta la forma de un sistema de ecuaciones para los coeficientes C_n:

$$i\dot{C}_n = \sum_m V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t} C_m , \tag{73.2}$$

donde V_{nm} son los elementos de matriz, independientes del tiempo, del operador V, y E_n, los niveles de energía del sistema no perturbado (cf. III, § 40).

Por su propia definición, el operador V no depende explícitamente del tiempo. En cuanto a las magnitudes

$$V_{nm}(t) = V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t} \tag{73.3}$$

cabe considerarlas como elementos de matriz del operador

$$\mathrm{V}(t) = e^{i\mathrm{H}_0 t} \mathrm{V} e^{-i\mathrm{H}_0 t}. \tag{73.4}$$

que sí depende del tiempo. De éste suele decirse que es el operador en la *representación de interacción* (para distinguirlo del operador de partida de Schrödinger, independiente del tiempo V*). Designando ahora por la misma letra Φ que antes la función de onda en esta nueva representación, escribiremos las ecuaciones (73.2) en la forma simbólica

$$i\dot{\Phi} = \mathrm{V}(t)\,\Phi. \tag{73.5}$$

Todas las variaciones de la función de onda en esta representación se deben exclusivamente a la influencia de la perturbación, es decir, corresponden a procesos que tienen lugar gracias a la interacción de las partículas.

Si $\Phi(t)$ y $\Phi(t + \delta t)$ son los valores de Φ en dos instantes infinitamente próximos, en virtud de (73.5) dichos valores están ligados entre sí por

$$\Phi(t + \delta t) = [1 - i\delta t \cdot \mathrm{V}(t)]\,\Phi(t) = e^{-i\delta t \cdot \mathrm{V}(t)}\,\Phi(t).$$

Según esto, el valor Φ en un instante arbitrario t_f puede expresarse en función del valor en un instante inicial $t_i (t_f > t_i)$ mediante la igualdad

$$\Phi(t_f) = \Big(\prod_i^f e^{-i\delta t_\alpha \mathrm{V}(t_\alpha)}\Big)\Phi(t_i), \tag{73.6}$$

donde el signo Π significa el límite del producto para todos los intervalos infinitamente pequeños δt_α entre t_i y t_f. Si $V(t)$ fuese una función ordinaria, este límite se reduciría simplemente a

$$\exp\Big(-i\int_{t_i}^{t_f} V(t)\,dt\Big).$$

Pero esta reducción se basa en la conmutabilidad de los factores tomados en los diferentes instantes, conmutabilidad que se presupone al pasar del producto (73.6) a la suma de los exponentes. Para el operador $\mathrm{V}(t)$ no vale tal conmutabilidad y es imposible la reducción a una integral ordinaria.

---

* Subrayaremos que en la definición (73.4) figura el hamiltoniano no perturbado H_0. En esto difiere aquélla de la llamada *representación de Heisenberg* de los operadores, en la cual

$$\mathrm{V}^H(t) = e^{i\mathrm{H}t} \mathrm{V} e^{-i\mathrm{H}t}$$

(véase III, § 13).

Escribamos (73.6) en la forma simbólica

$$\Phi(t_f) = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{V}(t)\,dt\right\}\Phi(t_i), \tag{73.7}$$

donde T es el *operador cronológico**, que caracteriza un determinado orden de sucesión (el cronológico) de los instantes en los sucesivos factores del producto (73.6). En particular, haciendo $t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$ tenemos

$$\Phi(+\infty) = \mathrm{S}\Phi(-\infty), \tag{73.8}$$

donde

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{V}(t)\,dt\right\}. \tag{73.9}$$

El significado de los símbolos (73.7-9) para la solución formalmente exacta de la ecuación de onda consiste en que tal notación permite escribir fácilmente una serie que representa el desarrollo en serie de potencias de la perturbación:

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_k \cdot \mathrm{T}\{\mathrm{V}(t_1)\,\mathrm{V}(t_2)\ldots\mathrm{V}(t_k)\}. \tag{73.10}$$

Aquí, en cada término la potencia k-ésima de la integral se escribe en forma de integral múltiple de orden k y el operador T significa que en cada dominio de valores de las variables $t_1, t_2, \ldots, t_k$ hay que disponer los correspondientes operadores en orden cronológico: de derecha a izquierda en orden de valores crecientes de t**.

Por la definición (73.8) es claro que si antes de la colisión el sistema se encontraba en un estado Φ_i (un cierto conjunto de partículas libres), la amplitud de probabilidad de su paso al estado Φ_f (otro conjunto de partículas libres) es el elemento de matriz S_{fi}. En otras palabras, estos elementos precisamente constituyen la matriz-S.

El operador de interacción electromagnética se escribió ya en el § 43:

$$\mathrm{V} = e\int (\mathrm{jA})\,d^3x. \tag{73.11}$$

Substituyéndolo en (73.9), obtendremos

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}\exp\{-ie\int (\mathrm{jA})\,d^4x\}. \tag{73.12}$$

El hecho de que el operador (73.12) sea relativísticamente invariante es esencial. Que sí lo es se ve teniendo en cuenta el carácter escalar del integrando (jA), el carácter invariante de la integración respecto de d^4x y la invariancia de la operación de ordenación cronológica. Esta última circunstancia, sin embargo, exige justificación.

* ¡No confundirlo con el operador inversión del tiempo!

** La deducción de las reglas de la teoría relativista de perturbaciones basada en el desarrollo (73.10) se debe a *F. Dyson*, 1949.

Como es sabido, el orden de sucesión de dos intantes t_1 y t_2 (es decir, el signo de la diferencia $t_2 - t_1$) no depende de la elección del sistema de referencia si estos instantes corresponden a puntos de universo x_1 y x_2 separados por un intervalo temporal: $(x_2 - x_1)^2 > 0$. En tal caso, la invariancia de la ordenación cronológica es automática. Pero si $(x_2 - x_1)^2 < 0$ (intervalo espacial), en diferentes sistemas de referencia puede ser tanto $t_2 > t_1$ como $t_2 < t_1$*. Pero estos dos puntos corresponden a sucesos entre los que no puede existir una relación causal. Es evidente, por ello, que no pueden existir operadores no conmutables de dos magnitudes físicas que correspondan a tales puntos: la no-conmutabilidad de los operadores significa físicamente la no-mensurabilidad simultánea de las magnitudes dadas, lo que presupone la existencia de un enlace físico entre ambas mediciones. En consecuencia, la ordenación cronológica de un producto se conserva también invariante en este caso: aunque la transformación de Lorentz puede violar el orden de sucesión de los instantes, dado que entonces los factores conmutan entre sí es posible llevarlos de nuevo al orden cronológico**.

Es fácil ver que la definición que se ha dado en este párrafo de la matriz-S satisface automáticamente la condición de unitariedad. Representando S en la forma de producto cronológico que aparece en (73.6) y teniendo en cuenta el carácter hermítico de V se encuentra que S^+ se expresa por el producto de esos mismos factores exp $[i\delta t_a \cdot V(t_a)]$ (con signo opuesto en el exponente) en orden cronológico inverso. En consecuencia, al multiplicar S y S^+ todos los factores se reducen dos a dos.

Hay que hacer observar que el carácter unitario del operador S queda garantizado en este caso por la hermiticidad del hamiltoniano. Pero la condición de unitariedad posee realmente un carácter más general que el de las hipótesis que se encuentran en la base de la teoría expuesta. Dicha condición debería cumplirse también en una descripción mecanicocuántica en la que no se utilizasen los conceptos de hamiltoniano y de funciones de onda.

§ 74. Diagramas de Feynman para la dispersión de electrones

Pongamos de manifiesto en ejemplos concretos cómo se realiza el cálculo de los elementos de la matriz de dispersión. Estos ejemplos harán más fácil una formulación ulterior de las reglas generales de la teoría invariante de perturbaciones.

---

* En vez de intervalos temporales y espaciales, para abreviar se suele hablar a menudo de los dominios interior y exterior al cono de luz, respectivamente: todos los puntos x separados del punto x' por intervalos con $(x - x')^2 > 0$, se encuentran dentro del cono de dos hojas cuyo vértice coincide con el punto x', y los puntos separados por intervalos con $(x - x')^2 < 0$, fuera de dicho cono.

** Al aplicar esta afirmación al producto $V(t_1)\, V(t_2) \ldots$ hay que precisarla un poco más para evitar equívocos. Dado que el propio operador V no posee la invariancia de contraste (varía a la vez que A), los factores $V(t_1)$, $V(t_2)$, ..., que conmuten entre sí para un contraste dado del potencial, pueden no conmutar en otro contraste. Lo afirmado más arriba, por consiguiente, debe formularse como posibilidad de elegir un contraste del potencial con dichas características de modo que $V(t_1)$ y $(V(t_2)$ conmuten fuera del cono de luz. Esta reserva, evidentemente, en modo alguno se refleja en la invariancia de la matriz-S: las amplitudes de dispersión, en tanto que cantidades físicas reales, no pueden en absoluto depender del contraste del potencial (esta independencia se sigue formalmente de la invariancia de contraste de la integral de acción a que nos referimos en el § 43).

El operador corriente j contiene el producto de dos operadores-ψ electrónicos. Por ello, dentro del primer orden de la teoría de perturbaciones podrían originarse procesos en los que participan en total (en los estados inicial y final) tres partículas — dos electrones (el operador j) y un fotón (el operador A) —. Sin embargo, es fácil ver que dichos procesos son imposibles entre partículas libres, puesto que están prohibidos por la ley de conservación de la energía y del impulso. Si p_1 y p_2 son los 4-impulsos de los electrones, y k, el del fotón, la conservación del 4-impulso se traduciría en la igualdad $k = p_2 - p_1$ o $k = p_2 + p_1$. Pero tales igualdades son imposibles, puesto que para el fotón $k^2 = 0$ y el cuadrado $(p_2 \pm p_1)^2$ es distinto de cero. En efecto, calculando el valor del invariante $(p_2 \pm p_1)^2$ en el sistema de reposo de uno de los electrones, obtendremos

$$(p_2 \pm p_1)^2 = 2\,(m^2 \pm p_1 p_2) = 2\,(m^2 \pm \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mp \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2) = 2m\,(m \pm \varepsilon_2).$$

Dado que $\varepsilon_2 > m$, se tendrá

$$(p_2 + p_1)^2 > 0, \quad (p_2 - p_1)^2 < 0. \tag{74.1}$$

Así, pues, los primeros elementos (no diagonales) no nulos de la matriz S pueden aparecer solamente en el segundo orden de la teoría de perturbaciones. Todos los procesos que se refieren a este caso quedan comprendidos en el operador de segundo orden que se obtiene al desarrollar la expresión (73.12):

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int\int d^4x\, d^4x' \cdot T\,(j^\mu(x)\, A_\mu(x)\, j^\nu(x')\, A_\nu(x')).$$

Puesto que los operadores de electrón y fotón conmutan entre sí, el producto-T que aquí aparece se puede descomponer en dos productos-T:

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int\int d^4x d^4x' \cdot T\,(j^\mu(x)\, j^\nu(x'))\, T\,(A_\mu(x)\, A_\nu(x')). \tag{74.2}$$

Como primer ejemplo consideremos la dispersión elástica de dos electrones: en el estado inicial tenemos dos electrones con 4-impulsos p_1 y p_2, y en el final, dos electrones con otros 4-impulsos p_3 y p_4. Se supone también que todos los electrones se encuentran en estados de spin determinados. Para abreviar prescindimos de las variables espinoriales.

Dado que ni en uno ni en otro estado existen fotones, el elemento de matriz que necesitamos del producto T de los operadores del fotón es el elemento diagonal $\langle 0|\ldots|0\rangle$, donde el símbolo $|0\rangle$ representa el estado de vacío fotónico. Este valor medio del producto-T respecto del vacío es una determinada función de las coordenadas de los dos puntos x y x' (para cada par de índices $\mu\nu$). Además, en virtud de la homogeneidad del 4-espacio, las coordenadas pueden intervenir únicamente en la forma de diferencia $x - x'$. El tensor

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\,\langle 0 \,|\, T\, A_\mu(x)\, A_\nu(x') \,|\, 0\rangle \tag{74.3}$$

se llama *función propagación de fotón* (o *propagador de fotón*). Su cálculo efectivo se llevará a cabo en el § 77.

Para el producto-T de los operadores de electrón, hemos de calcular el elemento de matriz

$$\langle 34 \mid \mathrm{T}\, j^{\mu}(x)\, j^{\nu}(x') \mid 12 \rangle, \tag{74.4}$$

donde los símbolos $|12\rangle$, $|34\rangle$ representan los estados con los pares de electrones dotados de los correspondientes impulsos. También este elemento puede representarse en la forma de promedio respecto del vacío mediante la igualdad evidente

$$\langle 2 \mid F \mid 1 \rangle = \langle 0 \mid a_2 F\, a_1^{+} \mid 0 \rangle,$$

donde F es un operador arbitrario y a a_1^{+} y a_2 son los operadores de creación del primer electrón y de aniquilación del segundo, respectivamente. En consecuencia, en vez de (74.4) se puede calcular la cantidad

$$\langle 0 \mid a_3 a_4 \mathrm{T}\,(j^{\mu}(x)\, j^{\nu}(x'))\, a_2^{+}\, a_1^{+} \mid 0 \rangle \tag{74.5}$$

(los índices 1, 2, ... substituyen, para abreviar, a $p_1, p_2, \ldots$).

Cada uno de los dos operadores corriente es un producto $j = \bar{\psi}\gamma\psi$, y cada uno de los operadores-ψ se representa por una suma

$$\psi = \sum_p (a_p \psi_p + b_p^{+} \psi_{-p}), \qquad \bar{\psi} = \sum_p (a_p^{+} \bar{\psi}_p + b_p \bar{\psi}_{-p}) \tag{74.6}$$

(los segundos términos contienen operadores de positón, que en el presente caso « no trabajan »). Por ello, el producto $j^{\mu}(x)\, j^{\nu}(x')$ aparece en la forma de una suma de términos cada uno de los cuales contiene el producto de dos operadores a_p y de dos a_p^{+}. Estos operadores deben asegurar la aniquilación de los electrones 1, 2 y la creación de los electrones, 3, 4. En otras palabras, deben ser los operadores a_1, a_2, a_3^{+}, a_4^{+} que, como suele decirse, se *enlazan* (o *contraen*) con los operadores « exteriores » a_1^{+}, a_2^{+}, a_3, a_4 en (74.5) y se reducen de acuerdo con la igualdad

$$\langle 0 \mid a_p a_p^{+} \mid 0 \rangle = 1. \tag{74.7}$$

Según sean los operadores-ψ de los que se toman a_1, a_2, a_3^{+}, a_4^{+} en (74.5), resultan cuatro términos:

$$(74{,}5) = a_3\, a_4\, (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)\,(\bar{\psi}'\gamma^{\nu}\psi')\, a_2^{+} a_1^{+} + a_3\, a_4 (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)\,(\psi'\gamma^{\nu}\psi')\, a_2^{+} a_1^{+} +$$

$$+ a_3\, a_4\, (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)\,(\bar{\psi}'\gamma^{\nu}\psi')\, a_2^{+} a_1^{+} + a_3\, a_4\, (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\psi'\gamma^{\nu}\psi')\, a_2^{+} a_1^{+}, \tag{74.8}$$

donde $\psi = \psi(x)$, $\psi' = \psi(x')$ y se han unido con vínculos los operadores que se enlazan, es decir, aquellos de que se toman los pares de operadores a, a^{+} para la

reducción de acuerdo con (74.7). En cada uno de estos términos, mediante permutaciones sucesivas de los operadores $a_1, a_2, \ldots$ llevaremos los operadores conjugados a la contigüidad con el que hace pareja ($a_1 a_1^+$ y así sucesivamente), hecho lo cual el valor medio de sus productos se reduce al producto de los valores medios (74.7). Teniendo en cuenta que todos estos operadores anticonmutan (¡1, 2, 3, 4, son estados diferentes!)*, se encuentra que el elemento de matriz (74.4) es igual a

$$\langle 34 \mid \mathrm{T} j^{\mu}(x)\, j^{\nu}(x') \mid 12\rangle = (\bar{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_2)(\bar{\psi}_3'\gamma^{\nu}\psi_1') + (\bar{\psi}_3\gamma^{\mu}\psi_1)(\bar{\psi}_4'\gamma^{\nu}\psi_2') - (\bar{\psi}_3\gamma^{\mu}\psi_2)(\bar{\psi}_4'\gamma^{\nu}\psi_1') - (\bar{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_1)(\bar{\psi}_3'\gamma^{\nu}\psi_2'). \quad (74.9)$$

Observemos que el signo común de esta suma es convencional y depende del orden en que se dispongan los operadores de electrón « exteriores » en (74.5). Esta circunstancia se debe a que el signo común del elemento de matriz para la dispersión de fermiones idénticos es absolutamente arbitrario. En cambio, el signo relativo de los diferentes términos en (74.9) no depende, naturalmente, del orden adoptado al disponer los operadores exteriores.

Los dos términos en la primera y segunda filas de (74.9) difieren entre sí únicamente en la permutación simultánea de los índices μ, ν y de los argumentos x, x'. Esta permutación, evidentemente, no modifica tampoco al elemento de matriz (74.3) (en el cual el orden de los factores queda establecido en cualquier caso por el símbolo T). Por consiguiente, después de multiplicar (74.3) y (74.9) e integrar respecto de $d^4x\, d^4x'$, los cuatro términos de (74.9) dan resultados iguales dos a dos, de modo que el elemento de matriz es

$$S_{fi} = ie^2 \iint d^4x\, d^4x' \cdot D_{\mu\nu}(x - x') \{(\bar{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_2)(\bar{\psi}_3'\gamma^{\nu}\psi_1') - (\bar{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_1)(\bar{\psi}_3'\gamma^{\nu}\psi_2')\} \quad (74.10)$$

(¡obsérvese que ha desaparecido el factor 1/2!).

Las funciones de onda electrónicas son las ondas planas (65.8). Por ello, la expresión entre llaves se escribe

$$\begin{aligned}\{\ldots\} &= (\bar{u}_4\gamma^{\mu}u_2)(\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_1)\, e^{-i(p_2-p_4)x - i(p_1-p_3)x'} - \\ &\quad - (\bar{u}_4\gamma^{\mu}u_1)(\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_2)\, e^{-i(p_1-p_4)x - i(p_2-p_3)x'} = \\ &= \{(\bar{u}_4\gamma^{\mu}u_2)(\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_1)\, e^{-i[(p_2-p_4)+(p_3-p_1)]\xi/2} - \\ &\quad - (\bar{u}_4\gamma^{\mu}u_1)(\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_2)\, e^{-i[(p_1-p_4)+(p_3-p_2)]\xi/2}\}\, e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)X},\end{aligned}$$

donde $X = (x + x')/2$, $\xi = x - x'$. La integración respecto de $d^4x\, d^4x'$ se substituye por la integración respecto de $d^4\xi\, d^4X$. La integral respecto de d^4X da una función-δ (en virtud de la cual $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$). Pasando luego de la matriz S a la matriz M (§ 65), obtenemos finalmente para la amplitud de dispersión

* Dado este carácter anticonmutativo, los operadores $j(x)$ y $j(x')$ se pueden considerar en este caso (en el cálculo del elemento de matriz) como conmutables y prescindir por ello del signo del producto-T.

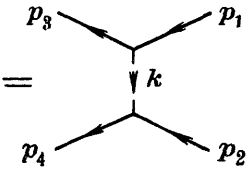
$$M_{fi} = e^2 \{(\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) D_{\mu\nu}(p_4 - p_2)(\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) - \\ - (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu}(p_4 - p_1)(\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2)\}. \quad (74.11)$$

Se ha introducido aquí el propagador de fotón en la representación de impulsos

$$D_{\mu\nu}(k) = \int D_{\mu\nu}(\xi)\, e^{ik\xi}\, d^4\xi. \quad (74.12)$$

Cada uno de los dos términos de la amplitud (74.11) se puede representar simbólicamente en la forma de los llamados *diagramas de Feynman*.

El primer término se representa por el diagrama

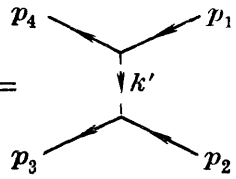
$e^2(\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) D_{\mu\nu}(k)(\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) =$ 

(74.13)

A cada uno de los puntos de intersección de las líneas (*vértices* del diagrama) se asocia un factor γ. Las líneas de trazo continuo « incidentes », que se dirigen a un vértice, corresponden a los electrones iniciales; se les asocian los factores u — las amplitudes bispinoriales de los correspondientes estados electrónicos—. Las líneas de trazo continuo « emergentes », que parten de los vértices, corresponden a los electrones finales; a estas líneas se les asocian los factores $\bar{u}$. Al « leer » un diagrama, los factores indicados se escriben de izquierda a derecha en un orden que corresponde al movimiento a lo largo de las líneas de trazo continuo y en sentido opuesto al de las flechas. Los dos vértices se unen por una línea de trazos que corresponde a un fotón *virtual* (intermedio), « emitido » en un vértice y « absorbido » en el otro; a esta línea se asocia el factor $iD_{\mu\nu}(k)$. El 4-impulso del fotón virtual k se determina por la « conservación del 4-impulso en el vértice »: por la igualdad de los impulsos totales de las líneas incidentes y emergentes; en el presente caso, $k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$*. Junto con todos los factores enumerados, al diagrama en conjunto se atribuye, además, un factor común $(-ie)^2$ (el exponente es el número de vértices en el diagrama) y en esta forma interviene como componente en iM_{fi}. De manera análoga, el segundo término en (74.11) se representa por el diagrama

* Es del todo indiferente el que se empiece la lectura del diagrama a partir del terminal p_3 o del p_4; las expresiones que se obtienen en uno y otro caso coinciden entre sí en virtud de la simetría del tensor $D_{\mu\nu}$. Es también indiferente cómo se elija el sentido de la línea del fotón virtual: cambiar su sentido conduce únicamente a cambiar el signo de k, lo que carece de importancia en virtud de la paridad de la función $D_{\mu\nu}(k)$ (véase § 77).

$$e^2(\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)D_{\mu\nu}(k')(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2) =$$



(74.14)

(con $k' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$) *.

Las líneas correspondientes a las partículas iniciales y finales se llaman *líneas exteriores* o *terminales libres* del diagrama. Los diagramas (74.13) y (74.14) difieren entre sí en el intercambio de dos terminales libres de electrón (p_3 y $-p_4$). Esta permutación de dos fermiones cambia el signo del diagrama; esta regla corresponde al hecho de que en la amplitud (74.11) ambos términos aparecen con signos opuestos.

Consideremos ahora la dispersión mutua de un electrón y un positón; designemos sus impulsos iniciales por p_- y p_+, respectivamente, y los finales, por p'_- y p'_+.

Los operadores de creación y aniquilación de los positones aparecen en los operadores-ψ (74.6) junto con los correspondientes operadores de aniquilación y creación de electrones. Mientras que en el caso anterior la aniquilación de las dos partículas iniciales quedaba asegurada por el operador ψ y la creación de las dos partículas finales por el operador $\bar{\psi}$, el papel de estos operadores es aquí el opuesto respecto de electrones y positones. En consecuencia, la función conjugada $\bar{\psi}(-p_+)$ representará ahora el positón inicial, y el positón final lo será por la función $\psi(-p'_+)$ (siendo, además, una y otra funciones del 4-impulso con signo opuesto). Teniendo en cuenta esta diferencia, obtendremos en definitiva la amplitud de dispersión**

$$M_{fi} = -e^2(\bar{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-))D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)(\bar{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)) + \\ + e^2(\bar{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-))D_{\mu\nu}(p_- + p_+)(\bar{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)). \qquad (74.15)$$

Los términos primero y segundo en esta expresión se representan por los siguientes diagramas:

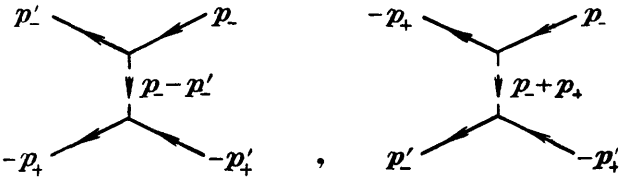
---

* Los diagramas de Feynman pueden trazarse en correspondencia con los términos de la amplitud de dispersión no sólo en la representación de impulsos, sino también en su representación original, la de coordenadas [la integral (74.10)]. El papel de amplitudes de electrón lo representan en tal caso las correspondientes funciones de onda de coordenadas, y los propagadores se toman en la representación correspondiente. A cada vértice se asocia una de las variables de integración [x o x' en (74.10)]; los factores atribuidos a las líneas que se cortan en un vértice se toman en función de esta variable.

** En la dispersión de partículas no idénticas, el signo común de la amplitud es unívoco. Viene determinado por la condición de que en (74.5) los operadores « exteriores » deben estar dispuestos de tal manera que los dos operadores de electrón se encuentren en los extremos:

$$\langle 0 \mid a'\, b' \ldots b^+ a^+ \mid 0 \rangle$$

(o bien ambos en el centro); mediante esta condición se consigue el « mismo signo » de los estados inicial y final del vacío. El signo común de la amplitud se puede comprobar también pasando al límite no-relativista: veremos más adelante (§ 82) que en este límite el segundo término de (74.15) tiende a cero, y el primero, a la amplitud de Born en la dispersión de Rutherford.



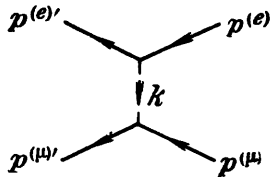
(74.16)

Las reglas para construir los diagramas cambian solamente en la parte que se refiere a los positones. Antes las líneas de trazo continuo incidentes iban acompañadas del factor u, y las emergentes, del $\bar{u}$. Pero ahora las líneas incidentes corresponden al positón final, y las emergentes, al inicial, tomándose los impulsos de todos los positones con signo opuesto.

Hay que observar el diferente carácter de los dos diagramas (74.16). En el primer diagrama, en uno de los vértices se cortan las líneas del electrón inicial y final, y en el otro vértice, lo hacen las correspondientes al positón. Por el contrario, en el segundo diagrama en cada uno de los vértices se cortan líneas de electrón y de positón — iniciales y finales —; en el superior tiene lugar, por así decirlo, la aniquilación de un par con emisión de un fotón virtual, y en el inferior, la creación de un par al que da origen dicho fotón.

Esta diferencia se refleja, también, en las propiedades de los fotones virtuales en uno y en otro diagramas. En el primer diagrama (diagrama de tipo « dispersivo ») el 4-impulso del fotón virtual es igual a la diferencia de los 4-impulsos de los electrones (o de los dos positones); por ello $k^2 < 0$ [cf. (74.1)]. En el segundo diagrama, en cambio (del tipo « destructivo »), $k' = p_- + p_+$ y, por lo tanto, $k'^2 > 0$. Observemos en relación con esto que para el fotón virtual es siempre $k^2 \neq 0$, en contraste con un fotón real, para el cual $k^2 = 0$.

Si las partículas que chocan no son idénticas ni tampoco son una partícula y una antipartícula (digamos un electrón y un muón), la amplitud de dispersión se representa por un solo diagrama:



(74.17)

Es imposible en este caso un diagrama del tipo destructivo o de intercambio. Se obtiene este resultado analíticamente escribiendo el operador corriente como suma de las corrientes del electrón y del muón

$$\mathrm{j} = \mathrm{j}^{(e)} + \mathrm{j}^{(\mu)} = (\bar{\psi}^{(e)} \gamma \psi^{(e)}) + (\bar{\psi}^{(\mu)} \gamma \psi^{(\mu)})$$

y formando en el producto $j^{(\mu)}(x)\, j^{(\nu)}(x')$ los elementos de matriz de los términos que dan lugar a la creación y aniquilación impuestas de partículas.

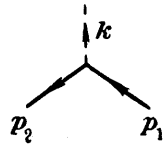
Volvamos a los procesos de primer orden que están prohibidos, como se probó al principio de este párrafo, por la ley de conservación del 4-impulso. Los elementos de matriz del operador

$$S^{(1)} = -ie \int j(x)\, A(x)\, d^4x \tag{74.18}$$

para tales transiciones corresponden a la creación o a la aniquilación « en un mismo punto x precisamente » de tres partículas reales: dos electrones y un fotón. Dichos elementos aparecen como resultado del enlace (contracción) de los operadores $\bar{\psi}(x)$ y $\psi(x)$ en un mismo punto x y se determinan (por ejemplo, en la emisión de un fotón) por integrales de la forma

$$S_{fi} = -ie \int \bar{\psi}_2(x)\, \psi_1(x)\, \hat{A}^*(x)\, d^4x,$$

que se anulan debido a la presencia en el integrando del factor $\exp[-i(p_1 - p_2 - k)x]$ con un exponente diferente de cero. En el lenguaje de los diagramas, esto significa que son nulos los diagramas con tres terminales libres



(74.19)

Por esta misma causa son imposibles los procesos de segundo orden en los que participarían (en el estado inicial y en el final) seis partículas. En el elemento de matriz S_{fi} de las correspondientes transiciones, la integral respecto de $d^4x\, d^4x'$ se descompondría en producto de dos integrales respecto de d^4x y de d^4x' del producto de tres funciones de onda tomadas en un mismo punto precisamente, integrales que se anulan. En otras palabras, los correspondientes diagramas se descompondrían en dos diagramas independientes de la forma (74.19).

§ 75. Diagramas de Feynman para la dispersión de un fotón

Consideremos otro efecto de segundo orden — la dispersión de un fotón por un electrón *(efecto Compton)* —. Supongamos que en el estado inicial el fotón y el electrón tienen 4-impulsos k_1 y p_1, y en el estado final k_2 y p_2 (y también polarizaciones determinadas que, para abreviar, no indicaremos).

El elemento de matriz de fotón es

$$\langle 2 \mid T(A_\mu(x)\, A_\nu(x')) \mid 1 \rangle = \langle 0 \mid c_2 T(A_\mu(x)\, A_\nu(x'))\, c_1^+ \mid 0 \rangle, \tag{75.1}$$

donde

$$A = \sum_k (c_k A_k + c_k^+ A_k^*).$$

Enlazando los operadores exteriores e interiores, obtendremos

$$(75,1) = c_2 A_\mu A_\nu' c_1^+ + \overbrace{c_2 A_\mu A_\nu' c_1^+} = A_{2\mu}^* A_{1\nu}' + A_{1\mu} A_{2\nu}^{*\prime} \tag{75.2}$$

(aquí se tiene en cuenta la conmutabilidad de los operadores c_1, c_2^+; por esta misma razón se puede prescindir del signo de T en el presente caso).

El elemento de matriz de electrón es

$$\langle 2 \mid T(j^\mu(x)\, j^\nu(x')) \mid 1 \rangle = \langle 0 \mid a_2 T[(\bar\psi \gamma^\mu \psi)(\bar\psi' \gamma^\nu \psi')]\, a_1^+ \mid 0 \rangle. \tag{75.3}$$

En él figuran cuatro operadores-ψ. Solamente dos de ellos se encargarán de aniquilar el electrón 1 y de crear el electrón 2, es decir, se enlazarán con los operadores a_1^+ y a_2. Estos pueden ser los operadores $\bar\psi'$, ψ o los $\psi' \bar\psi$ (pero no ψ, $\bar\psi$ o $\psi' \bar\psi'$: la creación y aniquilación en un mismo punto x o x' de dos electrones reales junto con un fotón real conduce a una expresión igual a cero). Efectuando el enlace de estas dos maneras, obtendremos en el elemento de matriz (75.3) dos términos; los escribiremos primero en el supuesto de que sea $t > t'$:

$$(75,3) = a_2 (\bar\psi \gamma^\mu \psi)(\bar\psi' \gamma^\nu \psi')\, a_1^+ + \overbrace{a_2 (\bar\psi \gamma^\mu \psi)(\bar\psi' \gamma^\nu \psi')\, a_1^+}. \tag{75.4}$$

En el primer término se enlazan los operadores

$$a_2 \bar\psi \to a_2 a_2^+ \psi_2, \qquad \psi' a_1^+ \to a_1 a_1^+ \psi_1'.$$

Dado que los operadores $a_2 a_2^+$ y $a_1 a_1^+$ son diagonales y se encuentran en los extremos del producto, estos operadores se substituyen por sus valores medios respecto del vacío, es decir, por la unidad. Para la transformación análoga del segundo término en (75.4) hay que « arrastrar » primero el operador a_2^+ hacia la izquierda, y el a_1 hacia la derecha. Esto se lleva a cabo mediante las reglas de conmutación de los operadores a_p, a_p^+ en virtud de las cuales

$$\left.\begin{aligned} \{a_p, \psi\}_+ = \{a_p^+, \bar\psi\}_+ = 0, \\ \{a_p, \bar\psi\}_+ = \bar\psi_p, \quad \{a_p^+, \psi\}_+ = \psi_p. \end{aligned}\right\} \tag{75.5}$$

En definitiva la expresión (75.4) pasa a tomar la forma

$$\langle 0 \mid (\bar\psi_2 \gamma^\mu \psi)(\bar\psi' \gamma^\nu \psi_1') - (\bar\psi \gamma^\mu \psi_1)(\bar\psi_2' \gamma^\nu \psi') \mid 0 \rangle, \qquad t > t' \tag{76.6}$$

(claro está, se someten al promedio tan sólo los factores que son operadores). De manera análoga obtendremos para $t < t'$ una expresión que difiere de la precedente en la permutación de los apóstrofos y de los índices μ, ν:

$$\langle 0 \mid -(\bar\psi' \gamma^\nu \psi_1')(\bar\psi_2 \gamma^\mu \psi) + (\bar\psi_2' \gamma^\nu \psi')(\bar\psi \gamma^\mu \psi_1) \mid 0 \rangle, \qquad t < t'. \tag{75.7}$$

Las dos expresiones (75.6) y (75.7) se pueden escribir en forma única introduciendo el producto cronológico de los operadores-ψ de acuerdo con la definición

$$T\,\psi_i(x)\,\bar{\psi}_k(x') = \begin{cases} \psi_i(x)\,\bar{\psi}_k(x'), & t' < t; \\ -\bar{\psi}_k(x')\,\psi_i(x), & t' > t. \end{cases} \tag{75.8}$$

(i, k son índices bispinoriales). Entonces los términos primeros y segundos de (75.6-7) se reúnen en un único símbolo:

$$\bar{\psi}_2\gamma^\mu \langle 0 \mid T\,\psi \cdot \bar{\psi}' \mid 0\rangle\,\gamma^\nu\psi_1' + \bar{\psi}_2'\gamma^\nu \langle 0 \mid T\,\psi' \cdot \bar{\psi} \mid 0\rangle\,\gamma^\mu\psi_1 \tag{75.9}$$

($\psi \cdot \bar{\psi}$ representa la matriz $\psi_i\bar{\psi}_k$).

Hay que hacer observar que en la definición (75.8), que surge de manera natural, los productos de los operadores para $t < t'$ y para $t > t'$ se toman con signos opuestos. En esto se diferencia de la definición del producto-T que utilizamos para los operadores A y j. El origen de esta diferencia procede de que los operadores de fermión ψ, $\bar{\psi}$ anticonmutan fuera del cono de luz (en contraste con el carácter conmutativo de los operadores de bosón A y también de los operadores bilineales $j = \bar{\psi}\gamma\psi$)*. Al mismo tiempo, se garantiza con esto la invariancia relativista de la definición (75.8) (una demostración formal de las reglas de conmutación de los operadores-ψ se dará en el § 76)**.

Introduzcamos la *función propagación de electrón* (o *propagador de electrón*) que es el bispinor de segundo orden $G_{ik}(x - x')$ definido por

$$G_{ik}(x - x') = -i \langle 0 \mid T\,\psi_i(x)\,\bar{\psi}_k(x') \mid 0\rangle. \tag{75.10}$$

Entonces, el elemento de matriz de electrón se escribirá en la forma

$$\langle 2 \mid T j^\mu(x)\, j^\nu(x') \mid 1\rangle = i\bar{\psi}_2\gamma^\mu G\gamma^\nu\psi_1' + i\bar{\psi}_2'\gamma^\nu G\gamma^\mu\psi_1. \tag{75.11}$$

Después de multiplicar por el elemento de matriz de fotón (74.1) e integrar respecto de $d^4x\,d^4x'$, los dos términos de (75.11) darán el mismo resultado, de modo que se obtiene

$$S_{fi} = -ie^2 \iint d^4x\,d^4x'\,\bar{\psi}_2(x)\,\gamma^\mu\,G(x - x')\,\gamma^\nu\,\psi_1(x') \times \\ \times \{A_{2\mu}^*(x)\,A_{1\nu}(x') + A_{2\nu}^*(x')\,A_{1\mu}(x)\}. \tag{75.12}$$

Substituyendo para las funciones de onda de electrón y de fotón las ondas

---

* Recordaremos que, por sí mismos, los operadores-ψ no corresponden a ninguna magnitud física medible y, por consiguiente, no tienen por qué ser conmutables fuera del cono de luz.

** Análogamente se puede definir el producto-T de un número arbitrario de operadores-ψ. Este producto es igual al producto de todos los operadores en cuestión colocados de derecha a izquierda en orden creciente de tiempos, determinándose el signo por la paridad de la permutación que hay que aplicar para obtener esta ordenación a partir de la que figura detrás del símbolo del producto-T. Según esta definición el signo del producto-T cambia al permutar dos operadores-ψ cualesquiera, por ejemplo:

$$T\,\psi_i(x)\,\bar{\psi}_k(x') = -T\,\bar{\psi}_k(x')\,\psi_i(x).$$

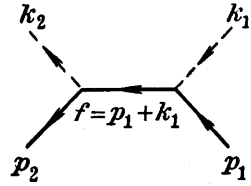
planas (65.8-9) y eliminando la función-δ al igual que se hizo en (74.10), obtendremos en definitiva la amplitud de dispersión

$$M_{fi} = -4\pi e^2 \bar{u}_2 \{\hat{e}_2^* G(p_1 + k_1)\hat{e}_1 + \hat{e}_1 G(p_1 - k_2)\hat{e}_2^*\} u_1, \qquad (75.13)$$

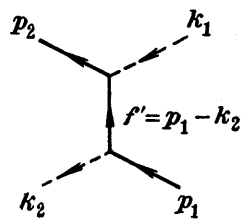
donde e_1, e_2 son los 4-vectores polarización de los fotones, y $G(p)$ el propagador de electrón en la representación de impulsos.

Los dos términos de esta expresión se representan por los siguientes diagramas de Feynman

$4\pi e^2 \bar{u}_2 \hat{e}_2^* G(f) \hat{e}_1 u_1 =$



$4\pi e^2 \bar{u}_2 \hat{e}_1 G(f') \hat{e}_2^* u_1 =$



(75.14)

Lor terminales libres en líneas de trazos corresponden a fotones reales; a las líneas incidentes (fotón inicial) acompaña el factor $\sqrt{4\pi}e$, y a las líneas emergentes (fotón final), el factor $\sqrt{4\pi}e^*$, donde e es el 4-vector polarización. En el primer diagrama el fotón inicial es absorbido junto con el electrón inicial, y el fotón final se emite junto con el electrón final. En el segundo diagrama la emisión del fotón final tiene lugar junto con la aniquilación del electrón inicial, y la absorción del fotón inicial, junto con la creación del electrón final.

La línea de trazo continuo interior (que une ambos vértices) corresponde a un electrón virtual cuyo 4-impulso se determina por la conservación del 4-impulso en los vértices. A esta línea se asocia el factor $iG(f)$. En contraste con el 4-impulso de una partícula real, el cuadrado del 4-impulso del electrón virtual no es igual a m^2. Considerando el invariante f^2, por ejemplo, en el sistema de reposo del electrón, es fácil hallar que

$$f^2 = (p_1 + k_1)^2 > m^2, \quad f'^2 = (p_1 - k_2)^2 < m^2. \qquad (75.15)$$

§ 76. **Propagador de electrón**

El concepto de funciones propagación (propagadores) introducido en los párrafos que preceden representa un papel fundamental en el formalismo de la elec-

trodinámica cuántica. El propagador de fotón $D_{\mu\nu}$ pasa a ser la magnitud fundamental que caracteriza la interacción de dos electrones. Este papel suyo se manifiesta de manera evidente en la posición que ocupa en la amplitud de dispersión de electrones, donde $D_{\mu\nu}$ aparece multiplicado por las corrientes de transición de las dos partículas. Un papel análogo lo desempeña el propagador de electrón en la interacción entre un electrón y un fotón.

Pasemos ahora a ocuparnos del cálculo efectivo de los propagadores, comenzando con el caso del electrón.

Apliquemos a la función

$$G_{ik}(x-x') = -i\langle 0 \mid \mathrm{T}\,\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x') \mid 0\rangle \tag{76.1}$$

(i, k son índices bispinoriales) el operador $\hat{\mathrm{p}} - m$, donde $\mathrm{p}_\mu = i\partial_\mu$. Dado que $\psi(x)$ satisface la ecuación de Dirac $(\hat{\mathrm{p}} - m)\psi(x) = 0$, obtendremos en definitiva el valor cero en todos los puntos x con la única excepción de aquellos en los que $t = t'$. Ello es así porque $G(x-x')$ tiende a límites diferentes para $t \to t' + 0$ y para $t \to t' - 0$: según la definición (75.8) estos límites son iguales, respectivamente, a

$$-i\langle 0 \mid \psi_i(\boldsymbol{r}, t)\bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}', t) \mid 0\rangle \quad \text{y} \quad +i\langle 0 \mid \bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}', t)\psi_i(\boldsymbol{r}, t) \mid 0\rangle$$

y, conforme veremos, no coinciden sobre el cono de luz. Esto conduce a que en la derivada $\partial G/\partial t$ aparezca un término complementario con una función-δ:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -i\langle 0 \mid \mathrm{T}\,\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial t}\bar{\psi}_k(x') \mid 0\rangle + \delta(t-t')(G\,|_{t\to t'+0} - G\,|_{t\to t'-0}). \tag{76.2}$$

Observando que en el operador $\hat{\mathrm{p}} - m$ la derivada respecto de t aparece en la forma $i\gamma^0\partial/\partial t$, tenemos por ello

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)_{ik}\, G_{kl}(x-x') = \delta(t-t')\,\gamma^0_{il}\langle 0 \mid \{\psi_k(\boldsymbol{r}, t),\ \bar{\psi}_l(\boldsymbol{r}', t)\}_+ \mid 0\rangle. \tag{76.3}$$

Calculemos el anticonmutador que aquí aparece. Multiplicando los operadores $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ y $\bar{\psi}(\boldsymbol{r}', t)$ [véase (74.6)] y teniendo en cuenta las reglas de conmutación para los operadores de fermión a_p y b_p, se encuentra

$$\{\psi_i(\boldsymbol{r}, t),\ \bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}', t)\}_+ = \sum_p [\psi_{pi}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{pk}(\boldsymbol{r}') + \psi_{-pi}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{-pk}(\boldsymbol{r}')], \tag{76.4}$$

donde $\psi_{\pm p}(\boldsymbol{r})$ son las funciones de onda sin el factor temporal (como en los §§ 74, 75, para abreviar no escribiremos en ellas los índices de polarización). Pero el conjunto de todas las funciones $\psi_{\pm p}(\boldsymbol{r})$ — funciones propias del hamiltoniano del electrón — constituye un sistema completo de funciones normalizadas, y de acuerdo con las propiedades generales de tales sistemas [cf. III (5.12)]:

$$\sum_p [\psi_{pi}(\boldsymbol{r})\psi^*_{pk}(\boldsymbol{r}') + \psi_{-pi}(\boldsymbol{r})\psi^*_{-pk}(\boldsymbol{r}')] = \delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{76.5}$$

Ahora bien, la suma que aparece en el segundo miembro de la igualdad (76.4) difiere de

la suma (76.5) en la substitución de $\psi^*{}_k$ por $(\psi^*\gamma^0)_k$ y es igual a $\gamma^0{}_{ik}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$. Así, pues,

$$\{\psi_i(\boldsymbol{r},t),\overline{\psi}_k(\boldsymbol{r}',t)\}_+ = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\gamma^0{}_{ik}. \tag{76.6}$$

Observemos que de esta fórmula se sigue, en particular, la afirmación recordada ya en el § 75 acerca del carácter anticonmutativo de los operadores ψ y $\overline{\psi}$ fuera del cono de luz. Para $(x-x')^2 < 0$ existe siempre un sistema de referencia en el cual $t = t'$; si, además, $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$, el anticonmutador (76.6) es, en efecto, igual a cero.

Substituyendo (76.6) en (76.3) (y prescindiendo de los índices bispinoriales), encontramos finalmente *

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)\,G(x-x') = \delta^{(4)}(x-x'). \tag{76.7}$$

Así, pues, el propagador de electrón satisface la ecuación de Dirac con la función-δ en el segundo miembro. En otras palabras, desde el punto de vista matemático dicho propagador es una *función de Green* para la ecuación de Dirac.

Más adelante necesitaremos considerar, no la propia función $G(\xi)$ $(\xi = x - x')$, sino sus componentes de Fourier

$$G(p) = \int G(\xi)\, e^{ip\xi}\, d^4\xi \tag{76.8}$$

(el propagador en la representación de impulso). Formando la componente de Fourier de ambos miembros de (76.7), se encuentra que $G(p)$ satisface el sistema de ecuaciones algebraicas

$$(\hat{p} - m)\,G(p) = 1. \tag{76.9}$$

La solución de este sistema es:

$$G(p) = \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}. \tag{76.10}$$

Las cuatro componentes del 4-vector p en $G(p)$ son variables independientes (no ligadas por la relación $p^2 \equiv p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$). Escribiendo el denominador de (76.10) en la forma $p_0^2 - (\boldsymbol{p}^2 + m^2)$, vemos que $G(p)$, considerada como función de p_0 para $\boldsymbol{p}^2$ dado, tiene dos polos: para $p_0 = \pm\varepsilon$, donde $\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Al integrar respecto de dp_0 en la integral

$$G(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip\xi}G(p)\,d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\cdot e^{i\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}}\int dp_0\cdot e^{-ip_0\tau}G(p) \tag{76.11}$$

$(\tau = t - t')$ se plantea, por consiguiente, la cuestión de cómo hay que sortear estos polos; si no se indica cómo hay que proceder para ello, la expresión (76.10) es todavía esencialmente indeterminada.

Para poner en claro esta cuestión, volvamos a la definición de partida (76.1). Substituyamos en ella los operadores-ψ por sus expresiones en forma de suma

---

* De forma explícita y con índices bispinoriales.

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)_{il}G_{lk}(x-x') = \delta^{(4)}(x-x')\,\delta_{ik}. \tag{76.7a}$$

(74.6), observando al hacerlo que los únicos promedios respecto del vacío distintos de cero son los correspondientes a los siguientes productos de operadores de creación y de aniquilación:

$$\langle 0|a_p a^+{}_p|0\rangle = 1, \quad \langle 0|b_p b^+{}_p|0\rangle = 1.$$

(Puesto que en el estado de vacío no existe partícula alguna, antes de « aniquilar » una partícula mediante el operador a_p o b_p, hay que «crearla» mediante el operador a_p^+ o b_p^+). Se obtendrá

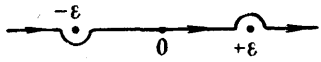
$$\begin{aligned} G_{ik}(x-x') &= -i\sum_p \psi_{pi}(\boldsymbol{r}, t)\,\bar{\psi}_{pk}(\boldsymbol{r}', t') = \\ &= -i\sum_p e^{-i\varepsilon(t-t')}\psi_{pi}(\boldsymbol{r})\,\bar{\psi}_{pk}(\boldsymbol{r}') \quad \text{para } t-t'>0; \qquad (76.12) \\ G_{ik}(x-x') &= i\sum_p \bar{\psi}_{-pk}(\boldsymbol{r}', t')\,\psi_{-pi}(\boldsymbol{r}, t) = \\ &= i\sum_p e^{i\varepsilon(t-t')}\,\psi_{-pi}(\boldsymbol{r})\,\bar{\psi}_{-pk}(\boldsymbol{r}') \quad \text{para } t-t'<0 \end{aligned}$$

(cuando $t > t'$ contribuyen en G únicamente los términos de electrón, y cuando $t < t'$, sólo los términos de positón).

Imaginando que la suma respecto de $\boldsymbol{p}$ se substituye por la integración respecto de d^3p y comparando (76.12) con (76.11), vemos que la integral

$$\int e^{-ip_0\tau}G(p)\,dp_0 \qquad (76.13)$$

debe tener un factor de fase $e^{-i\varepsilon\tau}$ para $\tau > 0$ y $e^{i\varepsilon\tau}$ para $\tau < 0$. Satisfacemos esta condición si convenimos en sortear los polos $p_0 = \varepsilon$ y $p_0 = -\varepsilon$, respectivamente, por arriba y por abajo (en el plano de la variable compleja p_0):



(76.14)

En efecto, cuando $\tau > 0$ cerraremos el camino de integración por una semicircunferencia infinitamente alejada en el semiplano inferior, con lo cual el valor de la integral vendrá dado por el residuo en el polo $p_0 = +\varepsilon$; cuando $\tau < 0$, cerraremos el contorno en el semiplano superior y la integral vendrá determinada por el residuo en el polo $p_0 = -\varepsilon$. En ambos casos se obtiene el resultado pedido.

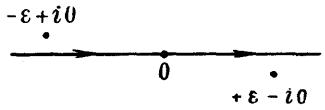
Esta regla para sortear los polos *(regla de Feynman)* se puede formular de otra manera: la integración se efectúa siempre a lo largo del propio eje real, pero a la masa de la partícula m se atribuye una parte imaginaria negativa infinitamente pequeña:

$$m \to m - i0. \qquad (76.15)$$

Se tiene entonces, en efecto,

$$\varepsilon \to \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + (m-i0)^2} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 - i0} = \varepsilon - i0.$$

En otras palabras, los polos $p_0 = \pm \varepsilon$ se desplazan hacia abajo y hacia arriba a partir del eje real:



(76.16)

de modo que la integración a lo largo de este eje resulta equivalente a la integración a lo largo del camino (76.14)*. Teniendo en cuenta la regla (76.15), el propagador (76.10) se puede escribir en la forma

$$G(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i0}. \tag{76.17}$$

La regla de integración asociada con el desplazamiento de un polo se traduce en la siguiente relación:

$$\frac{1}{x + i0} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{76.18}$$

Ésta hay que interpretarla en el sentido de que al multiplicar por una función $f(x)$ arbitraria e integrar se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x+i0}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx - i\pi f(0) \tag{76.19}$$

(donde el trazo en el signo de la integral, o el símbolo P, designan el valor principal).

La función de Green (76.10) es el producto del factor bispinorial $\hat{p} + m$ y el escalar:

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}. \tag{76.20}$$

La correspondiente función de las coordenadas $G^{(0)}(\xi)$ es, evidentemente, solución de la ecuación

$$(\mathrm{p}^2 - m^2)\, G^{(0)}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'), \tag{76.21}$$

es decir, es función de Green de la ecuación $(\mathrm{p}^2 - m^2)\psi = 0$. En este sentido cabe decir que $G^{(0)}(x - x')$ es el propagador de las partículas escalares. Mediante el cálculo se comprueba fácilmente (de manera análoga a cómo se ha procedido antes), que la función propagación de un campo escalar se expresa en función de los operadores-ψ (11.2) por la fórmula

$$G^{(0)}(x - x') = -i\langle 0 \,|\, \mathrm{T}\psi(x)\,\psi^{+}(x') \,|\, 0\rangle, \tag{76.22}$$

análoga a la definición (76.1). En este caso el producto cronológico se define (como para operadores de bosón cualesquiera) de la manera siguiente:

---

* Conviene observar que la regla de desplazamiento de los polos corresponde al hecho de que $G(x - x')$ experimente un amortiguamiento infinitamente pequeño respecto de $|t - t'|$.

$$T\psi(x)\,\psi^{+}(x') = \begin{cases} \psi(x)\,\psi^{+}(x'), & t > t' \\ \psi^{+}(x')\,\psi(x), & t < t' \end{cases};$$

(con signos iguales para $t > t'$ y $t < t'$).

§ 77. Propagador de fotón

Hasta aquí tuvimos que utilizar (en los §§ 43, 75) la forma explícita de los operadores A del campo electromagnético al hallar los elementos de matriz tan sólo con relación al cambio del número de fotones reales. Para este fin bastó la representación de los potenciales del campo libre dada en el § 2 como desarrollo en ondas planas transversales.

Dicha representación, sin embargo, no proporciona por si sola una descripción completa de un campo arbitrario. Esto resulta claro ya en la situación análoga que encontramos en la electrodinámica clásica: un campo arbitrario (cuando existen cargas) no puede desarrollarse en ondas transversales; junto con la parte transversal del campo (descrita por el potencial vector que obedece a la condición div $\boldsymbol{A} = 0$), existe también una interacción estática, coulombiana, que se representa por el potencial escalar Φ*.

Así, pues, en esencia no poseemos todavía una definición completa de los operadores A, sin la cual es imposible el cálculo directo del propagador de fotón de acuerdo con la fórmula

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 \,|\, TA_{\mu}(x)\, A_{\nu}(x') \,|\, 0 \rangle. \tag{77.1}$$

Por otra parte, la no-univocidad de contraste de los potenciales priva en grado considerable de sentido físico aquellos operadores que fue necesario introducir para una cuantificación completa del campo electromagnético.

Estas dificultades, sin embargo, tienen solamente un carácter formal, no un carácter físico, y es posible evitarlas acudiendo a algunas propiedades generales del propagador que son evidentes de antemano en virtud de las condiciones impuestas de invariancia relativista y de contraste.

La forma más general de un 4-tensor de segundo orden que depende solamente del 4-vector $\xi = x - x'$, es

$$D_{\mu\nu}(\xi) = g_{\mu\nu} D(\xi^2) - \partial_{\mu}\,\partial_{\nu} D^{(1)}(\xi^2), \tag{77.2}$$

---

* Cuando se cumple la condición div $\boldsymbol{A} = 0$, las ecuaciones de Maxwell conducen a las siguientes ecuaciones para $\boldsymbol{A}$ y Φ:

$$\Box \boldsymbol{A} = -4\pi \boldsymbol{j} + \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \Delta \Phi = -4\pi\rho.$$

En estas condiciones, $\boldsymbol{A}$ se puede desarrollar en ondas transversales (soluciones de la ecuación homogénea $\Box\, \boldsymbol{A} = 0$). En cambio, el potencial Φ satisface la ecuación estática de Poisson.

donde D, $D^{(1)}$ son funciones escalares del invariante ξ^2 *. Observemos que el tensor resulta simétrico automáticamente.

De acuerdo con esto, en la representación de impulsos tendremos

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)\, g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu D^{(1)}(k^2), \tag{77.3}$$

donde $D(k^2)$, $D^{(1)}(k^2)$ son las componentes de Fourier de las funciones $D(\xi^2)$, $D^{(1)}(\xi^2)$.

En las magnitudes físicas — las amplitudes de dispersión — el propagador de fotón aparece multiplicado por las corrientes de transición de dos electrones, es decir, en combinaciones de la forma $j^\mu{}_{21} D_{\mu\nu} j^\nu{}_{43}$ [véase, por ejemplo (74.13)]. Pero en virtud de la conservación de la corriente ($\partial_\mu j^\mu = 0$), sus elementos de matriz $j_{21} = \bar{\psi}_2 \gamma \psi_1$ satisfacen la condición de 4-transversalidad

$$k_\mu (j^\mu)_{21} = 0, \tag{77.4}$$

donde $k = p_2 - p_1$ [cf. (43.13)]. Es claro, por ello, que ningún resultado físico varía al efectuar la substitución

$$D_{\mu\nu} \to D_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \tag{77.5}$$

donde χ_μ son funciones arbitrarias de $\boldsymbol{k}$ y k_0. Esta arbitrariedad en la elección de $D_{\mu\nu}$ corresponde a la arbitrariedad en la elección del contraste de los potenciales del campo.

Una transformación de contraste arbitraria (77.5) puede violar la forma invariante relativista de $D_{\mu\nu}$ que se ha supuesto en (77.3) (si las cantidades χ_μ no forman un 4-vector). Pero incluso manteniéndonos dentro de los límites de las formas relativísticamente invariantes del propagador, vemos que la elección de la función $D^{(1)}(k^2)$ en (77.3) es por completo arbitraria; dicha elección no se reflejará en los resultados físicos y puede hacerse según convenga**.

De esta manera, el problema de hallar la función propagación se reduce a determinar una sola función $D(k^2)$ que posea la invariancia de contraste. Si se considera un valor dado de k^2 y se elige el eje z en la dirección de $\boldsymbol{k}$, la transformación (77.5) no modificará las componentes $D_{xx} = D_{yy} = -D(k^2)$. Basta, por lo tanto, calcular únicamente la componente D_{xx}, utilizando al hacerlo cualquier contraste de los potenciales.

Utilicemos el contraste en el cual div $\mathbf{A} = 0$ y el operador $\mathbf{A}$ viene dado por el desarrollo (2.17-18):

$$\mathbf{A} = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \left(c_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{e}^{(\alpha)} e^{-ikx} + c^+_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{e}^{(\alpha)*} e^{ikx}\right), \quad \omega = |\boldsymbol{k}| \tag{77.6}$$

(el índice $\alpha = 1, 2$ numera las polarizaciones). De todos los valores medios respecto

---

* Estas funciones son distintas en tres dominios de valores del argumento que no se transforman entre sí en las transformaciones de Lorentz: fuera del cono de luz ($\xi^2 < 0$) en la región cónica superior ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 > 0$) y en la región cónica inferior ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 < 0$).

** *L. D. Landau, A. A. Abrikosov* e *I. M. Jalatnikov*, señalaron esta circunstancia (1954).

del vacío de los productos de operadores c, c^+ son distintos de cero únicamente los $\langle 0|c_{k\alpha}c^+_{k\alpha}|0\rangle = 1$. Según la definición (77.1) obtendremos, por consiguiente,

$$D_{ik}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{2\pi i d^3k}{\omega}\left(\sum_\alpha e_i^{(\alpha)}e_k^{(\alpha)*}\right)e^{-i\omega|\tau|+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}} \tag{77.7}$$

[$i, k = x, y, z$ son índices vectoriales tridimensionales; hemos pasado de la suma respecto de $\boldsymbol{k}$ a la integración respecto de $d^3k/(2\pi)^3$].

Por (77.7) es evidente que el integrando sin el factor $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}}$ es la componente del desarrollo tridimensional de Fourier de la función $D_{ik}(\boldsymbol{r}, t)$. Para $D_{xx} = -D$ dicha componente es igual a

$$\frac{2\pi i}{\omega}e^{-i\omega|\tau|}$$

(la suma respecto de las polarizaciones es tal que $\Sigma|e_x^{(\alpha)}|^2 = 1$). Para hallar $D_{xx}(k^2)$ hace falta desarrollar esta función en integral de Fourier respecto del tiempo. Este desarrollo viene dado por la fórmula

$$\frac{2\pi i}{\omega}e^{-i\omega|\tau|} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\pi}{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 + i0}e^{-ik_0\tau}dk_0.$$

Conforme se explicó en el párrafo que precede, dicha integración presupone un cierto criterio para sortear los polos $k_0 = \pm|\boldsymbol{k}| = \pm\omega$ por encima y por debajo, respectivamente; para $\tau > 0$ la integral viene determinada por el residuo en el polo $k_0 = +\omega$, y para $\tau < 0$, por el residuo en el polo $k_0 = -\omega$.

De esta manera se encuentra finalmente

$$D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}. \tag{77.8}$$

La presencia en el denominador del sumando $+i0$ al que nos ha conducido automáticamente el razonamiento expuesto, coincide con la regla (76.15): de la masa del fotón (igual a cero) se resta $i0$. De (77.8) se sigue, evidentemente, que la correspondiente función de las coordenadas $D(\xi^2)$ satisface la ecuación

$$-\partial_\mu\partial^\mu D(x - x') = 4\pi\delta^{(4)}(x - x'), \tag{77.9}$$

es decir, es una función de Green de la ecuación de onda.

De ordinario supondremos $D^{(l)} = 0$, es decir, utilizaremos como propagador una función de la forma

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}g_{\mu\nu}. \tag{77.10}$$

Indiquemos también otros métodos de contraste que pueden presentar determinadas ventajas en ciertas aplicaciones.

Haciendo $D^{(l)} = -D/k^2$, obtendremos el propagador en la forma

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{77.11}$$

(contraste de Landau). En este caso es $D_{\mu\nu}k^\nu = 0$. Esta elección es análoga al contraste de Lorentz de los potenciales ($A_\mu k^\mu = 0$) *.

El contraste de los potenciales por la condición tridimensional div $\boldsymbol{A} = 0$ es análogo al contraste del propagador mediante las condiciones $D_{il}k^l = 0$, $D_{0l}k^l = 0$. Junto con la igualdad $D_{xx} = -D = -4\pi/k^2$, estas condiciones dan

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\boldsymbol{k}^2}\right). \tag{77.12}$$

Para obtener una función D_{il} de estas características, hay que aplicar al propagador (77.10) la transformación (77.5) haciendo

$$\chi_0 = -\frac{4\pi\omega}{(\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)\boldsymbol{k}^2}, \quad \chi_i = \frac{4\pi k_i}{(\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)\,\boldsymbol{k}^2}.$$

A la vez, para las restantes componentes $D_{\mu\nu}$ se obtiene

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{\boldsymbol{k}^2}, \quad D_{0i} = 0. \tag{77.13}$$

Este contraste se llama de Coulomb (*E. Salpeter*, 1952); obsérvese que D_{00} es aquí la componente de Fourier del potencial coulombiano.

Finalmente, a la calibración de los potenciales por la condición $\Phi = 0$ es análoga la calibración del propagador en la cual

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\omega^2}\right), \quad D_{0i} = D_{00} = 0. \tag{77.14}$$

Esta forma resulta cómoda para la aplicación en los problemas no-relativistas (*I. E. Dzialoshinskiĭ, L. P. Pitaevskiĭ*, 1959).

§ 78. **Reglas generales de la técnica de diagramas**

Los cálculos efectuados en los §§ 74, 75 para algunos casos sencillos de elementos de la matriz de dispersión encierran en sí todos los rasgos principales del método general. No exige un esfuerzo especial el establecer, mediante las correspondientes generalizaciones, las reglas del cálculo de los elementos de matriz en un orden cualquiera de la teoría de perturbaciones.

Conforme se indicó ya, el elemento de matriz del operador de dispersión S

---

* Por la fórmula análoga

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 - m^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right), \tag{77.11a}$$

se da el propagador para partículas de spin 1 que poseen masa no nula. En este caso no existe la invariancia de contraste y la elección del propagador es única. La estructura tensorial del propagador (77.11a), como debe ser, coincide con la estructura de la matriz densidad de las partículas vectoriales no polarizadas (14.15).

correspondiente a la transición entre dos estados cualesquiera inicial y final coincide con el valor medio respecto del vacío del operador que se obtiene multiplicando S a la derecha por los operadores de creación de las partículas iniciales y a la izquierda por los operadores de aniquilación de todas las partículas finales.

Como resultado de esta reducción el elemento de la matriz-S en el n-ésimo orden de la teoría de perturbaciones toma la forma

$$\langle f|S^{(n)}|i\rangle = \\ = \frac{(-ie)^n}{n!}\langle 0|\ldots b_{3f}b_{1f}\ldots a_{1f}\ldots c_{1f}|\int d^4x_1\ldots d^4x_n T\{(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1)\ldots(\bar{\psi}_n\hat{A}_n\psi_n)\}\times \\ \times c^+_{1i}\ldots a^+_{1i}\ldots b^+_{1i}\ldots|0\rangle \qquad (78.1)$$

[los índices $1i$, $2i$, ... numeran las partículas iniciales (por separado los positones, electrones y fotones), los índices $1f$, $2f$ ..., las partículas finales; los índices 1, 2, ... en los operadores ψ y A tienen el significado siguiente: $\psi_1 = \psi(x_1)$, ...]. Los operadores ψ, A que aquí intervienen son combinaciones lineales de operadores de creación y de aniquilación de las correspondientes partículas en los diferentes estados. De esta manera obtenemos para los elementos de matriz una expresión en forma de promedios respecto del vacío de los productos de operadores de creación y de aniquilación de las partículas y de sus combinaciones lineales. El cálculo de tales promedios se efectúa de acuerdo con las siguientes proposiciones que constituyen el contenido del *teorema de Wick* (1950).

1) El promedio respecto del vacío del producto de un número cualquiera de operadores de bosón c^+, c es igual a la suma de los productos de todos los promedios posibles de pares (enlaces o contracciones) de estos operadores. En cada par los factores deben figurar en el mismo orden que en el producto inicial.

2) Para los operadores de fermión a^+, a, b^+, b (de partículas iguales o distintas) la regla cambia tan sólo en que cada término interviene en la suma con el signo + o el signo — según sea par o impar el número de transposiciones de operadores de fermión que son necesarias para colocar uno junto a otro todos los operadores que se promedian dos a dos.

Es claro que el valor medio puede ser diferente de cero tan sólo si junto con cada uno de los factores a, b, c figuran en el producto también los factores a^+, b^+, c^+ Además, hay que enlazar solamente pares de operadores (a, a^+), ..., que corresponden a estados iguales y, por supuesto, solamente aquellos en los que a^+, ... aparece a la derecha de a, ...: la partícula es primero creada y luego aniquilada (en cambio, los valores medios $\langle 0|a^+ a|0\rangle = 0$, ...).

Si cada par (a, a^+), ... aparece en el producto una sola vez, el teorema de Wick es evidente (el valor medio se reduce entonces a un único producto de promedios de pares). El teorema es también evidente cuando todos los operadores de aniquilación a, b, c aparecen en el producto a la derecha de los operadores de creación a^+, b^+, c^+ (estos productos se califican de *normales*); el valor medio es entonces igual a cero. A partir de aquí es fácil demostrar por inducción completa el teorema

de Wick para el caso general en que un mismo par de operadores aparece en el producto un cierto número (k) de veces.

Consideremos el valor medio $\langle 0|..cc^+..|0\rangle$ en el cual un par de operadores de bosón c, c^+ aparece k veces (los razonamientos que siguen son del todo análogos para los operadores de fermión). Permutando los factores c, c^+ en un cierto par, obtendremos, basándonos en las reglas de conmutación,

$$\langle 0|..cc^+..|0\rangle = \langle 0|..c^+c..|0\rangle + \langle 0|..1..|0\rangle. \tag{78.2}$$

El valor medio $\langle 0..1..|0\rangle$ contiene $k-1$ pares y para él se supone válido el teorema de Wick. Por otra parte, si se desarrolla el valor medio $\langle 0|..cc^+..|0\rangle$ siguiendo la regla del teorema de Wick, dicho valor medio diferirá del valor medio $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$ precisamente en el término

$$\langle 0|..1..|0\rangle \langle 0|\ cc^+|\ 0\rangle = \langle 0|..1..|0\rangle$$

(al desarrollar $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$ el término análogo $\langle 0|..1..|0\rangle$ $\langle 0|c^+c|0\rangle = 0$). Por ello, de (78.2) se sigue que si el teorema de Wick es válido para el elemento de matriz $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$, también lo es después de permutar c y c^+. Dado que para un determinado orden (el normal) de los factores el teorema de Wick es válido evidentemente, dicho teorema es por ello válido en el caso general*.

Dado que el teorema de Wick es válido para los productos de operadores a, b,..., también lo es para productos cualesquiera que contengan, junto con los operadores a, b, ..., también sus combinaciones lineales ψ, $\bar{\psi}$, A. Aplicando este teorema al elemento de matriz (78.1), éste aparece como suma de términos cada uno de los cuales será el producto de ciertos promedios de pares. Entre estos últimos se encontrarán contracciones de operadores ψ, $\bar{\psi}$, A con operadores «exteriores» — es decir, con los operadores de creación de las partículas iniciales o los de aniquilación de las partículas finales—. Estos enlaces se expresan mediante las funciones de onda de las partículas iniciales y finales de acuerdo con las fórmulas:

---

* Como ejemplo escribamos los valores medios respecto del vacío de los productos de cuatro operadores (dos pares idénticos). Para operadores de bosón tenemos

$$\langle 0|cc^+cc^+|0\rangle = \widehat{cc^+}\ \widehat{cc^+} = 1,$$

$$\langle 0|ccc^+c^+|0\rangle = \underbrace{c\ \widehat{c\ c^+}c^+}c^+ + \underbrace{\widehat{c\ c}\ c^+}c^+ = 2,$$

donde las contracciones se designan por vínculos. Es fácil comprobar que este mismo resultado se obtendría también mediante el cálculo directo según los elementos de matriz. Así,

$$\langle 0|ccc^+c^+|0\rangle = \langle 0|c|1\rangle\ \langle 1|cc^+|1\rangle\ \langle 1|\ c^+\ |0\rangle = 1\cdot 2\cdot 1.$$

Para los operadores de fermión, el mismo enlace da

$$\langle 0|aa^+aa^+|0\rangle = 1,$$
$$\langle 0|aaa^+a^+|0\rangle = 1 - 1 = 0$$

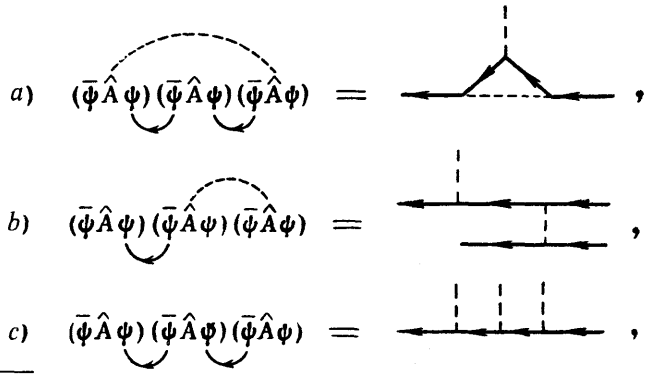
(la última igualdad, naturalmente, era de prever basándose en el principio de Pauli: la creación de dos fermiones en un mismo estado es imposible).

$$\langle 0|\,\mathrm{A}c_p^+|\,0\rangle = A_p, \quad \langle 0|\,c_p\,\mathrm{A}|\,0\rangle = A_p^*,$$
$$\langle 0|\,\psi a_p^+|\,0\rangle = \psi_p, \quad \langle 0|\,a_p\,\bar{\psi}|\,0\rangle = \bar{\psi}_p, \tag{78.3}$$
$$\langle 0|\,b_p\psi|\,0\rangle = \psi_{-p}, \quad \langle 0|\,\bar{\psi}b_p^+|\,0\rangle = \bar{\psi}_{-p},$$

donde A_p, ψ_p son funciones de onda de fotón y de electrón con impulsos $\boldsymbol{p}$ (al igual que en los §§ 74, 75 no escribimos, para abreviar, los índices de polarización). Se encontrarán también contracciones de operadores « interiores » que siguen al signo de productos-T. Dado que al aplicar el teorema de Wick el orden de los factores se conserva en cada par enlazado, en estos enlaces se conserva también el orden cronológico de los operadores, con lo cual éstos se substituyen por los correspondientes propagadores *.

Cada uno de los términos de la suma en que se descompone el elemento de matriz como resultado de su desarrollo de acuerdo con el teorema de Wick, se representa por un determinado diagrama de Feynman. El diagrama de n-ésima aproximación contiene n vértices con cada uno de los cuales se encuentra en correspondencia una de las variables de integración — uno de los 4-vectores $x_1, x_2, \ldots$. En cada vértice se unen tres rayos — dos de trazo continuo (líneas de electrón) y uno de trazos (línea de fotón), a los que corresponden operadores de electrón (ψ y $\bar{\psi}$) y de fotón (A) como funciones de una misma variable x. Además, al operador ψ corresponde la línea que incide en dicho vértice, y al $\bar{\psi}$, la que parte de él.

Para ilustrar estas ideas presentaremos algunos ejemplos de correspondencia entre diagramas y términos del elemento de matriz de 3.ª aproximación. Prescindiendo del signo de integral y del signo T y no indicando los argumentos de los operadores, escribiremos estos términos simbólicamente en la forma



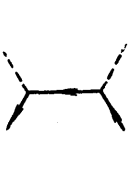
(78.4)

* Acerca de esto último hay que hacer la siguiente observación. Al demostrar el teorema de Wick hemos utilizado las reglas de conmutación de los operadores c, c$^+$, que tienen únicamente sentido para los fotones reales (« transversales »). Los operadores « exteriores » c_i^+, c_f corresponden, claro está, precisamente a tales fotones (los iniciales y los finales). En cambio los operadores A (que siguen al signo de producto-T) conforme se indicó en el § 77, no sólo representan campos electromagnéticos transversales. La situación es aquí la misma que cuando se calculó $D_{\mu\nu}$ en el § 77. En virtud de la invariancia relativista y la de contraste, basta demostrar el teorema para aquellos productos (es decir, aquellas componentes de los tensores $\langle 0|TA_\mu A_\nu \ldots|0\rangle$) que vienen determinados por las partes transversales de los potenciales. Con ello el teorema será también válido para productos cualesquiera.

d) $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi) =$

Para que resulte más intuitivo, los enlaces de electrón y de fotón se han representado, al igual que en el diagrama, por vínculos de trazo continuo y de trazos, respectivamente. La dirección de las flechas en los enlaces de electrón — de $\bar{\psi}$ a ψ — corresponde a su sentido en los diagramas. Para los enlaces interiores de fotón, el sentido es indiferente (lo que se manifiesta también en la paridad del propagador de fotón como función de $x - x'$).

Entre los términos obtenidos de esta manera los hay que son equivalentes, difiriendo entre sí tan sólo en la permutación de los números de los vértices — es decir, en la correspondencia entre vértices y números de las variables $x_1, x_2, \ldots$, esto es, sencillamente en la designación de las variables de integración. El número de tales permutaciones es igual a $n!$ Este factor reduce al factor $1/n!$ en (78.1), con lo cual ya no es necesario considerar los diagramas con vértices permutados. Con esta situación nos encontramos ya en los §§ 74, 75. Así, son equivalentes los dos diagramas de 2.ª aproximación:

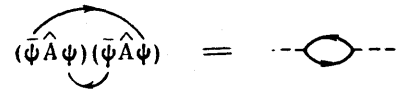
$(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi) =$ 

$(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi) =$ (78.5)

En (78.4) y (78.5) se han representado solamente los enlaces interiores, a los que corresponden líneas interiores de los diagramas (electrones y fotones virtuales). Los operadores libres que quedan se enlazan con operadores exteriores, y el resultado de este enlace es el establecimiento de una correspondencia entre los terminales libres de los diagramas y las partículas iniciales y finales. En estas condiciones, $\bar{\psi}$ (al enlazarse con los operadores a_f o b_i^+) da una línea de electrón final o de positón inicial, y ψ (al enlazarse con a_i^+ o b_f), una de electrón inicial o de positón final. Un operador libre A (que se enlaza con c_i^+ o c_f) puede corresponder tanto a un fotón inicial como a uno final. De esta manera se obtienen diagramas topológicamente idénticos (es decir, constituidos por un número igual de líneas igualmente dispuestas) que difieren entre sí tan sólo en las permutaciones de partículas iniciales y finales entre los terminales libres incidentes y emergentes.

Cada una de tales permutaciones equivale, evidentemente, a una determinada permutación de los operadores exteriores a, b, ... en (78.1). Es claro, por ello, que si entre las partículas iniciales o entre las finales figuran fermiones idénticos, los signos relativos de los diagramas que difieren en un número impar de transposiciones de terminales libres deben ser opuestos.

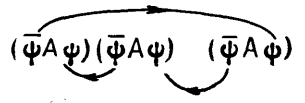
Una sucesión no interrumpida de flechas de trazo continuo forma en los diagramas una línea de electrón, a lo largo de la cual las flechas conservan siempre el mismo sentido. Una de estas líneas puede o bien tener dos terminales libres, o formar un lazo cerrado. Así, el diagrama



presenta un lazo con dos vértices. La conservación del sentido a lo largo de una línea de electrón es la expresión gráfica de la conservación de la carga: la carga que « incide » en cada vértice es igual a la carga que « emerge » de él.

La disposición de los índices bispinoriales a lo largo de una línea de electrón continua corresponde a la de escribir las matrices de izquierda a derecha en el movimiento opuesto al de las flechas. Los índices bispinoriales de las líneas de electrón diferentes nunca se entrelazan. A lo largo de una línea no cerrada, la sucesión de índices acaba, en los terminales libres, en funciones de onda de electrón (o de positón). En cambio, en un lazo cerrado, la sucesión de índices se cierra también, es decir, a un lazo corresponde la traza del producto de las matrices dispuestas a lo largo de él. Es fácil ver que esta traza debe tomarse con signo menos.

En efecto, a un lazo con k vértices corresponde un conjunto de k contracciones



(u otro conjunto equivalente que difiere de éste en la permutación de los vértices). En la $(k-1)$-ésima contracción los operadores ψ y $\bar{\psi}$ se encuentran ya uno junto a otro precisamente en el orden en el que deben aparecer en el propagador de electrón ($\bar{\psi}$ a la derecha de ψ). En cambio, los operadores que se encuentran en los extremos se llevan uno junto a otro mediante un número par de transposiciones con otros operadores-ψ, después de lo cual aparecen en el orden $\bar{\psi}\psi$.

Dado que

$$\langle 0 \mid T\,\bar{\psi}'\psi \mid 0\rangle = -\langle 0 \mid T\,\psi\bar{\psi}' \mid 0\rangle$$

(cf. la nota en la pág. 321), la substitución de esta contracción por el correspondiente propagador determina el cambio de signo de toda la expresión.

El paso a la representación de impulsos en el caso general se efectúa de manera del todo análoga a como se hizo en los §§ 74, 75. Junto con la regla general de conservación del 4-impulso, deben cumplirse también las « leyes de conservación » en cada vértice. Sin embargo, todas estas leyes pueden resultar insuficientes para una determinación unívoca de los impulsos de todas las líneas interiores del diagrama. En tales casos hay que integrar todavía respecto de todos los impulsos interiores que queden indeterminados [elemento diferencial $d^4p/(2\pi)^4$] en todo el espacio-p (en particular, respecto de dp_0 desde $-\infty$ a $+\infty$).

En los razonamientos que preceden se ha supuesto implícitamente que el papel de perturbación lo representa la interacción entre las propias partículas que participan « activamente » en la reacción (es decir, entre las partículas cuyo estado cambia como resultado del proceso). De manera análoga se estudia también el caso en que en el problema figura un campo electromagnético exterior, es decir, un campo creado por partículas « pasivas », cuyos estados no cambian en el proceso en cuestión.

Sea $A^{(e)}(x)$ el 4-potencial del campo exterior. Este potencial interviene en el lagrangiano de interacción junto con el operador de fotón A en forma de suma $A + A^{(e)}$ (que se multiplica por el operador corriente j). Dado que $A^{(e)}$ no contiene ningún operador, no puede dar lugar a contracciones con otros operadores. Dicho de otra manera, a un campo exterior corresponderán en el diagrama de Feynman únicamente líneas exteriores.

Representaremos $A^{(e)}$ en forma de integral de Fourier:

$$A^{(e)}(x) = \int A^{(e)}(q)\, e^{-iqx} \frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$
$$A^{(e)}(q) = \int A^{(e)}(x)\, e^{iqx}\, d^4x. \tag{78.6}$$

En las expresiones de los elementos de matriz en la representación de impulsos, el 4-vector q figurará junto con los 4-impulsos de las otras líneas exteriores que corresponden a partículas reales. Cada una de dichas líneas del campo exterior va acompañada de un factor $A^{(e)}(q)$ y hay que considerar una tal línea como « incidente » debido al signo del exponente del factor e^{-iqx} con que aparece $A^{(e)}(q)$ en la integral de Fourier [a una línea « emergente », en cambio, debería asociarse el factor $A^{*(e)}(q)$]. Si al proceder así resulta que la ley de conservación del 4-impulso no fija de manera unívoca los 4-impulsos de todas las líneas del campo exterior (para 4-impulsos dados de todas las partículas reales), para los q que queden « libres » se efectúa la integración [respecto de $d^4q/(2\pi)^4$] al igual que para todos los 4-impulsos indeterminados de las líneas del diagrama.

Si el campo exterior no depende del tiempo, se tendrá

$$A^{(e)}(q) = 2\pi\delta(q^0)\, A^{(e)}(\boldsymbol{q}) \tag{78.7}$$

donde $A^{(e)}(q)$ es la componente tridimensional de Fourier:

$$A^{(e)}(\boldsymbol{q}) = \int A^{(e)}(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} d^3x \tag{78.8}$$

A una línea del campo exterior corresponde en este caso $A^{(e)}(\boldsymbol{q})$ y se le atribuye el 4-impulso $q^\mu = (0, \boldsymbol{q})$ siendo iguales las energías de las líneas de electrón que convergen (junto con la línea del campo) en el correspondiente vértice en virtud de la ley de conservación. Para los impulsos tridimensionales $\boldsymbol{p}$ que quedan « libres » de las líneas interiores, hay que efectuar la integración respecto de $d^3p/(2\pi)^3$. La amplitud calculada de esta manera M_{fi} determina, por ejemplo, la sección eficaz de dispersión de acuerdo con (65.25).

Damos a continuación un resumen de las reglas finales de la *técnica de diagramas* de acuerdo con las que se construye la expresión de la amplitud de dispersión en la representación de impulsos.

1) A la n-ésima aproximación de la teoría de perturbaciones corresponden diagramas con n vértices en cada uno de los cuales se unen una línea de electrón incidente y una emergente (líneas de trazo continuo) y una línea de fotón (línea de trazos). En la amplitud del proceso de dispersión intervienen todos los diagramas que poseen terminales libres (líneas exteriores) en número igual al número de partículas iniciales y finales.

2) A cada línea de trazo continuo exterior incidente se asocia la amplitud de un electrón inicial $u(p)$ o de un positón final $u(-p)$ (p es el 4-impulso de la partícula). A cada línea de trazo continuo emergente acompaña la amplitud de un electrón final $\bar{u}(p)$ o de un positón inicial $\bar{u}(-p)$.

3) A cada vértice se asocia el 4-vector $-i\gamma^{\mu}$.

4) A cada línea de trazos incidente exterior se asocia una amplitud de fotón inicial $\sqrt{4\pi}e_{\mu}$, y a una línea emergente, la amplitud $\sqrt{4\pi}e_{\mu}^{*}$ de un fotón final (e es el 4-vector polarización). El índice vectorial μ coincide con el índice de la matriz γ^{μ} en el correspondiente vértice (de modo que se forma el producto escalar $\hat{e}\equiv e\gamma$ ó $\hat{e}^{*}$).

5) A cada línea interior de trazo continuo se asocia el factor $iG(p)$, y a una línea de trazos interior, el factor $-iD_{\mu\nu}(p)$. Los índices tensoriales $\mu\nu$ coinciden con los índices de las matrices γ^{μ}, γ^{ν} en los vértices unidos por la línea de trazos.

6) A lo largo de cada sucesión ininterrumpida de líneas de electrón las flechas conservan su sentido, y la ordenación de los índices bispinoriales, a lo largo de ellas, corresponde a escribir las matrices de izquierda a derecha en el sentido opuesto al de las flechas. A un lazo cerrado de electrón corresponde la traza del producto de las matrices dispuestas a lo largo del mismo.

7) En cada vértice, los 4-impulsos de las líneas que se cortan en él satisfacen la ley de conservación, es decir, la suma de los impulsos de las líneas incidentes es igual a la suma de los impulsos de las líneas emergentes. Los impulsos de los terminales libres son cantidades dadas (que cumplen la regla general de conservación), atribuyéndose a una línea de positón el impulso $-p$. Se integra con relación a los impulsos de las líneas interiores que quedan sin determinar después de tener en cuenta las leyes de conservación en todos los vértices (elemento diferencial $d^4p/(2\pi)^4$].

8) A un terminal incidente libre que corresponde a un campo exterior se asocia el factor $A^{(e)}(q)$; el 4-vector q está ligado con los 4-impulsos de las otras líneas por la ley de conservación en el vértice. Si el campo es constante, a la línea se asocia el factor $A^{(e)}(\boldsymbol{q})$ y hay que integrar respecto de los impulsos tridimensionales de las líneas interiores que quedan sin determinar [elemento diferencial, $d^3p/(2\pi)^3$].

9) El factor común en un diagrama, con el que interviene en iM_{fi}, será e^n. Además, un factor complementario -1 se añade por cada lazo cerrado de electrón en el diagrama y a cada par de terminales exteriores de positón, si estos terminales

son el principio y el fin de una sucesión ininterrumpida de líneas de trazo continuo. Si entre las partículas iniciales o entre las finales figuran electrones o positones, el signo relativo de los diagramas que difieren en un número impar de transposiciones de pares de partículas idénticas (es decir, de los correspondientes terminales exteriores) debe ser opuesto*.

§ 79. Invariancia de cruce

La representación de las amplitudes de dispersión M_{fi} por integrales de Feynman pone de manifiesto su notable simetría, que consiste en lo siguiente.

Cualquiera de las líneas exteriores incidentes de un diagrama de Feynman se puede considerar (sin cambiar el sentido de su flecha) como una partícula en un estado inicial o una antipartícula en un estado final, y cada línea emergente, como una partícula final o una antipartícula inicial. A la vez que se pasa de una partícula a una antipartícula, cambia también el significado del 4-impulso p atribuido a la línea: $p = p_e$ para la partícula (digamos, un electrón) y $p = -p_p$ para el positón. En el caso del fotón, en tanto que partícula realmente neutra, esto significa simplemente pasar de la emisión de un fotón a su absorción, o recíprocamente: una línea exterior de fotón con impulso k corresponde o a la absorción de un fotón de impulso $k_{\text{abs}} = k$ o a la emisión de un fotón dé impulso $k_{\text{em}} = -k$.

Este cambio del significado de las líneas exteriores es equivalente al paso de un canal de cruce de reacción a otros canales. De aquí se sigue que exactamente la misma amplitud, como función de los impulsos de los terminales libres de los diagramas, describe todos los canales de reacción** Según sea el canal, cambia únicamente el significado de los argumentos de la función: al pasar de una partícula a una antipartícula se substituye $p_i \to -p_f$, donde p_i es el 4-impulso de la partícula inicial (en un canal) y p_f el 4-impulso de la partícula final (en el otro canal). Esta propiedad de la amplitud de dispersión se llama *simetría de cruce* o *invariancia de cruce*.

En términos de las amplitudes introducidas en el § 71, que son funciones de los invariantes cinemáticos, cabe decir que estas funciones serán exactamente las mismas para todos los canales, pero para cada canal sus argumentos toman valores en su propia región física. En otras palabras, las integrales de Feynman determinan las amplitudes invariantes como funciones analíticas; sus valores en las diferentes regiones físicas son prolongación analítica de una función dada en una de las regiones. Dado que los integrandos de las integrales de Feynman presentan singula-

* Para precisar la última regla añadiremos que, en cualquier caso, deben tener el mismo signo los diagramas con líneas de trazo continuo iguales, es decir, los diagramas que resultarían ser idénticos después de suprimir en ellos todas las líneas de fotón.

Recordaremos también que cuando existen fermiones idénticos el signo común de la amplitud es puramente convencional.

** Si un cierto canal está prohibido por la conservación del 4-impulso, la probabilidad de la transición se anula automáticamente por la función-δ que figura en (65.5) como factor común.

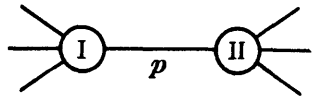
ridades, también las amplitudes invariantes poseerán singularidades que se determinan a partir de las expresiones de dichas integrales (teniendo en cuenta la regla para sortear los polos). Si las amplitudes invariantes se calculan para un determinado canal mediante integrales de Feynman, también su prolongación analítica a los otros canales tendrá en cuenta automáticamente tales singularidades.

Hay que subrayar que la invariancia de cruce es algo más general que las propiedades de la matriz de dispersión resultantes de las condiciones generales de simetría espacio-temporal. Estas últimas exigen la igualdad de las amplitudes de los procesos que se obtienen uno del otro mediante la permutación de los estados inicial y final acompañada de la substitución de todas las partículas por antipartículas (conservando invariables los impulsos $\boldsymbol{p}$ de todas las partículas y el signo de las proyecciones de sus momentos cinéticos). Esta es la condición que impone la invariancia-*CPT**. En cambio, la invariancia de cruce permite efectuar dicha transformación no sólo para todas las partículas a la vez, sino también para cada partícula por separado.

§ 80. Partículas virtuales

Las líneas interiores de los diagramas de Feynman representan en la teoría invariante de perturbaciones un papel análogo al papel de los estados intermedios en la teoría « ordinaria ». El carácter de estos estados, sin embargo, es diferente en ambas teorías. En la teoría ordinaria, el impulso (tridimensional) se conserva en los estados intermedios, pero no se conserva la energía; en este sentido se dice de ellos que son *estados virtuales*. En la teoría invariante, en cambio, el impulso y la energía intervienen en plan de igualdad. En los estados intermedios se conserva el 4-impulso en conjunto (como resultado del hecho de que en los elementos de la matriz-*S* la integración se efectúa tanto respecto de las coordenadas, como con relación al tiempo, consiguiéndose así la invariancia de la teoría). Sin embargo, cuando así se procede se viola en los estados intermedios el enlace inherente a las partículas reales entre energía e impulso (expresado por la igualdad $p^2 = m^2$). En este sentido, se habla de *partículas virtuales* intermedias. La relación entre el impulso y la energía de una partícula virtual es arbitraria — únicamente aquella que viene impuesta por la conservación del 4-impulso en los vértices.

Consideremos un diagrama constituido por dos partes (I y II) unidas por una línea. No interesándonos la estructura interna de estas partes, representaremos el diagrama esquemáticamente en la forma



(80.1)

* Hay que observar que la descripción formal del paso de una de las indicadas reacciones a otra mediante el cambio de signo de todos los 4-impulsos en los diagramas de Feynman corresponde al significado de la operación *CPT* en tanto que 4-inversión.

(las líneas representadas pueden ser tanto de trazo continuo como de trazos). En virtud de la ley general de conservación, la suma de los 4-impulsos de las líneas exteriores de las partes I y II son iguales. En virtud de la conservación en cada vértice, a esta misma cantidad será igual también el 4-impulso p de la línea interior que une las partes I y II. En otras palabras, este impulso está unívocamente determinado, de modo que en el elemento de matriz no hay que integrar respecto de él.

Según sea el canal de reacción, el cuadrado p^2 puede ser tanto positivo como negativo. Existe siempre un canal tal que en él será $p^2 > 0$ *. Entonces, por sus propiedades formales, la partícula virtual se convierte en algo totalmente análogo a una partícula real, con una masa real $M = \sqrt{p^2}$. Para ella se puede introducir un sistema de reposo, se puede determinar su spin, etc.

El propagador de fotón (77.11) coincide por su estructura tensorial con la matriz densidad de una partícula no polarizada de spin 1 con masa diferente de cero:

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right)$$

(4-tensor ortogonal al 4-impulso). Por otra parte, el propagador (como magnitud construida como expresión cuadrática a partir de los operadores del campo) representa para una partícula virtual un papel análogo al de la matriz densidad de una partícula real. Por ello, a un fotón virtual hay que atribuirle, al igual que a uno real, spin 1. Sin embargo, en contraste con un fotón real con sus dos polarizaciones independientes, el fotón virtual, en tanto que « partícula » de masa no nula, puede tener las tres polarizaciones.

La función propagación de electrón es

$$G \backsim \hat{p} + m.$$

Aquí m es la masa del electrón real mientras que la « masa » de la partícula virtual vale $M = \sqrt{p^2}$. Haciendo

$$\hat{p} + m = \frac{M+m}{2M}(\hat{p} + M) + \frac{M-m}{2M}(\hat{p} - M), \tag{80,2}$$

vemos que el primer término corresponde a la matriz densidad de una partícula de masa M y spin 1/2, y el segundo término, a la matriz densidad de la correspondiente « antipartícula » [cf. (29.10) y (29.17)]. Recordando que una partícula y su antipartícula tienen paridades intrínsecas diferentes (§ 27), llegamos a la conclusión de que a un electrón virtual hay que atribuirle el mismo spin 1/2, pero que es imposible atribuirle una paridad determinada.

Una peculiaridad característica del diagrama (80.1) consiste en que se puede

* Tal es, por ejemplo, el canal (si es admisible energéticamente) en el cual todos los terminales libres de la parte I corresponden a las partículas iniciales, y los de la parte II, a las finales. Entonces es $p = P_i$ (suma de los 4-impulsos de todas las partículas iniciales) y en el sistema del centro de masa se tiene $p = (P_i^0, 0)$, de modo que $p^2 > 0$.

descomponer en dos partes no ligadas entre sí sin más que cortar una sola línea interior *. Esta línea corresponde en tal caso a un estado intermedio *de una sola partícula* — a un estado con una única partícula virtual —. La amplitud de dispersión que corresponde a dicho diagrama contiene un factor característico (¡que no se integra!)

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0},$$

que procede de la línea interior p (siendo m la masa del electrón si la línea es de electrón o $m = 0$ si es una línea de fotón). En otras palabras, la amplitud de dispersión posee un polo para aquellos valores p para los cuales la partícula virtual se convertiría en partícula física ($p^2 = m^2$). Esta situación es análoga a la que se presenta cuando en la mecánica cuántica no-relativista la amplitud de dispersión tiene polos para ciertos valores de la energía, valores que corresponden a estados de enlace del sistema constituido por las partículas que chocan (III, § 128).

Consideremos el diagrama (80.1) para el canal de reacción en el cual todos los terminales libres a la derecha corresponden a partículas iniciales, y todos los de la izquierda a partículas finales; con esto $p^2 > 0$. Entonces cabe decir que en el estado intermedio el sistema de partículas iniciales se transforma en una partícula virtual. Ello es posible tan sólo si dicha transformación no contradice las leyes necesarias de conservación (aparte la conservación del 4-impulso): conservación del momento cinético, de la carga, de la paridad de carga, etc. En esto consiste precisamente la condición necesaria para que se presenten los llamados *diagramas polares*. Si existen para uno de los canales, dichos diagramas existirán también, por ello mismo, para los demás canales de reacción en virtud de la invariancia de cruce.

Por ejemplo, las leyes de conservación indicadas no impiden el que aparezca un electrón virtual de acuerdo con $e + \gamma \to e$. Esta posibilidad corresponde a un polo de la amplitud del efecto Compton (y, en consecuencia, también para otro canal de esta reacción — la aniquilación de un par electrón-positón con emisión de dos fotones —). La aparición de un fotón virtual de acuerdo con $e^- + e^+ \to \gamma$ corresponde a un polo de la amplitud de dispersión de un electrón por un positón y, por lo tanto, también para la dispersión electrón-electrón. En cambio, a partir de dos fotones no es posible obtener ni un electrón virtual ni un fotón virtual (la transformación $\gamma + \gamma \to e$ está prohibida por la conservación de la carga y del momento cinético y la transformación $\gamma + \gamma \to \gamma$ lo está por la conservación de la paridad de carga). De acuerdo con esto, la amplitud de dispersión fotón-fotón no puede contener diagramas polares.

El origen de las singularidades polares de las amplitudes de dispersión, que fijamos partiendo de las integrales de Feynman, tiene en realidad un carácter

* Esta propiedad la poseen los diagramas de casi todos los procesos en la primera aproximación no nula.

más general no ligado con la teoría de perturbaciones. Probemos que estas singularidades aparecen ya como consecuencia de la condición de unitariedad (72.2).

Supongamos que entre los n estados intermedios que figuran en (72.2) hay uno que corresponde a una partícula única. La contribución de este estado es:

$$(T_{fi} - T_{if}^*)^{(\text{unip})} = i\,(2\pi)^4 \sum_{\lambda} \int \delta^{(4)}\,(P_f - p)\; T_{fn}\; T_{in}^* \frac{V d^3p}{(2\pi)^3},$$

donde p y λ son el 4-impulso y la helicidad de la partícula intermedia. La integración respecto de d^3p la substituiremos por la integración respecto de d^4p (en la región $p^0 \equiv \varepsilon > 0$) de acuerdo con

$$d^3p \to 2\varepsilon\delta\,(p^2 - M^2)\,d^4p$$

(M es la masa de la partícula intermedia). La integración elimina la función-δ $\delta^{(4)}(P_f - p)$; pasando luego de las amplitudes T_{fi} a las amplitudes M_{fi} según (65.10), obtendremos

$$(M_{fi} - M_{if}^*)^{(\text{unip})} = 2\pi i\,\delta\,(p^2 - M^2) \sum_{\lambda} M_{fn}\, M_{in}^*. \tag{80.3}$$

Suponiendo que se cumplen las invariancias T y P, tendremos (salvo un factor de fase) $M_{if} = M_{f'i'}$, donde los estados i', f' difieren de los i, f únicamente en las helicidades de las partículas (para iguales impulsos). Sumando la igualdad (80.3) y la correspondiente a $M_{f'i'} - M_{i'f'}^*$, obtendremos

$$\operatorname{Im} \bar{M}_{fi}^{(\text{unip})} = -\pi\delta\,(p^2 - M^2)\,R, \tag{80.4}$$

donde se ha hecho

$$\bar{M}_{fi} = M_{fi} + M_{f'i'},$$

$$R = -\sum_{\lambda} (M_{fn}\, M_{in}^* + M_{f'n}\, M_{i'n}^*).$$

De aquí se sigue precisamente que $\bar{M}_{fi}$, considerada como función analítica de $p^2 = P_i^2 = P_f^2$ presenta un polo en $p^2 = M^2$. De acuerdo con (76.18) tenemos para la parte correspondiente al polo

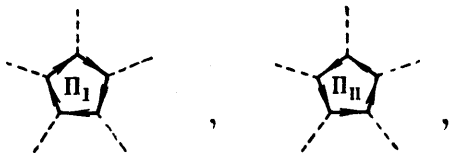
$$\bar{M}_{fi}^{(\text{unip})} = \frac{R}{p^2 - M^2 + i0}. \tag{80.5}$$

Las transiciones reales a un estado de una sola partícula son posibles únicamente para un valor $P_i^2 = P_f^2$, igual a M^2. De esta manera, hemos obtenido la estructura efectiva de la amplitud de dispersión que corresponde a un diagrama de la forma (80.1).

Finalmente, examinemos una importante propiedad de los diagramas que contienen lazos cerrados de electrón. Esta propiedad se puede obtener fácilmente aplicando a un fotón virtual el concepto de paridad de carga: a un fotón virtual, como

también a uno real, hay que atribuir una determinada paridad de carga (negativa)*.

Si un diagrama contiene un lazo cerrado (con un número de vértices $N > 2$), junto con este diagrama debe figurar también en la amplitud del proceso considerado otro diagrama que difiere del primero tan sólo en el sentido en que se recorre el lazo (para $N = 2$ el concepto de sentido de recorrido carece, evidentemente, de significado). « Cortemos » estos lazos mediante líneas de trazos que inciden sobre él. Obtendremos entonces dos lazos Π_I y Π_{II}:



(80.6)

que se pueden considerar como diagramas que determinan la amplitud del proceso de transformación de un conjunto de fotones (reales o virtuales) en otro; el número N es, según esto, la suma de los números de fotones iniciales y finales. Pero la conservación de la paridad de carga prohibe la transformación de un número par de fotones en un número impar. En consecuencia, cuando N es impar, la suma de las expresiones correspondientes a los lazos (80.6) debe anularse. Por consiguiente, se anula también la contribución total de los dos diagramas a la amplitud de dispersión que contienen estos lazos como partes constituyentes (*teorema de Furry; W. H. Furry*, 1937).

Así, pues, al formar la amplitud de un proceso cualquiera puede siempre prescindirse de los diagramas que contienen lazos con un número impar de vértices.

Investiguemos más detalladamente el origen de esa compensación mutua de los diagramas. A un lazo cerrado de electrón corresponde una expresión (para impulsos dados de las líneas de fotón $k_1, k_2, \ldots, k_N$)

$$\int d^4p \cdot \mathrm{Tr}\,[\hat{e}_1 G(p) \hat{e}_2 G(p + k_1) \ldots], \tag{80.7}$$

donde $p, p + k_1, \ldots$ son los impulsos de las líneas de electrón (que quedan sin determinar del todo una vez se ha tenido en cuenta las leyes de conservación en los vértices). Apliquemos a las matrices γ^μ y G la operación de conjugación de carga, es decir, substituyámoslas por $U_C^{-1}\gamma^\mu U_C$ y $U_C^{-1} G U_C$. La expresión (80.7) no cambia con esto, ya que la traza del producto de matrices es invariante respecto de dicha transformación. Por otra parte, según (26.3)

---

* Esto se sigue de las mismas consideraciones acerca del operador de la interacción electromagnética que actúa en cada vértice expuestas al final del § 13 para un fotón real.

$$U_C^{-1} \gamma^\mu U_C = -\tilde{\gamma}^\mu, \tag{80.8}$$

y por esto

$$U_C^{-1} G(p) U_C = \frac{-p\tilde{\gamma} + m}{p^2 - m^2} = \tilde{G}(-p). \tag{80.9}$$

Pero la substitución de $G(p)$ por la matriz transpuesta con el signo de p cambiado, significa, evidentemente, invertir el sentido de recorrido del lazo, de modo que los sentidos de todas las flechas se cambian en los opuestos. En otras palabras, la aplicación de dicha transformación hace pasar de uno de los lazos al otro, apareciendo además el factor $(-1)^N$ que procede de la substitución (80.8) en cada vértice. Así, pues,

$$\Pi_I = (-1)^N \Pi_{II}, \tag{80.10}$$

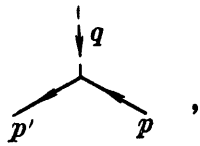
es decir, las contribuciones de los dos lazos son iguales para un número par de vértices e iguales y de signos opuestos cuando dicho número es impar.

CAPÍTULO 9

INTERACCIÓN DE ELECTRONES

§ 81. Dispersión de un electrón en un campo exterior

La dispersión elástica de un electrón en un campo exterior constante constituye el proceso más simple, que existe ya en la primera aproximación de la teoría de perturbaciones (primera aproximación de Born). A ella corresponde el diagrama con un sólo vértice



, (81.1)

donde p y p' son los 4-impulsos inicial y final del electrón y $q = p' - p$. Dado que la energía del electrón se conserva en la dispersión en un campo constante ($\varepsilon = \varepsilon'$), se tendrá $q = (0, \boldsymbol{q})$*.

La correspondiente amplitud de dispersión se escribe

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\,\hat{A}^{(e)}(q)\;u(p), \tag{81.2}$$

donde $A^{(e)}(q)$ es la componente del desarrollo espacial de Fourier del campo exterior. La sección eficaz de dispersión vale [de acuerdo con (65.26)]

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}\,|M_{fi}|^2\,d\sigma'. \tag{81.3}$$

Para un campo electrostático $A^{(e)} = (A^{(e)}_0, 0)$, de manera que

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\,\gamma^0\,u(p)\,A^{(e)}_0(\boldsymbol{q}) = -eu^*(p')\,u(p)\,A^{(e)}_0(\boldsymbol{q}). \tag{81.4}$$

* En el caso en que existe un campo exterior, este diagrama no está prohibido, naturalmente, por la ley de conservación del 4-impulso [como ocurriría en el diagrama (71.19) con un fotón real]: el cuadrado q^2, en contraste con el cuadrado del 4-impulso del fotón real, no tiene por qué ser igual a cero; de la integral de Fourier que representa al campo exterior, se elige automáticamente la componente que corresponde al valor necesario de q.

En el caso no-relativista las amplitudes bispinoriales de las ondas planas $u(p)$ se reducen a las amplitudes no-relativistas (dos componentes). Para un electrón no polarizado dichas amplitudes constituyen una cantidad independiente de p y, además, en virtud de la condición de normalización que hemos adoptado se tiene $u^*u = 2m$. Teniendo en cuenta esto, obtendremos

$$d\sigma = \left| -\frac{m}{2\pi} U(\boldsymbol{q}) \right|^2 d\sigma',$$

donde $U(\boldsymbol{q}) = eA_0^{(e)}(\boldsymbol{q})$ es la componente de Fourier de la energía potencial del electrón en el campo; esta expresión coincide con la conocida fórmula de Born (III; 125.4).

En el caso relativista general, la sección eficaz de dispersión de electrones no polarizados se obtiene promediando el cuadrado $|M_{fi}|^2$ respecto de las polarizaciones iniciales y sumando con relación a las finales, es decir, formando la cantidad

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2,$$

donde la suma se extiende a todas las direcciones del spin de los electrones inicial y final; el factor 1/2 transforma una de estas sumas en promedio. Según las reglas expuestas en el § 66, se obtendrá

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 2\mathrm{Tr}\rho\hat{A}^{(e)*}\rho'\hat{A}^{(e)} = \frac{1}{2} |A_0^{(e)}(\boldsymbol{q})|^2 \mathrm{Tr}(m+\hat{p})\gamma^0(m+\hat{p}')\gamma^0.$$

Para calcular la traza observemos que $\gamma^0\hat{p}'\gamma^0 = \hat{\bar{p}}'$, donde $\bar{p}' = (\varepsilon', -\boldsymbol{p}')$, y por ello

$$\frac{1}{4} \mathrm{Tr}(m+\hat{p})\gamma^0(m+\hat{p}')\gamma^0 = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(m+\hat{p})(m+\hat{\bar{p}}') =$$

$$= m^2 + p\bar{p}' = \varepsilon^2 + m^2 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' = 2\varepsilon^2 - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2}.$$

De aquí se sigue la sección eficaz

$$d\sigma = \frac{e^2 |A_0^{(e)}(\boldsymbol{q})|^2}{4\pi^2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\boldsymbol{q}^2}{4\varepsilon^2}\right) d\sigma' . \tag{81.5}$$

Para un campo creado por una distribución estática de cargas con densidad $\rho(\boldsymbol{r})$, se tiene

$$A_0^{(e)}(\boldsymbol{q}) = \frac{4\pi\rho(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2} , \tag{81.6}$$

donde $\rho(\boldsymbol{q})$ es la imagen de Fourier de la distribución $\rho(\boldsymbol{r})$ (factor de forma). En particular, para el campo coulombiano de una carga puntual Ze tenemos: $\rho(\boldsymbol{q}) = Ze$. Entonces la sección eficaz de dispersión es

$$d\sigma = d\sigma' \frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{\boldsymbol{q}^4} \left(1 - \frac{\boldsymbol{q}^2}{4\varepsilon^2}\right) \tag{81.7}$$

(*N. F. Mott*, 1929). El cuadrado $\boldsymbol{q}^2 = 4\boldsymbol{p}^2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$, donde θ es el ángulo de dispersión. En consecuencia, debido a su dependencia angular, la expresión ante el paréntesis puede llamarse sección eficaz de Rutherford:

$$d\sigma_{\text{Ruth}} = do\,\frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{\boldsymbol{q}^4} = do\,\frac{(Ze^2)^2\varepsilon^2}{4\boldsymbol{p}^4}\,\operatorname{sen}^{-4}\frac{\theta}{2} \tag{81.8}$$

(en el límite no-relativista el coeficiente $\varepsilon^2/\boldsymbol{p}^4 \to 1/m^2v^4$). Así, pues, *

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Ruth}}\left(1 - v^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{81.9}$$

Obsérvese que en el caso ultrárrelativista la distribución angular difiere de la no-relativista por la fuerte disminución de la dispersión hacia atrás (para $\theta \to \pi$: $d\sigma/d\sigma_{\text{Ruth}} \to m^2/\varepsilon^2$).

En el caso ultrarrelativista, (81.7) da para la dispersión a ángulos pequeños

$$d\sigma = \frac{4\,(Ze^2)^2}{\varepsilon^2\theta^4}\,do' \tag{81.10}$$

Aunque esta fórmula la hemos obtenido en la aproximación de Born (es decir, suponiendo $Ze^2 \ll 1$), sin embargo sigue siendo válida también cuando $Ze^2 \sim 1$ (para ángulos $\theta \lesssim m/\varepsilon$). Cabe comprobar que así es utilizando la función de onda ultrarrelativista exacta (respecto de Ze^2) $\psi^+_{\varepsilon\boldsymbol{p}}$ (39.10). Esta solución, que es válida en el dominio (39.2), sigue siendo válida, naturalmente, en la región asintótica de valores de r arbitrariamente grandes. Aquí se tiene

$$F \sim 1 + \text{const}\cdot e^{i(pr - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}, \qquad \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla F}{\varepsilon} \sim 1 - \cos\theta \sim \theta^2 \ll 1,$$

de modo que el término correctivo se conserva pequeño, como debía ser. Pero una función de onda de la forma $e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}F$, que coincide formalmente con la función no-relativista (con un cambio evidente de los parámetros), tiene exactamente la misma expresión asintótica y, por consiguiente, también para la sección eficaz se obtiene la expresión de Rutherford.

Para el cálculo de la sección eficaz de electrones arbitrariamente polarizados cabría utilizar, según las reglas generales, la matriz densidad (29.13). En el caso presente, sin embargo, se puede obtener el resultado de manera menos pesada representando las amplitudes bispinoriales $u(p')$ y $u(p)$ en la forma (23.9); multiplicándolas, se obtiene

$$u^*(p')\,u(p) = w'^*\{\varepsilon + m + (\varepsilon - m)(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\}\,w,$$

* La diferencia que expresa esta fórmula entre $d\sigma$ y $d\sigma_{\text{Ruth}}$ es específica de las partículas con spin 1/2. En la dispersión de partículas de spin 0 (si su movimiento en un campo electromagnético se describiera por una ecuación de onda) se obtendría $d\sigma = d\sigma_{\text{Ruth}}$. A primera vista puede resultar sorprendente que el factor que expresa este efecto puramente cuántico no contiene $\hbar$. Sin embargo, hay que recordar que la condición de aplicabilidad de la aproximación de Born ($e^2/\hbar v \ll 1$) es opuesta a la condición de que el movimiento en el campo de Coulomb sea cuasiclásico y, por lo tanto, la transición al caso clásico en la fórmula (81.9) es imposible.

o bien, utilizando la forma (33.5),

$$u^*(p')\,u(p) = w'^*\,\mathrm{f}\,w, \tag{81.11}$$

donde *

$$\mathrm{f} = A + B\,\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma},$$
$$A = (\varepsilon + m) + (\varepsilon - m)\cos\theta, \qquad B = -i(\varepsilon - m)\operatorname{sen}\theta,$$
$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'}{\operatorname{sen}\theta}. \tag{81.12}$$

La cantidad con dos componentes (espinor tridimensional) w es la función de onda no-relativista espinorial del electrón. El paso a estados parcialmente polarizados se consigue, por ello, substituyendo los productos $w_\alpha w^*_\beta$ (α, β son índices espinoriales) por la matriz 2×2 densidad no-relativista $\rho_{\alpha\beta}$. De esta manera, hay que substituir

$$|M_{fi}|^2 \to e^2\,|A_0^{(e)}(\boldsymbol{q})|^2\,\mathrm{Tr}\,\rho\,(A - B\,\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\rho'\,(A + B\,\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}),$$

donde

$$\rho = \tfrac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\zeta}), \qquad \rho' = \tfrac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\zeta}'),$$

y ζ y ζ' son los vectores polarización inicial y final que ve el detector. El cálculo de la traza conduce al resultado

$$d\sigma = d\sigma_0\left\{1 + \frac{(A^2 - |B|^2)\,\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\zeta}' + 2\,|B|^2(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\zeta})(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\zeta}') + 2A|B|\,\mathbf{v}\cdot[\boldsymbol{\zeta}\times\boldsymbol{\zeta}']}{A^2 + |B|^2}\right\}, \tag{81.13}$$

donde $d\sigma_0$ es la sección eficaz de dispersión de los electrones no polarizados.

Representando la expresión entre llaves de (81.13) en la forma $\{1 + \zeta^{(f)}\cdot\boldsymbol{\zeta}'\}$, hallamos la polarización propia $\zeta^{(f)}$ del electrón final (que hay que distinguir de la polarización detectada ζ', véase § 66)**:

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{(A^2 - |B|^2)\,\boldsymbol{\zeta} + 2|B|^2\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\zeta})\mathbf{v} + 2A|B|\,[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\zeta}]}{A^2 + |B|^2}. \tag{81.14}$$

Vemos, pues, que los electrones dispersados están polarizados tan sólo si lo están los electrones incidentes. Esa circunstancia es una propiedad general de la primera aproximación de Born (cf. III, § 138).

En el caso no-relativista ($\varepsilon \to m$) de (81.14) se sigue $\zeta^{(f)} = \zeta$, es decir, el electrón conserva su polarización en la dispersión (lo que es consecuencia natural de haber prescindido de la interacción spin-órbita).

En el caso opuesto, el ultrarrelativista, tenemos

$$A = \varepsilon(1 + \cos\theta), \qquad B = -i\varepsilon\operatorname{sen}\theta$$

[de acuerdo con la fórmula (38.2)].

* La definición de f aquí y en el § 38 difieren en un factor común.

** La fórmula (81.14) corresponde a la fórmula obtenida en el problema 1, III, § 138 y resulta de ella en el caso de A real y B imaginario.

Si, además, el electrón incidente posee una determinada helicidad ($\zeta = 2\lambda n$, $\lambda = \pm 1/2$), de (81.14) resulta mediante una simple reducción,

$$\zeta^{(f)} = 2\lambda n'.$$

En otras palabras, después de la dispersión el electrón sigue poseyendo helicidad, conservando el valor inicial (λ) de la misma.

Como ya se explicó en el § 38, esta propiedad se debe a que, cuando se prescinde de la masa, la ecuación de Dirac en la representación espinorial se descompone en dos ecuaciones independientes para las funciones ξ y η. Este resultado tiene incluso una significación más general, puesto que la corriente

$$j = (\xi^*\xi + \eta^*\eta,\ \xi^*\sigma\xi - \eta^*\sigma\eta),$$

y con ella también la perturbación electromagnética $V = e\,j\,A$, no contiene términos mezclados respecto de ξ y η, y, por lo tanto, carece de elementos de matriz no nulos para transiciones entre estados ξ y η. De aquí se sigue que si un electrón ultrarrelativista posee una determinada helicidad (es decir, si o ξ o η es diferente de cero), en los procesos de interacción se conservará esta helicidad dentro de la aproximación en la que se prescinde por completo de la masa del electrón.

§ 82. Dispersión de electrones y positones por un electrón

Consideremos la dispersión electrón-electrón: dos electrones con 4-impulsos p_1, p_2 chocan entre sí, adquiriendo los 4-impulsos p'_1, p'_2. La conservación del 4-impulso se expresa por la igualdad

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2. \tag{82.1}$$

En lo que sigue utilizaremos los invariantes cinemáticos introducidos en el § 67, definidos de acuerdo con

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(m^2 + p_1p_2), \\ t &= (p_1 - p'_1)^2 = 2(m^2 - p_1p'_1), \\ u &= (p_1 - p'_2)^2 = 2(m^2 - p_1p'_2), \\ s + t + u &= 4m^2. \end{aligned} \tag{82.2}$$

El proceso considerado se representa por los dos diagramas de Feynman (74.13-14) y su amplitud es *

$$M_{fi} = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{t} (\bar{u}'_2\gamma^\mu u_2)(\bar{u}'_1\gamma_\mu u_1) - \frac{1}{u} (\bar{u}'_1\gamma^\nu u_2)(\bar{u}'_2\gamma_\nu u_1) \right\}. \tag{82.3}$$

De acuerdo con las reglas señaladas en el § 66, para los estados de las partículas

* Esta forma de M_{fi} concuerda con la expresión general (71.5). En la primera aproximación no nula de la teoría de perturbaciones, de las cinco amplitudes invariantes resulta diferente de cero tan sólo una: $f_3(t, u) = 4\pi e^2/t$.

iniciales y finales, representados por las matrices densidad de polarización ρ_1, ρ_1', ..., aplicaremos la substitución

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \left\{ \frac{1}{t^2} \operatorname{Tr}(\rho_2' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu) \operatorname{Tr}(\rho_1' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) + \right.$$
$$+ \frac{1}{u^2} \operatorname{Tr}(\rho_1' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu) \operatorname{Tr}(\rho_2' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) -$$
$$\left. - \frac{1}{tu} \operatorname{Tr}(\rho_2' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_1' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) - \frac{1}{tu} \operatorname{Tr}(\rho_1' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_2' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) \right\}. \qquad (82.4)$$

Si se trata de la dispersión de electrones no polarizados (cuando, además, no nos interesa su polarización después de la dispersión) debemos tomar para todas las matrices densidad $\rho = {}^1/_2 (\hat{p} + m)$, multiplicando el resultado por $2 \times 2 = 4$ (el promedio respecto de las polarizaciones de los dos electrones iniciales y la suma respecto de las polarizaciones de los dos finales). La sección eficaz de dispersión se determina por la fórmula (65.23), en la que hay que hacer, según (65.15a), $I^2 = \frac{1}{4}s\,(s - 4m^2)$. Representaremos la sección eficaz en la forma

$$d\sigma = dt \frac{4\pi e^4}{s(s-4m^2)} \left\{ f(t,u) + g(t,u) + f(u,t) + g(u,t) \right\},$$
$$f(t,u) = \frac{1}{16 t^2} \operatorname{Tr}[(\hat{p}_2' + m) \gamma^\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma^\nu] \operatorname{Tr}[(\hat{p}_1' + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma_\nu], \qquad (82.5)$$
$$g(t,u) = -\frac{1}{16 tu} \operatorname{Tr}[(\hat{p}_2 + m) \gamma^\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_1' + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma_\nu].$$

En $f(t, u)$ se calculan primero las trazas [mediante (22.9-10)], y luego se suma respecto de μ y ν * ; en $g(t, u)$ se efectúa primero la suma respecto de μ y ν [mediante las fórmulas (22.6)]. En definitiva se obtiene

$$f(t,u) = \frac{2}{t^2}[(p_1 p_2)^2 + (p_1 p_2')^2 + 2m^2 (m^2 - p_1 p_1')],$$
$$g(t,u) = \frac{2}{tu}(p_1 p_2 - 2m^2)(p_1 p_2),$$

o, en función de los invariantes (82.2),

$$f(t,u) = \frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2 (t - m^2)\right],$$
$$g(t,u) = g(u,t) = \frac{2}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right). \qquad (82.6)$$

Así, pues, la sección eficaz vale

---

* Con vistas a futuras referencias, haremos notar la fórmula

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr}(\hat{p}_1 + m) \gamma^\mu (\hat{p}_2 + m) \gamma^\nu = g^{\mu\nu}(m^2 - p_1 p_2) + p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu.$$

$$d\sigma = r_e^2 \frac{4\pi m^2\, dt}{s\,(s-4m^2)} \left\{ \frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2)\right] + \frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right)\right\} \qquad (82.7)$$

(donde $r_e = e^2/m$).

Apliquemos está fórmula en el sistema del centro de masa. Aquí es

$$s = 4\varepsilon^2,\ t = -4\boldsymbol{p}^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2},\ u = -4\boldsymbol{p}^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$-dt = -2\boldsymbol{p}^2\, d\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p}^2}{\pi}\, do \qquad (82.8)$$

($|\boldsymbol{p}|$, ε son el módulo del impulso y la energía de los electrones, que no varían en la dispersión; θ es el ángulo de dispersión). En el caso no-relativista ($\varepsilon \approx m$)* obtendremos

$$d\sigma = r_e^2 \frac{\pi m^4 dt}{\boldsymbol{p}^2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{tu}\right) =$$
$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) do =$$
$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{4\,(1+3\cos^2\theta)}{\operatorname{sen}^4\theta}\, do \qquad \text{(n. r.)} \qquad (82.9)$$

(donde $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{p}/m$ es la velocidad relativa de los electrones), de acuerdo con la teoría no-relativista (véase III, § 135). En el caso general de velocidades arbitrarias, la fórmula (82.7), después de substituir en ella (82.8) y efectuar simples transformaciones, puede escribirse en la forma

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2(\varepsilon^2+\boldsymbol{p}^2)^2}{4\boldsymbol{p}^4\varepsilon^2}\left[\frac{4}{\operatorname{sen}^4\theta} - \frac{3}{\operatorname{sen}^2\theta} + \left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{\varepsilon^2+\boldsymbol{p}^2}\right)^2\left(1+\frac{4}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\right] do \qquad (82.10)$$

(*Ch. Möller*, 1932). En el caso ultrarrelativista ($\boldsymbol{p}^2 \approx \varepsilon^2$),

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{(3+\cos^2\theta)^2}{4\operatorname{sen}^4\theta}\, do \qquad \text{(u. r.)}. \qquad (82.11)$$

En el sistema de referencia del laboratorio, en el cual uno de los electrones (digamos, el segundo) se hallaba en reposo antes del choque, expresaremos la sección eficaz en función de la cantidad

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon'_1}{m} = \frac{\varepsilon'_2 - m}{m} \qquad (82.12)$$

que es la energía (tomando m como unidad) cedida por el electrón incidente (el primero) al segundo**. Los invariantes son

* La velocidad v se supone pequeña ($v \ll 1$), pero suficientemente grande como para que se pueda aplicar aún la teoría de perturbaciones: $e^2/v\,(= e^2/\hbar v) \ll 1$.

** Las relaciones cinemáticas para los choques elásticos en diferentes sistemas de referencia pueden verse en II, § 13.

$$s = 2m(m + \varepsilon_1), \quad t = -2m^2\Delta,$$
$$u = -2m(\varepsilon_1 - m - m\Delta). \tag{82.13}$$

La substitución de estas expresiones en (82.7) conduce a la siguiente fórmula para la distribución energética de los electrones secundarios (o, como se suele decir, de los *electrones-δ*), que resultan de la dispersión de electrones primarios rápidos

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2 - 1}\left\{\frac{(\gamma-1)^2\gamma^2}{\Delta^2(\gamma - 1 - \Delta)^2} - \frac{2\gamma^2 + 2\gamma - 1}{\Delta(\gamma - 1 - \Delta)} + 1\right\}, \tag{82.14}$$

donde $\gamma = \varepsilon_1/m$. Las energías cinéticas de los dos electrones son $m\Delta$ y $m(\gamma - 1 - \Delta)$; la identidad de ambas partículas se traduce aquí en la simetría de la fórmula respecto de estas cantidades. Si convenimos en llamar electrón de retroceso a aquél de los dos que tiene menor energía, Δ variará entre 0 y $(\gamma - 1)/2$. Para valores pequeños de Δ la fórmula (82.14) toma la forma

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}\frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{2\pi r_e^2}{v_1^2}\frac{d\Delta}{\Delta^2}, \quad \Delta \ll \gamma - 1. \tag{82.15}$$

Observemos que esta fórmula, expresada en función de la velocidad del electrón incidente ($v_1 = |\boldsymbol{p}_1|/\varepsilon_1$), conserva su forma cuando se pasa al caso no-relativista. Es natural, por ello, que coincida formalmente con el resultado de la teoría no-relativista [cf. III (145.17)].

Consideremos ahora la dispersión de un positón por un electrón (*H. Bhabha*, 1936). Este proceso es otro canal de cruce de la misma reacción generalizada a que pertenece la dispersión electrón-electrón. Si p_-, p_+ son los impulsos iniciales del electrón y del positón, y p'_-, p'_+ los impulsos finales, el paso de un caso al otro se efectúa mediante la substitución

$$p_1 \to -p'_+, \quad p_2 \to p_-, \quad p'_1 \to -p_+, \quad p'_2 \to p'_-.$$

Entonces los invariantes cinemáticos (82.2) adoptan el siguiente significado:

$$s = (p_- - p'_+)^2, \quad t = (p_+ - p'_+)^2, \quad u = (p_- + p_+)^2. \tag{82.16}$$

Si la dispersión-*ee* era en el canal-*s*, la dispersión-$\bar{e}e$ es la reacción en el canal-*u*. El cuadrado de la amplitud de dispersión, expresado en función de *s*, *t*, *u*, sigue siendo el de antes, y en el denominador de la fórmula (82.5) hay que substituir $s \to u$. De esta manera, para la sección eficaz de dispersión positón-electrón obtendremos, en vez de (82.7),

$$d\sigma = r_e^2 \frac{4\pi m^2 dt}{u(u - 4m^2)}\left\{\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2 + t^2}{2} + 4m^2(u - m^2)\right] + \frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right)\right\}. \tag{82.17}$$

En el sistema del centro de masa los valores de los invariantes *s*, *t*, *u* difieren de (82.8) en la permutación de *s* y *u*:

$$s = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad t = -4p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = 4\varepsilon^2. \tag{82.18}$$

La fórmula (82.17), en el límite no-relativista, se reduce a la fórmula de Rutherford

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{do}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \qquad \text{(n.r.)} \tag{82.19}$$

(donde $v = 2p/m$). Esta fórmula se obtiene a partir del primer término de la expresión entre llaves en (82.17), término que procede de un diagrama del tipo « dispersión » (véase § 74). En cambio, las contribuciones del diagrama de « destrucción » [segundo término de (82.17)] y de su interferencia con el diagrama de dispersión (tercer término) se anulan en el límite de la aproximación no-relativista *.

En el caso general de velocidades cualesquiera, las contribuciones de estos tres términos en (82.17) tienen el mismo orden de magnitud (únicamente en la región de ángulos pequeños predomina el primer término debido al factor $t^{-2} \sim \operatorname{sen}^{-4} \frac{\theta}{2}$). Después de reducir términos semejantes, la sección eficaz de dispersión de un positón por un electrón (en el sistema del centro de masa) se puede representar en la forma

$$d\sigma = do \frac{r_e^2}{16} \frac{m^2}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{(\varepsilon^2 + p^2)^2}{p^4} \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{8\varepsilon^4 - m^4}{p^2\varepsilon^2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{12\varepsilon^4 + m^4}{\varepsilon^4} - \frac{4p^2(\varepsilon^2 + p^2)}{\varepsilon^4} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{4p^4}{\varepsilon^4} \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} \right\}. \tag{82.20}$$

La simetría respecto de la substitución $\theta \to \pi - \theta$, que es característica de la dispersión de partículas idénticas, desaparece, claro está, en la dispersión de un positón por un electrón. En el límite ultrarrelativista, la expresión (82.80) difiere de la sección eficaz de dispersión electrón-electrón tan sólo en el factor $\cos^4 \frac{\theta}{2}$:

$$d\sigma_{e\bar{e}} = \cos^4 \frac{\theta}{2} d\sigma_{ee} \qquad \text{(u.r.)} \tag{82.21}$$

En el sistema de referencia del laboratorio, en el cual una de las partículas

---

* En el límite no-relativista, las amplitudes $\underline{u}$ se convierten en magnitudes de dos componentes — véase (23.12) — ; además, el 4-vector de electrón $\underline{u}'_- \gamma^\mu \underline{u}_- = (2mw'^*_- w_-, 0)$ y lo mismo vale para el positón. El término de dispersión en la amplitud (74.15) toma la forma

$$-(2m)^2 (w'^*_- w_-)(w'^*_+ w_+) U_q,$$

donde

$$U_q = \frac{4\pi e^2}{q^2} = -\frac{4\pi e^2}{q^2}$$

(para el fotón virtual, en el diagrama de dispersión es $q^0 = 0$ en el sistema del centro de masa); U_q es la componente de Fourier de la energía de la interacción coulombiana de cargas con signos opuestos ($-e^2/r$). Para el fotón virtual en el diagrama de aniquilación se tiene $q^0 = 2m(= 2mc)$ en virtud de lo cual este término se anula en el límite.

(digamos, el electrón) se encontraba en reposo antes del choque, introduciremos de nuevo la cantidad

$$\Delta = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_+'}{m} = \frac{\varepsilon_-' - m}{m}, \tag{82.22}$$

es decir, la energía cedida por el positón al electrón. De manera análoga a (82.13), se tiene ahora

$$s = -2m(\varepsilon_+ - m - m\Delta), \quad t = -2m^2\Delta, \quad u = 2m(m + \varepsilon_+).$$

Substituyendo estas expresiones en (82.17), después de simples transformaciones obtendremos la siguiente fórmula para la distribución energética de los electrones secundarios:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2 - 1}\left\{\frac{\gamma^2}{\Delta^2} - \frac{2\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma + 1}\frac{1}{\Delta} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\gamma^2 + 6\gamma + 4}{(\gamma+1)^2} - \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2}\Delta + \frac{1}{(\gamma+1)^2}\Delta^2\right\}, \tag{82.23}$$

donde $\gamma = \varepsilon_+/m$; Δ varía entre 0 y $\gamma - 1$. Para $\Delta \ll \gamma - 1$, de (82.23) se obtiene la misma fórmula (82.15) que para las dispersiones de electrones.

Los efectos de polarización en la dispersión de electrones o de positones se calculan según las reglas generales expuestas en el § 66. En uno cualquiera de los casos generales, los cálculos conducen a fórmulas complicadas para las cuales referimos al lector a los artículos originales o a los trabajos especiales de puesta a punto *. Aquí nos limitaremos solamente a algunas observaciones.

En la aproximación considerada (la primera no nula) de la teoría de perturbaciones, en la expresión de las secciones eficaces no existen términos lineales respecto de los vectores polarización de las partículas iniciales o finales. Al igual que en la teoría no-relativista (III, § 138) tales términos están prohibidos por condiciones que resultan del carácter hermítico de la matriz de dispersión. Por ello, la sección eficaz de dispersión no cambia si solamente una de las partículas que chocan está polarizada, y la dispersión de partículas no polarizadas no conduce a su polarización.

Estas mismas condiciones prohiben, en las secciones eficaces, los términos de correlación que contienen los productos de las polarizaciones de tres de las partículas que toman parte en el proceso (iniciales y finales). Sin embargo, la sección eficaz contiene términos de correlación binaria y cuaternaria. En la dispersión de partículas no idénticas (electrón y positón; electrón y muón), estos términos se anulan en el límite no-relativista, ya que no existe la interacción spin-órbita. En la colisión de partículas idénticas, en cambio, se tienen términos de correlación ya en el caso no-relativista debido a los efectos de intercambio.

* A. M. Bincer, Phys. Rev. **107**, 1434 (1957); G. W. Ford, C. J. Mullin, Phys. Rev. **108**, 477 (1957) (corrigendum: Phys. Rev. **110**, 1485, 1958); A. Raczka, R. Raczka, Phys. Rev. **110**, 1469, 1958; W. H. McMaster, Rev. Mod. Phys. **33**, 8 (1961).

PROBLEMAS

1. Determinar la sección eficaz de dispersión de electrones polarizados en el caso no-relativista.

Solución. En el caso no-relativista las amplitudes bispinoriales pasan a ser de dos componentes en la representación típica y las matrices densidad son las matrices 2×2 (29.20). En la amplitud de dispersión (82.3) se conservan diferentes de cero tan sólo los términos con $\mu = \nu = 0$ que contienen las matrices γ^0, diagonales en la representación típica. En vez de (82.4) tendremos

$$\sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \left\{ \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}\right) \mathrm{Tr}(1+\sigma\ \zeta_1)\, \mathrm{Tr}\,(1+\sigma\cdot\zeta_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{tu} \mathrm{Tr}\,(1+\sigma\cdot\zeta_1)\,(1+\sigma\cdot\zeta_2) \right\} = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \cdot 4\left[\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{tu}\,(1+\zeta_1\cdot\zeta_2)\right]$$

(la suma se refiere a las polarizaciones de los electrones finales). De aquí se sigue la sección eficaz de dispersión

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 - \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\ \zeta_1\cdot\zeta_2\right),$$

donde θ es el ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa, y $d\sigma_0$, la sección eficaz para partículas no polarizadas (82.9) ★.

En la dispersión de positones por electrones, la dependencia respecto de la polarización no existe en esta misma aproximación ($d\sigma = d\sigma_0$); es fácil comprobar que así es observando que, en el límite no-relativista, las amplitudes u_p y u_{-p} de los electrones y de los positones tienen componentes no nulas que corresponden a pares diferentes.

2. Determinar, en el límite no-relativista, la polarización de los electrones de un haz no polarizado dispersados por un blanco polarizado.

Solución. Calculemos la sección eficaz de dispersión para una polarización inicial dada ζ_2 y una polarización final detectada ζ_1' (se detecta la polarización de tan sólo uno de los electrones finales). Siguiendo el mismo procedimiento que en el problema 1, obtendremos

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\sigma_0 \left[1 - \zeta_1'\cdot\zeta_2\, \frac{2\cos\theta\,(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}\right].$$

De aquí se sigue para el vector polarización del electrón dispersado

$$\zeta_1^{(f)} = -\,\zeta_2\, \frac{2\cos\theta\,(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}.$$

3. En el caso no-relativista, determinar la probabilidad de que se invierta el spin de un electrón completamente polarizado como consecuencia de su dispersión por un electrón no polarizado.

Solución. De manera análoga se encuentra la sección eficaz para polarizaciones dadas ζ_1 y ζ_1':

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\sigma_0 \left[1 + \zeta_1\cdot\zeta_1'\, \frac{2\cos\theta\,(1+\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}\right].$$

Haciendo $\zeta_1\cdot\zeta_1' = -1$, deducimos de aquí la probabilidad de inversión del sentido del spin

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{2\,(1+3\cos^2\theta)}.$$

4. Determinar la razón de las secciones eficaces de dispersión de los electrones con helicidades determinadas y spins paralelos y antiparalelos en el caso ultrarrelativista.

Solución. En (82.4) hay que hacer, según (29.22),

★ Para electrones del todo polarizados, esta fórmula coincide con el resultado del problema en III, § 135 (con $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$, $\zeta_1\cdot\zeta_2 = \cos\alpha$, y α es el ángulo formado por las direcciones de polarización de los electrones).

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\hat{p}_1(1 - 2\lambda_1\gamma^5), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}\hat{p}_2(1 - 2\lambda_2\gamma^5), \quad \rho_1' = \frac{1}{2}\hat{p}_1, \quad \rho_2' = \frac{1}{2}\hat{p}_2',$$

donde λ_1, $\lambda_2 = \pm 1/2$. El cálculo de las trazas se efectúa de acuerdo con las fórmulas deducidas en el § 22; en particular,

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma^5 \hat{a}\gamma^\mu \hat{b}\gamma^\nu)\mathrm{Tr}\,(\gamma^5 \hat{c}\gamma_\mu \hat{d}\gamma_\nu) = i^2 (e^{\rho\mu\lambda\nu} a_\rho b_\lambda)(e_{\sigma\mu\tau\nu} c^\sigma d^\tau) =$$
$$= 2(\delta^\rho_\sigma \delta^\lambda_\tau - \delta^\rho_\tau \delta^\lambda_\sigma) a_\rho b_\lambda c^\sigma d^\tau = 2(ac)(bd) - 2(ad)(bc).$$

En definitiva obtendremos

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{s^2+t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right) + 4\lambda_1\lambda_2\left(\frac{s^2-u^2}{t^2} + \frac{s^2-t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right).$$

Dado que los impulsos de los electrones que chocan son opuestos entre sí (en el sistema del centro de masa), a helicidades idénticas ($\lambda_1 = \lambda_2$) corresponden spins antiparalelos, y a helicidades diferentes ($\lambda_1 = -\lambda_2$), spins paralelos. Substituyendo las expresiones s, t, u dadas por (82.8) (haciendo además $p^2 \approx \varepsilon^2$), se encuentra para la razón buscada

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \frac{1}{8}(1 + 6\cos^2\theta + \cos^4\theta). \tag{1}$$

Esta razón es mínima (1/8) para $\theta = \pi/2$.

5. Lo mismo para la dispersión de positones por electrones.

Solución. En este caso, en vez de (82.4) hay que calcular

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \left\{\frac{1}{t^2}\mathrm{Tr}\,(\rho_-'\gamma^\mu\rho_-\gamma^\nu)\,\mathrm{Tr}\,(\rho_+\gamma_\mu\rho_+'\gamma_\nu) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{tu}\mathrm{Tr}\,(\rho_-'\gamma^\mu\rho_-\gamma^\nu\rho_+\gamma_\mu\rho_+'\gamma_\nu) + \dots\right\}$$

(los demás términos se obtienen a partir de los escritos permutando ρ_+ y ρ'_-). Las matrices densidad son:

$$\rho_- = \frac{1}{2}\hat{p}_-(1 - 2\lambda_-\gamma^5), \quad \rho_+ = \frac{1}{2}\hat{p}_+(1 + 2\lambda_+\gamma^5), \quad \rho_-' = \frac{1}{2}\hat{p}_-', \quad \rho_+' = \frac{1}{2}\hat{p}_+',$$

donde λ_+, $\lambda_- = \pm 1/2$ (para el positón, al igual que para el electrón, $\lambda_+ = 1/2$ indica que el spin está dirigido en el sentido del impulso). El cálculo da

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{s^2+t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right) - 4\lambda_+\lambda_-\left(\frac{s^2-u^2}{t^2} + \frac{s^2-t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right).$$

A partir de aquí se obtiene para la razón de secciones eficaces un resultado que coincide con la fórmula (1) del problema 4.

6. Determinar la sección eficaz de dispersión de muones por electrones.

Solución. El proceso se representa por un único diagrama (74.17). En vez de (82.5) tenemos

$$d\sigma = \frac{\pi e^4 dt}{(p_e p_\mu)^2 - m^2\mu^2} f(t,u) = \frac{4\pi e^4 dt}{[s-(m+\mu)^2][s-(m-\mu)^2]} f(t,u),$$
$$f(t,u) = \frac{1}{16t^2}\mathrm{Tr}\,[(\hat{p}_\mu' + \mu)\gamma^\lambda(\hat{p}_\mu + \mu)\gamma^\nu]\,\mathrm{Tr}\,[(\hat{p}_e' + m)\gamma_\lambda(\hat{p}_e + m)\gamma_\nu] \tag{1}$$

(p_e, p_μ y p'_e, p'_μ son los 4-impulsos iniciales y finales del electrón y del muón; m y μ, son sus masas). Los invariantes se escriben:

$$s = (p_e + p_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 + 2p_e p_\mu,$$
$$t = (p_e - p_e')^2 = 2(m^2 - p_e p_e') = 2(\mu^2 - p_\mu p_\mu'),$$

$$u = (p_e - p'_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 - 2p_e p'_\mu,$$
$$s + t + u = 2(m^2 + \mu^2).$$

El cálculo conduce al resultado

$$f = \frac{2}{t^2}\left\{(p_e p_\mu)^2 + (p_e p'_\mu)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \mu^2)\, t\right\} =$$
$$= \frac{1}{t^2}\left\{\frac{s^2 + u^2}{2} + (m^2 + \mu^2)(2t - m^2 - \mu^2)\right\}. \qquad (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) resuelven el problema planteado. En el sistema del centro de masa

$$d\sigma = \frac{e^4 d\sigma_0}{8(\varepsilon_e + \varepsilon_\mu)^2 p^4 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \times$$
$$\times \left[(\varepsilon_e \varepsilon_\mu + p^2)^2 + (\varepsilon_e \varepsilon_\mu + p^2 \cos\theta)^2 - 2(m^2 + \mu^2) p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right],$$

donde $d\sigma_0 = 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$; ε_e, ε_μ son las energías del electrón y del muón; $p^2 = \varepsilon^2_e - m^2 = \varepsilon^2_\mu - \mu^2$. Cuando $p^2 \ll \mu^2$, volvemos a la fórmula (81.9) para la dispersión por un centro coulombiano inmóvil. En el caso ultrarrelativista ($p^2 \gg \mu^2$)

$$d\sigma = \frac{e^4}{8p^4} \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}\, d\sigma_0.$$

En el sistema del laboratorio (en el que el electrón se encuentra en reposo antes de la colisión):

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \frac{d\Delta}{v^2_\mu \Delta^2}\left(1 - v^2_\mu \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} + \frac{m^2}{2\varepsilon^2_\mu}\Delta^2\right).$$

Aquí ε_μ es la energía y $v_\mu = p_\mu/\varepsilon_\mu$ la velocidad del muón incidente; $m\Delta = \varepsilon'_e - m = \varepsilon_\mu - \varepsilon'_\mu$ es la energía del electrón de retroceso, y

$$\Delta_{\max} = \frac{2p^2_\mu}{m^2 + \mu^2 + 2m\varepsilon_\mu}$$

el valor máximo de Δ (que se alcanza en la dispersión hacia atrás).

7. Determinar la razón de las secciones eficaces de la dispersión mutua de electrones y muones con helicidades determinadas y spins paralelos y antiparalelos en el caso ultrarrelativista ($\varepsilon_\mu \gg \mu$, $\varepsilon_e \gg m$).

Solución. De manera análoga al problema 4, se encuentra

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \cos^4 \frac{\theta}{2}$$

(θ es el ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa).

8. Determinar la sección eficaz de conversión de un par de electrones en un par de muones (V. B. Berestetskiĭ, I. Ia. Pomeranchuk, 1955).

Solución. Éste es otro canal de cruce de la reacción a la que pertenece la dispersión-μe. En este canal

$$s = (p_e - \bar{p}_\mu)^2, \quad t = (p_e + \bar{p}_e)^2, \quad u = (p_e - p_\mu)^2,$$

donde p_e, $\bar{p}_e$ son los 4-impulsos del electrón y del positón, y p_μ, $\bar{p}_\mu$ los del muón y del antimuón. El umbral de la reacción corresponde a una energía del par electrón-positón igual a 2μ (en el

sistema del centro de masa), de modo que debe ser $t > 4\mu^2$. En el sistema del laboratorio, en el cual, antes del choque, el electrón se encuentra en reposo y el positón tiene una energía ε_+, es

$$t = 2m(\varepsilon_+ + m) \approx 2m\varepsilon_+,$$

de modo que debe tenerse $\varepsilon_+ > \varepsilon_u$, donde la energía umbral vale $\varepsilon_u = 2\mu^2/m$ (aquí y en lo que sigue se han efectuado todas las simplificaciones que permite la desigualdad $\mu \gg m$).

La sección eficaz diferencial [en vez de (1) (2) del problema 6] resulta ser

$$d\sigma = \frac{4\pi e^4 ds}{(t-4m^2)t} f(t,u) \approx 4\pi e^4 \frac{ds}{t^4}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 2\mu^2 t - \mu^4\right].$$

Para t dado, la cantidad s varía entre los límites determinados por las ecuaciones $su \approx \mu^4$, $s + t + u \approx 2\mu^2$, es decir,

$$\mu^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4\mu^2)} \leqslant s \leqslant \mu^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4\mu^2)}.$$

Una integración elemental conduce al resultado

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_e^2 \frac{m^2}{t}\sqrt{1-\frac{4\mu^2}{t}}\left(1+\frac{2\mu^2}{t}\right), \qquad r_e = \frac{e^2}{m}$$

(en el sistema del laboratorio, $t = 2m\varepsilon_+$) *. Esta fórmula es inaplicable en la inmediata vecindad de la energía umbral: cuando $\varepsilon_+ - \varepsilon_u \sim \mu e^4$, es imposible considerar como partículas libres los muones que se forman (pero si se tiene en cuenta la interacción de Coulomb entre ellos, la sección eficaz tenderá para $\varepsilon_+ \to \varepsilon_u$ no a cero, sino a una constante no nula — véase III, § 144).

§ 83. Ecuación de Breit

Como es sabido, un sistema de partículas en interacción se puede describir en la electrodinámica clásica mediante una función de Lagrange que depende solamente de las coordenadas y de las velocidades de las propias partículas y es correcta con una precisión hasta términos $\sim 1/c^2$ (II, § 65). Esta circunstancia se debe a que la radiación se manifiesta solamente como un efecto del orden de $1/c^3$.

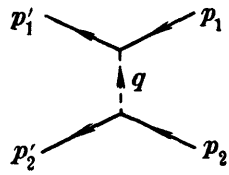
En la teoría cuántica, a esta situación corresponde la posibilidad de describir el sistema por una ecuación de Schrödinger que tiene en cuenta los términos de segundo orden. Tal ecuación se estableció en el § 33 para un electrón que se mueve en un campo electromagnético exterior. Nos ocuparemos ahora de deducir la ecuación análoga que representa un sistema de partículas en interacción.

Partiremos de la expresión relativista de la amplitud de dispersión de dos partículas. En la aproximación no-relativista se reduce a la amplitud de Born ordinaria, que es proporcional a la componente de Fourier del potencial de la interacción electrostática de las dos cargas. Pero calculando la amplitud con una precisión correspondiente a los términos de segundo orden, podremos establecer la forma del potencial que corresponde a dicha interacción y tiene en cuenta los términos $\sim 1/c^2$.

---

* Esta sección eficaz es máxima para $\varepsilon_+ = 1{,}7\varepsilon_u$. Su valor en el máximo es aproximadamente 20 veces menor que la sección eficaz de aniquilación en dos fotones para la misma energía.

Supongamos primero que las dos partículas son diferentes, con masas m_1 y m_2 (digamos, un electrón y un muón). Entonces la dispersión se representa por un solo diagrama



A él corresponde la amplitud

$$M_{fi} = e^2 (\bar{u}_1' \gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu}(q) (\bar{u}_2' \gamma^\nu u_2),$$

$$q = p_1' - p_1 = p_2 - p_2' \tag{83.1}$$

(aquí se ha supuesto que las cargas de las partículas son de igual signo; en el caso contrario, e^2 se substituye por $-e^2$).

Los cálculos siguientes se simplifican notablemente si el propagador de fotón $D_{\mu\nu}$ se elige no en el contraste ordinario, sino en el de Coulomb (77.12-13) *:

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{q^2}, \quad D_{0i} = 0, \quad D_{ik} = \frac{4\pi}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2} \right). \tag{83.2}$$

La amplitud de dispersión es entonces

$$M_{fi} = e^2 \{ (\bar{u}_1' \gamma^0 u_1) (\bar{u}_2' \gamma^0 u_2) D_{00} + (\bar{u}_1' \gamma^i u_1) (\bar{u}_2' \gamma^k u_2) D_{ik} \}. \tag{83.3}$$

Al prescindir de todos los términos que contienen $1/c$, el segundo término entre llaves desaparece, y el primero da

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2 (w_1^{(0)\prime *} w_1^{(0)}) (w_2^{(0)\prime *} w_2^{(0)}) U(\boldsymbol{q}), \tag{83.4}$$

donde

$$U(\boldsymbol{q}) = \frac{4\pi e^2}{\boldsymbol{q}^2}, \tag{83.5}$$

y se han designado por $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$, ... las amplitudes espinoriales (de dos componentes) de las ondas planas no-relativistas introducidas en el § 23. La función $U(q)$ es la componente de Fourier de la energía potencial de interacción coulombiana: $U(r) = e^2/r$.

En la aproximación siguiente (respecto de $1/c$) la función de onda « de Schrödinger » de la partícula libre φ_{Schr} (normalizada según la integral $\int |\varphi_{\text{Schr}}|^2 d^3x$) satisface la ecuación

---

* En este párrafo escribimos en todas las fórmulas intermedias el factor c, y en las fórmulas finales, también el $\hbar$.

$$\mathrm{H}^{(0)}\varphi_{\mathrm{Schr}} = (\varepsilon - mc^2)\,\varphi_{\mathrm{Schr}}$$
$$\mathrm{H}^{(0)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}, \quad \mathbf{p} = -i\nabla, \tag{83.6}$$

en la que se ha tenido en cuenta el término siguiente del desarrollo de la expresión relativista de la energía cinética. La amplitud (espinorial) de esa onda plana la designaremos por w (para $1/c \to 0$ pasa a ser $w^{(0)}$). En función precisamente de estas amplitudes ha de expresarse la amplitud de dispersión buscada para que, por su forma, sea posible determinar el potencial « de Schrödinger » de interacción de las partículas en la aproximación considerada.

En correspondencia con la fórmula (33.11), la amplitud bispinorial de una partícula libre u se expresa en función de la amplitud « de Schrödinger » w — con la precisión que se exige aquí — en la forma

$$u = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{8m^2c^2}\right) w \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2mc}\, w \end{pmatrix}. \tag{83.7}$$

Mediante esta fórmula se encuentra

$$\bar{u}_1'\gamma^0 u_1 = u_1'^* u_1 = 2m_1\left(1 - \frac{\boldsymbol{p}_1'^2 + \boldsymbol{p}_1^2}{8m_1^2c^2}\right) w_1'^* w_1 + \frac{1}{2m_1c^2}\, w_1'^*\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_1')\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_1)\, w_1 =$$
$$= 2m_1 w_1'^*\left\{1 - \frac{\boldsymbol{q}^2}{8m_1^2c^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}_1]}{4m_1^2c^2}\right\} w_1,$$
$$\bar{u}_1'\boldsymbol{\gamma} u_1 = u_1'^*\boldsymbol{\alpha} u_1 = \frac{1}{c}\, w_1'^*\left\{\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_1) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_1')\,\boldsymbol{\sigma}\right\} w_1 =$$
$$= \frac{1}{c}\, w_1'^*\left\{i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q}] + 2\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q}\right\} w_1$$

(donde $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}'_1 - \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}'_2$). Las expresiones análogas para $(\bar{u}_2'\gamma^0 u_2)$ y $(\bar{u}_2'\boldsymbol{\gamma} u_2)$ difieren de éstas por la substitución del índice 1 por 2 y la correspondiente substitución de $\boldsymbol{q}$ por $-\boldsymbol{q}$.

Substituyamos estas expresiones en (83.3). Dado que el producto $(\bar{u}_1'\boldsymbol{\gamma} u_1)$ $(\bar{u}_2'\boldsymbol{\gamma} u_2)$ contiene ya el factor $1/c^2$, se puede prescindir en D_{ik} del factor ω^2/c^2 en el denominador. En definitiva se obtiene la amplitud de dispersión en la forma

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2\,(w_1'^* w_2'^*\, U(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q})\, w_1 w_2), \tag{83.8}$$

donde

$$U(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}) = 4\pi e^2\left\{\frac{1}{\boldsymbol{q}^2} - \frac{1}{8m_1^2c^2} - \frac{1}{8m_2^2c^2} + \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1m_2\boldsymbol{q}^4} - \frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{m_1m_2\boldsymbol{q}^2} + \right.$$
$$+ \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1\cdot[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}_1]}{4m_1^2c^2\boldsymbol{q}^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1\cdot[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}_2]}{2m_1m_2c^2\boldsymbol{q}^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2\cdot[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}_2]}{4m_2^2c^2\boldsymbol{q}^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2\cdot[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}_1]}{2m_1m_2c^2\boldsymbol{q}^2} +$$
$$\left. + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{q})}{4m_1m_2c^2\boldsymbol{q}^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2}{4m_1m_2c^2}\right\} \tag{83.9}$$

(los índices 1 y 2 en las matrices de Pauli indican sobre qué índices espinoriales actúan: σ_1 actúa sobre w_1, y σ_2 sobre w_2).

La función $U(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q})$ es el operador de interacción de las partículas en la representación de impulsos. Está ligado con el operador $U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r})$ en la representación de coordenadas por la fórmula

$$\int e^{-i(\boldsymbol{p}_1'\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}_2'\cdot\boldsymbol{r}_2)} U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r})\, e^{i(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r}_2)} d^3x_1 d^3x_2 = \\ = (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1'-\boldsymbol{p}_2')\, U(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}). \qquad (83.10)$$

Si el operador U es simplemente la función $U(\boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$), $U(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q})$ no depende de $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ y la fórmula (83.10) se reduce a la definición ordinaria de la componente de Fourier

$$\int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, U(\boldsymbol{r})\, d^3x = U(\boldsymbol{q}).$$

Es claro por esto que para hallar $U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r})$ hay que calcular la integral

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, U(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q})\, \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

y luego substituir $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ por los operadores $\mathbf{p}_1 = i\nabla_1$, $\mathbf{p}_2 = -i\nabla_2$, colocándolos a la derecha de todos los demás factores.

Las integrales necesarias se calculan derivando la fórmula

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, \frac{4\pi}{\boldsymbol{q}^2}\, \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r}. \qquad (83.11)$$

Así, formando el gradiente encontraremos

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, \frac{4\pi\,\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{q}^2}\, \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -i\nabla\frac{1}{r} = \frac{i\boldsymbol{r}}{r^3}. \qquad (83.12)$$

Además (si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes)

$$\int \frac{4\pi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^4} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{i}{2}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\right)\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\,\frac{d^3q}{(2\pi)^3};$$

la integral que se obtiene después de integrar por partes se reduce a (83.12) y da

$$\int \frac{4\pi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^4} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{2r}\left[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})}{r^2}\right]. \qquad (83.13)$$

Finalmente,

$$\int \frac{4\pi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\frac{1}{r}.$$

Al calcular las derivadas no hay que perder de vista que esta expresión contiene una función-δ, la $\delta(\boldsymbol{r})$. Para separarla observemos que, después de promediar respecto de las direcciones de $\boldsymbol{r}$, resulta

$$-\overline{(a\cdot\nabla)(b\cdot\nabla)\frac{1}{r}} = -\frac{1}{3}(a\cdot b)\,\Delta\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{3}(a\cdot b)\,\delta(r).$$

Calculando ahora explícitamente las derivadas de la manera ordinaria, obtendremos

$$\int \frac{4\pi(a\cdot q)(b\cdot q)}{q^2} e^{iq\cdot r}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3}\left\{a\cdot b - 3\frac{(a\cdot r)(b\cdot r)}{r^2}\right\} + \frac{4\pi}{3}a\cdot b\,\delta(r) \qquad (83.14)$$

(al promediar respecto de las direcciones de r se anula el primer término y queda, como debe ser, tan sólo el término con la función-δ).

Mediante estas fórmulas se obtiene la siguiente expresión final para el operador de interacción de las partículas

$$U(p_1, p_2, r) = \frac{e^2}{r} - \frac{\pi e^2\hbar^2}{2c^2}\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right)\delta(r) -$$
$$- \frac{e^2}{2m_1 m_2 c^2 r}\left[p_1\cdot p_2 + \frac{r(r\cdot p_1)\,p_2}{r^2}\right] - \frac{e^2\hbar}{4m_1^2c^2r^3}[r\times p_1]\cdot\sigma_1 + \frac{e^2\hbar}{4m_2^2c^2r^3}[r\times p_2]\cdot\sigma_2 -$$
$$- \frac{e^2\hbar}{2m_1m_2c^2r^3}\{[r\times p_1]\cdot\sigma_2 - [r\times p_2]\cdot\sigma_1\} + \frac{e^2\hbar^2}{4m_1m_2c^2}\left\{\frac{\sigma_1\cdot\sigma_2}{r^3} - 3\frac{(\sigma_1\cdot r)(\sigma_2\cdot r)}{r^5} -\right.$$
$$\left. - \frac{8\pi}{3}\sigma_1\cdot\sigma_2\,\delta(r)\right\}, \qquad (83.15)$$

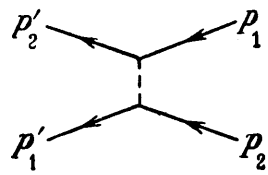
El hamiltoniano total del sistema de dos partículas en esta aproximación es

$$H = H_1^{(0)} + H_2^{(0)} + U, \qquad (83.16)$$

donde $H^{(0)}$ son los hamiltonianos de las partículas libres dados por (83.6).

Dos electrones

Si las dos partículas son idénticas (dos electrones), en la amplitud de dispersión aparece un segundo término que se representa por el diagrama « de intercambio »



No hay necesidad, sin embargo, de calcular su contribución al operador de interacción. Ello se debe a que la descripción de un sistema de partículas idénticas mediante la ecuación de Schrödinger se puede conseguir con ayuda del mismo operador de interacción que en el caso de partículas no idénticas, si se conviene en aplicar la debida simetrización de las soluciones de la ecuación. En particular, al estudiar la dispersión de partículas dicha simetrización tiene en cuenta automáticamente las contribuciones a la amplitud que corresponden a ambos diagramas de Feynman.

De esta manera, el hamiltoniano del sistema de dos electrones se obtendrá a partir de las fórmulas (83.15-16) con sólo hacer en ellas $m_1 = m_2$*:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) - \frac{1}{8m^3c^2}(\mathbf{p}_1^4 + \mathbf{p}_2^4) + U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r}),$$

$$U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r}) = \frac{e^2}{r} - \pi\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \delta(\boldsymbol{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r}\left(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{p}_1)\cdot\mathbf{p}_2}{r^2}\right) +$$
$$+ \frac{e^2\hbar}{4m^2c^2r^3}\left\{-(\boldsymbol{\sigma}_1 + 2\boldsymbol{\sigma}_2)\cdot[\boldsymbol{r}\times\mathbf{p}_1] + (\boldsymbol{\sigma}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}_1)\cdot[\boldsymbol{r}\times\mathbf{p}_2]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\,\delta(\boldsymbol{r})\right\}. \qquad (83.17)$$

Haremos observar que la presencia de los términos con $\delta(\boldsymbol{r})$ no significa, claro está, la existencia de una interacción especialmente fuerte. El valor integral de todos los términos correctivos es el mismo, y, por el propio sentido del desarrollo efectuado, todos ellos deben considerarse como pequeños comparados con el primer término — la interacción coulombiana.

Los diferentes grupos de términos en el operador de interacción (83.15) son de carácter diferente. Los términos de la primera línea tienen un origen puramente orbital. En la segunda línea aparecen términos que son lineales respecto de los operadores de spin de las partículas; estos términos corresponden a la interacción spin-órbita. Finalmente, los términos cuadráticos respecto de los operadores de spin de la tercera línea representan la interacción spin-spin **.

Electrón y positón

El sistema constituido por un electrón y un positón exige un estudio especial. La amplitud de dispersión en este caso es suma de dos términos:

$$M_{fi} = -e^2[\bar{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-)]\,D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)\,[\bar{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)] +$$
$$+ e^2[\bar{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-)]\,D_{\mu\nu}(p_- + p_+)\,[\bar{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)] \qquad (83.18)$$

(el primero corresponde a un diagrama de dispersión, y el segundo, a uno de aniquilación). Dado que la función de onda del sistema «electrón + positón» no debe ser antisimétrica, las contribuciones de ambos términos al operador de interacción son independientes.

El primer término [cuya estructura coincide con la estructura de la amplitud (83.1)] conduce, naturalmente, a un operador que difiere de (83.17) tan sólo en el signo común. Pasemos a la transformación del segundo término.

---

* *G. Breit* (1929) fue el primero en establecer la ecuación de onda con el hamiltoniano (83.17) y *L. D. Landau* (1932) la dedujo rigurosamente con los métodos de la mecánica cuántica.

** Esta interacción se recordó en III, § 72 en relación con la estructura fina de los niveles atómicos, y la interacción spin-spin de los electrones con el núcleo se estudió en el III, § 120 al tratar de la estructura hiperfina de los niveles. En particular, la fórmula III (120.9) corresponde al término con la función-δ en el operador de interacción spin-spin.

Aquí utilizaremos el propagador de fotón en el contraste ordinario:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2} g_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\frac{\omega^2}{c^2} - \boldsymbol{k}^2} g_{\mu\nu}.$$

En el presente caso, $k = p_+ + p_-$ y dado que las partículas son « casi no-relativistas », se tendrá

$$\frac{\omega^2}{c^2} \equiv \frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{c^2} \approx 4m^2c^2 \gg (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_-)^2 \equiv \boldsymbol{k}^2. \tag{83.19}$$

En consecuencia, para el operador de fotón basta escribir

$$D_{\mu\nu} \approx \frac{\pi}{m^2c^2} g_{\mu\nu}.$$

Aquí se incluye ya el factor $1/c^2$. Por lo tanto, basta tomar las amplitudes $u(p)$ en la aproximación de orden cero:

$$u(p_-) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} w_-^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(-p_+) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ w^{(0)} \end{pmatrix},$$

donde $w_-^{(0)}$, $w^{(0)}$ son los espinores tridimensionales que figuran en (23.12) [prescindiremos en lo que sigue de los superíndices (0) que los distinguen]. Con estas amplitudes

$$\bar{u}(-p_+)\gamma^0 u(p_-) = u^*(-p_+)\, u(p_-) = 0,$$
$$\bar{u}(-p_+)\boldsymbol{\gamma}\, u(p_-) = u^*(-p_+)\,\boldsymbol{\alpha}\, u(p_-) = 2m\,(w^*\boldsymbol{\sigma}\, w_-).$$

Después de substituir estas expresiones, el término « de aniquilación » de la amplitud de dispersión toma la forma

$$M_{fi}^{(\mathrm{an})} = -e^2 \frac{\pi}{m^2c^2} (2m)^2 (w^*\boldsymbol{\sigma}\, w_-) \cdot (w'^*_-\boldsymbol{\sigma}\, w'). \tag{83.20}$$

Sin embargo, es todavía imposible deducir de aquí directamente conclusión alguna acerca de la forma del operador de interacción. En primer lugar, los espinores w, en función de los cuales se expresan las amplitudes $u(-p_+)$, no son aún funciones de positón en sentido estricto. Las amplitudes de positón se obtienen a partir de $u(-p_+)$ mediante la aplicación de la conjugación de carga; según (26.6) los espinores que les corresponden (designémoslos por w_+) están ligados con w por la relación $w_+ = \sigma_y w^*$, de donde

$$w^* = \sigma_y w_+ = -w_+\sigma_y, \quad w = -\sigma_y w_+^*. \tag{83.21}$$

En segundo lugar, la amplitud de dispersión debe reducirse a una forma en la cual se enlacen entre sí los espinores de electrón (w_- y w'_-) y de positón (w_+ y w'_+). Esto se consigue mediante la fórmula

$$(w^*\sigma\, w_-)\cdot(w'^*_-\sigma\, w') = \frac{3}{2}(w'^*_- w_-)(w^* w') - \frac{1}{2}(w'^*_-\sigma\, w_-)\cdot(w^*\sigma\, w'), \quad (83.22)$$

que a su vez se deduce de (28.17).

Finalmente, expresando w y w' en función de w_+ y w'_+ de acuerdo con (83.21), se encuentra, como es fácil comprobar,

$$\begin{aligned}(w^* w') &= (w'^*_+ w_+),\\ (w^*\sigma w') &= -(w'^*_+\sigma w_+).\end{aligned} \quad (83.23)$$

Substituyendo (83.23) en (83.22) y luego en (83.20), obtendremos la expresión final para la parte de aniquilación de la amplitud de dispersión

$$M_{fi}^{(an)} = -4m^2\left((w'^*_- w'^*_+\left[\frac{\pi e^2}{2m^2c^2}(3+\sigma_+\cdot\sigma_-)\right]w_- w_+\right)$$

(las matrices σ_- y σ_+ actúan sobre w_- y w_+, respectivamente). La expresión entre paréntesis rectos constituye el operador de interacción en la representación de impulsos. El correspondiente operador en el espacio de coordenadas es

$$U^{(an)}(r) = \frac{\pi\hbar^2 e^2}{2m^2c^2}(3+\sigma_+\cdot\sigma_-)\,\delta(r), \qquad r = r_- - r_+ \quad (83.24)$$

(*Pirenne*, 1947; *V. B. Bereststetskiĭ* y *L. D. Landau*, 1949). El operador de interacción total del electrón y del positón se escribe

$$-U + U^{(an)}$$

con U dado por (83.17).

§ 84. El positonio

Las fórmulas obtenidas en el párrafo que precede se pueden aplicar al positonio — que es un sistema hidrogenoide formado por un electrón y un positón.

En el sistema del centro de masa, los operadores impulso del electrón y del positón son: $\mathbf{p}_- = -\mathbf{p}_+ \equiv \mathbf{p}$, donde $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ es el operador impulso del movimiento relativo que corresponde al vector posición relativa $r = r_- - r_+$. El hamiltoniano total del positonio es *

$$\begin{aligned}H &= \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r} + V_1 + V_2 + V_3,\\ V_1 &= -\frac{\mathbf{p}^4}{4m^3c^2} + 4\pi\mu_0^2\delta(r) - \frac{e^2}{2m^2c^2 r}\left\{\mathbf{p}^2 + \frac{r(r\cdot\mathbf{p})\cdot\mathbf{p}}{r^2}\right\},\\ V_2 &= 6\mu_0^2\frac{1}{r^3}\mathbf{l}\cdot\mathbf{S},\\ V_3 &= 6\mu_0^2\frac{1}{r^3}\left\{\frac{(\mathbf{S}\cdot r)(\mathbf{S}\cdot r)}{r^2} - \frac{1}{3}\mathbf{S}^2\right\} + 4\pi\mu_0^2\left(\frac{7}{3}\mathbf{S}^2 - 2\right)\delta(r).\end{aligned} \quad (84.1)$$

* En unidades ordinarias.

En estas fórmulas $\mu_0 = e\hbar/2mc$ es el magnetón de Bohr y $\hbar\mathbf{l} = \boldsymbol{r} \times \mathbf{p}$, el operador momento cinético orbital; $\mathbf{S} = (\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-)/2$ es el operador del spin total del sistema [su cuadrado $\mathbf{S}^2 = \frac{1}{2}(3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$]. En V_1 se han incluido todos los términos correctivos que tienen carácter puramente orbital; V_2 es la interacción spin-órbita; V_3 incluye las interacciones spin-spin y de « aniquilación ».

El hamiltoniano « no perturbado » se escribe

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r}$$

y difiere, como es natural, del hamiltoniano del átomo de hidrógeno únicamente en la substitución de la masa del electrón por la masa reducida $m/2$. Los niveles de energía del positonio serán por ello la mitad (en valor absoluto) del número de niveles del átomo de hidrógeno

$$E = -\frac{me^4}{4\hbar^2 n^2} \tag{84.2}$$

(n es el número cuántico principal).

Los términos restantes en (84.1) conducen al desdoblamiento de los niveles (84.2), es decir, a la aparición de una estructura fina. Los niveles que así resultan se clasifican en primer lugar de acuerdo con los valores del momento cinético total j. Vemos también que los operadores spin de las partículas intervienen en el hamiltoniano (84.1) tan sólo en forma de suma $\mathbf{S}$. Esto significa que el hamiltoniano conmuta con el operador del cuadrado del spin total $\mathbf{S}^2$, es decir, el módulo del spin total sigue conservándose también en la aproximación considerada (la segunda respecto de $1/c$). En consecuencia, los niveles de energía del positonio se pueden clasificar también de acuerdo con el spin total, que toma los valores $S = 0$ y $S = 1$. Los niveles con spin 0 se llaman niveles de *parapositonio*, y los niveles con spin 1, niveles de *ortopositonio*.

Hay que subrayar que la conservación del spin total en el positonio constituye en realidad una ley exacta, no vinculada con una particular aproximación respecto de $1/c$; dicha ley se sigue de la invariancia-*CP* de las interacciones electromagnéticas. El positonio constituye un sistema realmente neutro y, por lo tanto, sus estados se caracterizan por determinadas paridades de carga y combinada. Esta última es igual a $(-1)^{S+1}$ (véase el problema en el § 27); dado que S puede tomar solamente dos valores, 0 y 1, la conservación de la paridad combinada es equivalente a la conservación del spin total.

Para $S = 0$ el momento cinético total j coincide con el orbital. En cambio, cuando $S = 1$ y se da j, el número l puede tomar los valores $j, j \pm 1$ en correspondencia con lo cual cada nivel (n, j) del ortopositonio se desdobla, hablando en general, en tres niveles. Dado que a los valores $l = j$ y $l = j \pm 1$ corresponden paridades diferentes, el hamiltoniano no tiene elementos de matriz que liguen a estos estados. Sin embargo, el operador perturbación (primer término en V_3) posee, en general, elementos no diagonales que ligan los estados con $l = j + 1$ y $l = j - 1$;

en este caso, claro está, el número l pierde su sentido estricto de momento cinético orbital.

El efecto Zeeman en el positonio goza de propiedades específicas (*V. B. Berestetskiĭ, I. Ia. Pomeranchuk*, 1949).

El momento magnético orbital del positonio es siempre igual a cero: puesto que en el positonio $\boldsymbol{r}_+ \times \boldsymbol{p}_+ = \boldsymbol{r}_- \times \boldsymbol{p}_-$, el operador

$$\boldsymbol{\mu}_l = \mu_0 (\boldsymbol{r}_+ \times \mathbf{p}_+ - \boldsymbol{r}_- \times \mathbf{p}_-) = 0.$$

El operador del momento magnético de spin, en cambio,

$$\boldsymbol{\mu}_s = \mu_0 (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) \tag{84.3}$$

no es proporcional al operador del spin total $\mathbf{S} = (1/2)(\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-)$, y los operadores $\mathbf{S}^2$ y $\boldsymbol{\mu}^2$ no conmutan entre sí. Por ello, los estados con valores determinados del módulo del spin total S y de su proyección S_z no son, en general, estados propios del momento magnético.

Los estados con valores dados de S y S_z se representan por funciones de spin χ_{SS_z} que tienen la forma

$$\begin{aligned} &\chi_{11} = \alpha_+\alpha_-, \quad \chi_{1-1} = \beta_+\beta_-, \\ &\chi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+\beta_- + \alpha_-\beta_+), \\ &\chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+\beta_- - \alpha_-\beta_+), \end{aligned} \tag{84.4}$$

donde α y β son funciones espinoriales para una sola partícula que corresponden a las proyecciones $+1/2$ y $-1/2$ del spin (los subíndices $+$ o $-$ indican que la función se refiere al positón o al electrón). De ellas, las dos primeras (χ_{11} y χ_{1-1}) son también a la vez funciones propias del operador μ_z correspondientes al valor propio $\mu_z = 0$. En cambio, las funciones χ_{10} y χ_{00} no son funciones propias de μ_z; sí lo son las combinaciones

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10} + \chi_{00}) = \alpha_+\beta_-, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10} - \chi_{00}) = \alpha_-\beta_+. \tag{84.5}$$

Es fácil ver que los únicos elementos de matriz $\langle S'S'_z|\mu_z|SS_z\rangle$ diferentes de cero, calculados respecto de las funciones (84.4), son los elementos

$$\langle 00 \,|\, \mu_z \,|\, 10\rangle = \langle 10 \,|\, \mu_z \,|\, 00\rangle = 2\mu_0. \tag{84.6}$$

En campos magnéticos débiles (cuando $\mu_0 H \ll \Delta$, donde Δ es la diferencia entre los niveles de energía con $S = 0$ y $S = 1$) la aproximación de partida para el cálculo del desdoblamiento Zeeman son estados con valores determinados del spin total. En primera aproximación este desdoblamiento viene dado por el valor medio del operador de la energía de perturbación

$$V_H = -\mu_z H.$$

Pero todos los elementos de matriz diagonales del operador μ_z (y por ello también de V_H), calculados mediante las funciones (84.4) son iguales a cero. Así, pues, en los campos débiles no existe efecto Zeeman lineal en el positonio.

En el caso límite opuesto de campos intensos ($\mu_0 H \gg \Delta$) se puede prescindir de la interacción de los spins, interacción que conduce a establecer determinados valores de S. Las componentes del nivel desdoblado corresponderán entonces a estados con valores determinados $\mu_z = \pm 2\mu_0$ [representados por las funciones (84.5)], y el valor de su desplazamiento será igual a $\pm 2\mu_0 H$.

PROBLEMAS

1. Determinar la estructura fina de los niveles del parapositonio (*V. B. Berestetskiĭ*, 1949)★.

Solución. La energía buscada de desdoblamiento del nivel viene dada por los valores medios de los términos correctivos en el hamiltoniano (84.1) calculados respecto de las funciones de onda de los estados no perturbados con diferentes valores $j = l$ (iguales a $0,1, \ldots, n-1$). Para $S = 0$ la contribución distinta de cero resulta solamente de V_1 y del segundo término en V_3.

Las funciones de onda no perturbadas (designémoslas por ψ) satisfacen la ecuación de Schrödinger★★

$$\mathbf{p}^2\psi = -\Delta\psi = \left(E + \frac{1}{r}\right)\psi, \quad E = -\frac{1}{4n^2}.$$

Por ello

$$\mathbf{p}^4\psi = \mathbf{p}^2\left(E+\frac{1}{r}\right)\psi = \left(E+\frac{1}{r}\right)^2\psi - \psi\Delta\frac{1}{r} - 2\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot(\nabla\psi) =$$
$$= \left(E+\frac{1}{r}\right)^2\psi + 4\pi\delta(r)\psi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

El valor medio es:

$$\overline{\mathbf{p}^4} = \overline{\left(E+\frac{1}{r}\right)^2} + 4\pi|\psi(0)|^2 + \int_0^\infty\int \frac{\partial|\psi|^2}{\partial r}\,dr\,do.$$

La última integral es igual a $-\int|\psi(0)|^2 do$; dado que $\psi(0) \neq 0$ solamente para $l = 0$ y que las funciones de onda de los estados-S poseen simetría esférica, la integral es igual a $4\pi|\psi(0)|^2$ y se reduce con el segundo término.

Introduciendo el operador momento cinético orbital $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, escribamos:

$$-\mathbf{p}^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\mathbf{l}^2\psi}{r^2} = -\left(E+\frac{1}{r}\right)\psi.$$

De aquí se sigue para el otro valor medio que necesitamos

$$\int \psi^* \frac{r}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\cdot\mathbf{p}\psi\, d^3x = -\int \psi^* \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\,d^3x = \frac{1}{r}\left(E+\frac{1}{r}\right) - 4\pi|\psi(0)|^2 - l(l+1)\overline{r^{-3}}$$

(para $l = 0$ no existe el último término).

★ El cálculo de la estructura fina del ortopositonio puede verse en V. B. Berestetskiĭ, Zh. ETF, **19**, 1130 (1949); R. Ferrell, Phys. Rev. **84**, 858 (1951); A. A. Sokolov, V. N. Tsytovich, Zh. ETF, **24**, 253 (1953).

★★ Para el cálculo conviene utilizar unidades atómicas.

De acuerdo con las conocidas fórmulas de la teoría del átomo de hidrógeno [cf. III (36.14) (36.16)] — teniendo en cuenta la substitución de la masa m del electrón por $m/2$ — tenemos

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{8\pi n^3}\delta_{l0},\ \overline{r^{-1}} = \frac{1}{2n^2},\ \overline{r^{-2}} = \frac{1}{2n^3(2l+1)},$$
$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{4n^3 l(l+1)(2l+1)} \qquad (l \neq 0).$$

Mediante las fórmulas que preceden se obtiene para los niveles de energía buscados del parapositonio

$$E_{nl} = -\frac{1}{4n^2} - \alpha^2 \frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{2l+1} - \frac{11}{32n}\right).$$

2. Determinar la diferencia de energías de los estados fundamentales ($n = 1$, $l = 0$) del orto- y parapositonio.

Solución. La dependencia de la energía con relación al spin total S para $l = 0$ está contenida tan sólo en el valor medio del segundo término en V_3 (el primer término, en cambio, se anula al promediar respecto de los ángulos en un estado-S, que presenta simetría esférica*). El nivel fundamental del ortopositonio ($^3S_1$) se encuentra por encima del nivel fundamental del parapositonio ($^1S_0$) y la distancia entre ambos niveles es

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \frac{7}{12}\alpha^2 \frac{me^4}{\hbar^2} = 8{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{eV}.$$

§ 85. Interacción de los átomos a grandes distancias

Entre dos átomos neutros que se encuentran a distancias r grandes (en comparación con sus propias dimensiones) actúan fuerzas de atracción. El cálculo ordinario de estas fuerzas según la mecánica cuántica (III, § 89) deja de ser aplicable, sin embargo, a distancias demasiado grandes. Ocurre, en efecto, que en este cálculo se considera solamente la interacción electrostática, es decir, no se tienen en cuenta los efectos de retardo. Esta manera de abordar el problema es válido tan sólo en tanto que la distancia r se conserva pequeña comparada con las longitudes características de las ondas λ_0 en los espectros de los átomos en interacción mutua. En este párrafo el cálculo se efectuará de manera que esté libre de tal limitación.

Procederemos más o menos como en el § 83, es decir, calcularemos la amplitud de dispersión elástica (sin variación del estado interno) de dos átomos diferentes en la primera aproximación no nula. La expresión a que se llegue se comparará con la amplitud que se obtendría representando la interacción de los átomos por una energía potencial $U(r)$.

En este último caso, el primer elemento de la matriz-S que no se anula y que describe el proceso en cuestión, sería un elemento de primera aproximación

* El promedio respecto de los ángulos debe efectuarse antes de integrar respecto de r, como es evidente por el método de cálculo de la integral (83.14) que conduce al primer término de V_3.

$$S_{fi} = -i\int \psi_1'^*(\boldsymbol{r}_1)\,\psi_2'^*(\boldsymbol{r}_2)\,U(r)\,\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\,\psi_2(\boldsymbol{r}_2)\,d^3x_1 d^3x_2 \times$$
$$\times \int \exp\{-i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2')\,t\}\,dt. \qquad (85.1)$$

Aquí ψ_1, ψ_2 y ψ_1', ψ_2' son las partes, independientes del tiempo, de las funciones de onda (ondas planas) que representan el movimiento de translación de los dos átomos con los impulsos iniciales y finales; ε_1, ε_2 y ε_1', ε_2' son las energías cinéticas de este movimiento; las coordenadas $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ de los átomos como un todo pueden interpretarse como las coordenadas de sus núcleos, y la distancia $r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$. La integral respecto del tiempo en (85.1) da, como de ordinario, una función-δ que expresa la ley de conservación de la energía. Para facilitar la ulterior comparación, sin embargo, será conveniente considerar formalmente el caso límite en que las masas de los átomos son infinitamente grandes; para impulsos dados, a este límite corresponden energías ε iguales a cero. Cabe decir, de otra manera, que se consideran intervalos de tiempo que son pequeños comparados con los períodos $1/\varepsilon$. Entonces (85.1) toma la forma

$$S_{fi} = -it\iint \psi_1'^*\psi_2'^* U(r)\,\psi_1\psi_2\,d^3x_1 d^3x_2, \qquad (85.2)$$

donde t es el intervalo de integración respecto del tiempo.

El cálculo efectivo de la amplitud de dispersión elástica se puede desarrollar en dos etapas en el caso de las hipótesis que hemos hecho. En primer lugar, promediamos el operador-S respecto de las funciones de onda de los estados no alterados (los fundamentales) de ambos átomos (para coordenadas $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ dadas de sus núcleos) y también respecto del vacío fotónico — ya que no existen fotones ni al principio ni al final del proceso. En definitiva obtendremos una cantidad que es función de la distancia entre los núcleos; designémosla por $\langle S(r)\rangle$ [1]*. Para hallar el elemento de matriz buscado de la transición hay que calcular luego la integral

$$S_{fi} = \iint \psi_1'^*\psi_2'^* \langle S(r)\rangle\,\psi_1\psi_2 d^3x_1 d^3x_2. \qquad (85.3)$$

Comparando con (85.2), vemos que si se obtuviera la expresión $\langle S(r)\rangle$ en la forma

$$\langle S(r)\rangle = -itU(r),$$

la función $U(r)$ será precisamente la energía buscada de interacción de los átomos.

Dado que en el presente caso se trata no de la colisión de partículas elementales, sino de sistemas complejos (de átomos que en los estados intermedios pueden estar excitados), las reglas ordinarias formales de la técnica de diagramas no son aplicables aquí de manera inmediata y partiremos de la expresión inicial del operador S en forma de desarrollo (73.10).

Para la interacción de los átomos son esenciales las componentes de los campos con frecuencias del orden de las atómicas (y menores). Las correspondientes longi-

---

* En vez de la notación más compleja del elemento de matriz diagonal con indicación de los estados del átomo y del campo de fotones.

tudes de onda son grandes en comparación con las dimensiones atómicas. En consecuencia, el operador de interacción electromagnética se puede tomar en la forma

$$V = -\mathbf{E}(\boldsymbol{r}_1)\,\mathbf{d}_1 - \mathbf{E}(\boldsymbol{r}_2)\,\mathbf{d}_2, \tag{85.4}$$

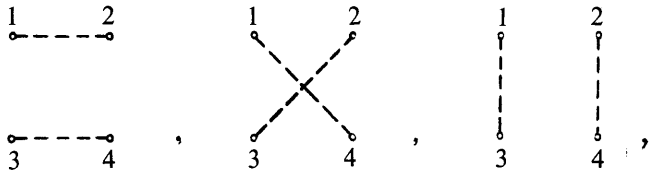
donde $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ son los operadores de los momentos dipolares de los átomos (se trata de operadores que dependen del tiempo, es decir, operadores de Heisenberg), y $\mathbf{E}(\boldsymbol{r})$ es el operador del campo eléctrico en los puntos en que se encuentran los correspondientes átomos.

Como es sabido, los valores medios del momento dipolar de un átomo en sus estados estacionarios es igual a cero (III, § 75). Se sigue de aquí que una amplitud de dispersión diferente de cero aparece tan sólo en la cuarta aproximación de la teoría de perturbaciones, es decir, como elemento de matriz del operador

$$S^{(4)} = \frac{(-i)^4}{4!}\int dt_1 \ldots \int dt_4 \cdot T\{V(t_1)\,V(t_2)\,V(t_3)\,V(t_4)\}. \tag{85.5}$$

En efecto, en los órdenes de aproximación más bajos cada término en los productos de los operadores V contendrá por lo menos uno de los operadores $\mathbf{d}_1$ o $\mathbf{d}_2$ en primer grado y se anulará al promediar respecto del estado del correspondiente átomo.

Promediemos el operador (85.5) respecto del vacío fotónico. Según el teorema de Wick, el valor medio del producto de los cuatro operadores del campo $\mathbf{E}$ se reduce a la suma de los productos de sus promedios dos a dos (contracciones). La descomposición en pares se puede efectuar de tres maneras, que cabe representar mediante los diagramas



(85.6)

donde las líneas de trazos representan los enlaces, y a los números corresponden los argumentos t_1, t_2, t_3, t_4. Además, a cada punto pueden corresponder las coordenadas espaciales $\boldsymbol{r}_1$ o $\boldsymbol{r}_2$ (a dos puntos corresponde $\boldsymbol{r}_1$, y a dos, $\boldsymbol{r}_2$; en el caso contrario, en el término en cuestión de la suma uno de los operadores $\mathbf{d}_1$ o $\mathbf{d}_2$ actúa en primer grado y se anula al promediar respecto al estado del átomo). Es evidente que en los puntos unidos por líneas deben encontrarse diferentes $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$. De no ser así, el diagrama (es decir, el término que le corresponde en el elemento de matriz) se reducirá al producto de funciones de $\boldsymbol{r}_1$ y de $\boldsymbol{r}_2$ independientes, en vez de ser función de la diferencia $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$; tales términos nada tienen que ver con la dis-

persión*. De acuerdo con estas condiciones se pueden distribuir los argumentos $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ según los cuatro puntos del diagrama de cuatro maneras diferentes. Teniendo en cuenta también que los operadores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ conmutan y promediando respecto de los estados de cada uno de los átomos, se encuentra que todos los $3 \cdot 4 = 12$ términos que se obtienen de esta manera son iguales entre sí (difieren tan sólo en la notación de las variables de integración). En definitiva obtendremos

$$\langle S(r)\rangle = \frac{1}{2}\int dt_1 \ldots \int dt_4 \cdot \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{E}_i(\boldsymbol{r}_1, t_1)\ \mathrm{E}_k(\boldsymbol{r}_2, t_2))\rangle \times$$
$$\times \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{E}_l(\boldsymbol{r}_2, t_3)\,\mathrm{E}_m(\boldsymbol{r}_1, t_4))\rangle \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{d}_{1i}(t_1)\,\mathrm{d}_{1m}(t_4))\rangle \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{d}_{2k}(t_2)\,\mathrm{d}_{2l}(t_3))\rangle, \quad (85.7)$$

donde i, k son índices vectoriales tridimensionales.

Para calcular las cantidades

$$D^E_{ik}(x_1 - x_2) = \langle \mathrm{T}\,(\mathrm{E}_i(x_1)\,\mathrm{E}_k(x_2))\rangle \quad (85.8)$$

nos valdremos del contraste de los potenciales en el que el potencial escalar $\Phi = 0$. Entonces es $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$ y tenemos

$$D^E_{ik}(x_1 - x_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\langle \mathrm{T}\,(\mathrm{A}_i(x_1)\,\mathrm{A}_k(x_2))\rangle = i\frac{\partial^2}{\partial t^2} D_{ik}(x),$$

donde $x = x_1 - x_2$ y $D_{ik}(x)$ es el propagador de fotón en el contraste adoptado**. Por ello,

$$D^E_{ik}(x) = -i\int \omega^2\, D_{ik}(k)\, e^{-ikx}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}, \quad (85.9)$$

donde $D_{ik}(k)$ es el propagador de fotón en la representación de impulsos; según (77.14),

$$D_{ik}(k) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2 + i0}\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{\omega^2}\right). \quad (85.10)$$

Las cantidades

$$\alpha_{ik}(t_1 - t_2) = i\langle \mathrm{T}\,(\mathrm{d}_i(t_1)\,\mathrm{d}_k(t_2))\rangle \quad (85.11)$$

las desarrollaremos en integral de Fourier

$$\alpha_{ik}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\alpha_{ik}(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Haciendo por comodidad $t_2 = 0$, $t_1 = t$, según la definición del producto-T escribiremos

---

* Estos términos conducen a correcciones de los valores propios de la energía de cada uno de los átomos, correcciones que aquí no nos interesan.

** La primera derivada $\frac{\partial}{\partial t} D_{ik}(t)$ presenta un salto finito en $t = 0$. En consecuencia, la derivada segunda, es decir, la función $D^E_{ik}(t)$, contiene también un término con la función-δ [$\sim \delta^4(x_2 - x_1)$]. Este término, sin embargo, es igual a cero para todo $\boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2$ y no nos interesa aquí.

$$\alpha_{ik}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\alpha_{ik}(t)\,dt =$$

$$= i\int_{-\infty}^{0} e^{i\omega t}\langle \mathrm{d}_k(0)\,\mathrm{d}_i(t)\rangle\,dt + i\int_{0}^{\infty} e^{i\omega t}\langle \mathrm{d}_i(t)\,\mathrm{d}_k(0)\rangle\,dt. \qquad (85.12)$$

Los valores medios que aquí intervienen (relativos al estado fundamental del átomo) se expresan en función de los elementos de matriz del momento dipolar:

$$\langle \mathrm{d}_k(0)\,\mathrm{d}_i(t)\rangle = \sum_n (d_k)_{0n}(d_i)_{n0}e^{i\omega_{n0}t},$$

$$\langle \mathrm{d}_i(t)\,\mathrm{d}_k(0)\rangle = \sum_n (d_i)_{0n}(d_k)_{n0}e^{-i\omega_{n0}t}.$$

Substituyendo estas expresiones en (85.12) y efectuando la integración, se obtendrá *

$$\alpha_{ik}(\omega) = \sum_n \left\{\frac{(d_i)_{0n}(d_k)_{n0}}{\omega_{n0}-\omega} + \frac{(d_k)_{0n}(d_i)_{n0}}{\omega_{n0}+\omega}\right\}. \qquad (85.13)$$

Si el estado fundamental del átomo es un estado S, este tensor se reduce al escalar $\alpha_{ik}(\omega) = \alpha(\omega)\delta_{ik}$. Pero si el átomo posee un momento cinético, este mismo resultado se obtiene después de promediar respecto de las direcciones de dicho momento, operación que supondremos se ha llevado a cabo (naturalmente, nos interesa la interacción de los átomos promediada respecto de sus orientaciones mutuas). En (85.13) se ve también que

$$\alpha(-\omega) = \alpha(\omega).$$

La magnitud $\alpha(\omega)$ (para $\omega > 0$) no es sino la polarizabilidad del átomo [cf. (60.17)].

Substituyendo las expresiones obtenidas en (85.7), se encuentra

$$\langle S(r)\rangle = \frac{1}{2}\int dt_1 \ldots dt_4 \cdot \frac{d\Omega_1}{2\pi}\frac{d\Omega_2}{2\pi}\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\alpha_1(\Omega_1)\alpha_2(\Omega_2)\times$$
$$\times \omega_1^2 D_{ik}(k_1)\,\omega_2^2 D_{ik}(k_2)\times$$
$$\times \exp\{i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) - i\omega_1(t_1-t_2) - i\omega_2(t_3-t_4) -$$
$$- i\Omega_1(t_1-t_4) - i\Omega_2(t_2-t_3)\}.$$

La integración respecto de las tres primeras variables tiempo da funciones-δ (en virtud de las cuales — $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega_2 = \omega_1 \equiv \omega$), y al integrar respecto de la cuarta, se obtiene el factor t:

$$\langle S(r)\rangle = -itU(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|),$$

donde

---

* Para la convergencia de las integrales en (85.12) hay que interpretar ω en la primera de ellas como $\omega - i0$, y en la segunda, como $\omega + i0$. Con esto, a la vez, se explica en qué sentido hay que entender la expresión (85.13) cerca de sus polos.

$$U(r) = \frac{i}{2(2\pi)^7} \int d^3k_1 d^3k_2 d\omega \cdot \omega^4 \alpha_1(\omega)\alpha_2(\omega) D_{ik}(\boldsymbol{k}_1, \omega) D_{ik}(\boldsymbol{k}_2, \omega) \times$$
$$\times \exp\{i\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\},$$

o bien substituyendo aquí (85.10),

$$U(r) = \frac{i}{16\pi^5} \int d^3k_1 d^3k_2 d\omega \cdot \alpha_1(\omega)\alpha_2(\omega) \times$$
$$\times \frac{3\omega^4 - \omega^2(\boldsymbol{k}_1^2 + \boldsymbol{k}_2^2) + (\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2)^2}{(\omega^2 - \boldsymbol{k}_1^2 + i0)(\omega^2 - \boldsymbol{k}_2^2 + i0)} e^{i\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)}. \qquad (85.14)$$

Esta fórmula da también la energía de interacción de los átomos a distancias cualesquiera que sean grandes en comparación con las dimensiones atómicas a. La integral puede simplificarse y ser calculada hasta el final en los casos límite de distancias « pequeñas » ($a \ll r \ll \lambda_0$) y « grandes » ($r \gg \lambda_0$).

Para una distancia dada r, en la integral cuenta esencialmente el dominio de valores de los vectores de onda tales que $|\boldsymbol{k}| \sim 1/r$. Para $r \ll \lambda_0$ tenemos: $|\boldsymbol{k}| \gg \omega_0$ (ω_0 son las frecuencias atómicas), y en el integrando de (85.14) se puede prescindir en todas partes [salvo en las funciones $\alpha(\omega)$] de los términos en ω^2, frente a los términos que contienen $\boldsymbol{k}^2$. Hecho esto, no es difícil reducir $U(r)$ a la fórmula ordinaria de London (III, § 89).

Consideremos el caso opuesto en que $r \gg \lambda_0$. Ante todo, efectuemos en (85.14) la integración respecto de $d\omega$. Cerremos el camino de integración en el semiplano superior de la variable compleja ω y calculemos la integral mediante los residuos del integrando en los polos que presenta en dicho semiplano. Al hacerlo basta tener en cuenta únicamente los ceros del denominador, que son tales que

$$\omega \sim |\boldsymbol{k}| \sim \frac{1}{r} \ll \omega_0;$$

los polos de la función $\alpha(\omega)$, en cambio, se hallan cerca de $\omega \sim \omega_0$ y, en el caso presente, carecen de importancia. Calculando así la integral respecto de $d\omega$ y substituyendo luego la integración respecto de $\boldsymbol{k}_1$ y $\boldsymbol{k}_2$ por integraciones respecto de $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$ y $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k}_2$, reducimos $U(r)$ a una integral de Fourier

$$U(r) = \int U(q) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \qquad (85.15)$$

en la que

$$U(q) = -\frac{\alpha_1(0)\alpha_2(0)}{2\pi} \int \frac{d^3k}{kk_1} \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)^2 - kk_1(2k_1^2 + 2k^2 + 3kk_1)}{k + k_1} \qquad (85.16)$$

(aquí y en lo que sigue $\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}$, $k_1 = |\boldsymbol{k}_1|$, $k = |\boldsymbol{k}|$). En las funciones $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, tomadas en los puntos $\omega \sim k$, substituimos los pequeños valores del argumento ($\omega \ll \omega_0$) por cero, es decir, se han substituido estas funciones por las polarizabilidades estáticas de los átomos.

La integral (85.16) diverge cuando $k \to \infty$, lo que se debe a que la aproximación dipolar utilizada deja de ser aplicable para $k \gtrsim 1/a$. Esta divergencia, sin embargo, no tiene importancia. En efecto, para el cálculo del comportamiento asintótico

de $U(r)$ cuando $r \to \infty$ cuentan solamente los términos de $U(q)$ que poseen una singularidad en $q = 0$; precisamente estos términos singulares dan una contribución de tipo potencial (respecto de $1/r$) en $U(r)$. Pero el término singular en $U(q)$, conforme veremos, viene determinado por la parte convergente de la integral (85.16).

El elemento de integración d^3k en (85.16) lo substituiremos por $2\pi k^2 dk\, d\cos\theta$ (donde θ es el ángulo formado por $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{q}$) y la diferencial $d\cos\theta$ por

$$d\cos\theta = \frac{k_1 dk_1}{qk},$$

donde

$$k_1 = \sqrt{k^2 + q^2 + 2kq\cos\theta},\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1 = \frac{1}{2}(k_1^2 + k^2 - q^2).$$

De esta manera, en (85.16) se aplica la substitución

$$\frac{d^3k}{kk_1} \to \frac{2\pi}{q}\, dk\, dk_1,$$

a la vez que la integración respecto de dk_1 se efectúa entre los límites $|k - q|$ y $k + q$. Por la forma del integrando llegamos a la conclusión de que la singularidad puede proceder solamente de la integración del denominador. Dado que únicamente nos interesa el término singular, podemos por ello simplificar sin más la integral desarrollando el numerador en potencias de $k + k_1$ y limitarnos al término de orden cero (en otras palabras, en el numerador se hace simplemente $k_1 = -k$). Hecho esto obtendremos

$$U(q) = -\frac{\alpha_1(0)\,\alpha_2(0)}{4q}\int_0^\infty (8k^4 - 4k^2q^2 + q^4)\ln\frac{2k+q}{k+|k-q|}\,dk. \qquad (85.17)$$

El término singular (para $q \to 0$) en esta integral tiene la forma $q^5 \ln q$. Separándolo, obtenemos para la componente de Fourier de la energía de interacción *

$$U(q) = \frac{23\alpha_1(0)\,\alpha_2(0)}{120} q^4 \ln q. \qquad (85.18)$$

---

* La integral (85.17) se calcula de manera elemental, aunque pesada; tomando como límite superior un número grande N en vez de ∞ y separando los términos que contienen $\ln q$, se obtendrá el resultado (85.18). Sin embargo, es mucho más sencillo obtener este resultado observando que, en tanto la parte de la integral que nos interesa presenta una singularidad logarítmica para $q \to 0$, esta parte viene determinada por el intervalo de integración en que $k \gg q$. Desarrollando el logaritmo en potencias de $q/2k$,

$$\ln\frac{2k+q}{2k-q} \approx 2\left[\frac{q}{2k} + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2k}\right)^5\right],$$

separamos integrales divergentes de la forma $\int dk/k$. que hay que cortar inferiormente para $k \sim q$ (en cambio, el límite superior carece de importancia).

La transformación inversa de Fourier se efectúa mediante la fórmula *

$$\int e^{iqr}\, q^4 \ln q \, \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -\frac{30}{\pi r^7}. \tag{85.19}$$

De esta manera, obtenemos en definitiva

$$U(r) = -\frac{23}{4\pi}\,\frac{\alpha_1(0)\,\alpha_2(0)}{r^7}\,, \tag{85.20}$$

con lo que queda determinada la interacción de dos átomos a grandes distancias ($r \ll \lambda_0$)**.

---

* Una integración en el espacio-q, inmediata en coordenadas esféricas, permite obtener

$$\lim_{\delta \to +0} \int e^{iqr - q\delta}\, q^\nu \, \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -\frac{\Gamma(\nu+2)\operatorname{sen}\frac{\pi\nu}{2}}{2\pi^2 r^{\nu+3}}\,.$$

Derivando esta fórmula respecto del parámetro ν y haciendo luego $\nu = 4$ se obtiene el resultado (85.19).

** Los primeros en obtener esta fórmula fueron *H. B. Casimir* y *D. Polder*, 1948. En la deducción aquí presentada hemos seguido a *I. E. Dzialoshinskiĭ*.

Capítulo X

INTERACCIÓN DE ELECTRONES CON FOTONES

§ 86. La dispersión de un fotón por un electrón

La conservación del 4-impulso en la dispersión de un fotón por un electrón libre *(efecto Compton)* se expresa por la igualdad

$$p + k = p' + k', \tag{86.1}$$

donde p y k son los 4-impulsos del electrón y del fotón antes del choque, y p' y k' sus 4-impulsos después del mismo. Los invariantes cinemáticos introducidos en el § 67 son:

$$\begin{aligned} s &= (p+k)^2 = (p'+k')^2 = m^2 + 2pk = m^2 + 2p'k', \\ t &= (p-p')^2 = (k'-k)^2 = 2(m^2 - pp') = -2kk', \\ u &= (p-k')^2 = (p'-k)^2 = m^2 - 2pk' = m^2 - 2p'k, \\ s &+ t + u = 2m^2. \end{aligned} \tag{86.2}$$

El proceso considerado se representa por dos diagramas de Feynman (75.14) y su amplitud es

$$M_{fi} = -4\pi e^2 e'^*_\mu e_\nu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u), \tag{86.3}$$

donde

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{s - m^2} \gamma^\mu (\hat{p} + \hat{k} + m) \gamma^\nu + \frac{1}{u - m^2} \gamma^\nu (\hat{p} - \hat{k}' + m) \gamma^\mu. \tag{86.4}$$

Aquí, e, e' son los 4-vectores polarización de los fotones inicial y final; u, u', las amplitudes bispinoriales de los correspondientes electrones.

Según las reglas expuestas en el § 66, para estados de polarización arbitrarios de las partículas el cuadrado $|M_{fi}|^2$ se substituye por

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \operatorname{Tr} \{\rho^{(e)\prime} \rho^{(\gamma)\prime}_{\lambda\mu} Q^{\mu\nu} \rho^{(e)} \rho^{(\gamma)}_{\nu\sigma} \overline{Q}^{\lambda\sigma}\}. \tag{86.5}$$

En esta expresión $\rho^{(e)}$, $\rho^{(e)\prime}$ son las matrices densidad del electrón inicial y final;

$\rho^{(\gamma)}$, $\rho^{(\gamma)'}$ son las magnitudes análogas para los fotones; los índices de fotón (tensoriales) aparecen en forma explícita, y los de electrón (bispinoriales) se sobreentienden; el signo Tr se refiere precisamente a estos últimos. A estos mismos índices se refiere el signo + en la definición $\overline{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q^+_{\mu\nu}\gamma^0$.

Consideremos la dispersión de un fotón no polarizado por un electrón asimismo no polarizado, sin que nos interesen cuáles sean sus polarizaciones después de la dispersión. El promedio respecto de las polarizaciones de todas las partículas se consigue mediante las matrices densidad:

$$\rho^{(\gamma)}_{\lambda\mu} = \rho^{(\gamma)'}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} g_{\lambda\mu}, \quad \rho^{(e)} = \frac{1}{2}(\hat{p} + m), \quad \rho^{(e)'} = \frac{1}{2}(\hat{p}' + m);$$

el paso a la suma respecto de las polarizaciones de las partículas finales se logra multiplicando luego por $2 \cdot 2 = 4$.

Según la fórmula (65.23) [en la cual hay que hacer ahora $I^2 = \frac{1}{4}(s - m^2)^2$ — véase (65.15a)—] obtendremos para la sección eficaz

$$d\sigma = \frac{\pi e^4}{4} \frac{dt}{(s - m^2)^2} \operatorname{Tr}\{(\hat{p}' + m) Q^{\lambda\mu} (\hat{p} + m) \overline{Q}_{\lambda\mu}\}.$$

Mediante las fórmulas (66.2a) se encuentra que $\overline{Q}_{\mu\lambda} = Q_{\lambda\mu}$. Separando los términos que se transforman entre sí al aplicar la substitución $k \leftrightarrow -k'$ (y, según esto, en la $s \leftrightarrow u$), representaremos la sección eficaz en la forma

$$d\sigma = dt \frac{\pi e^4}{(s - m^2)^2} [f(s, u) + g(s, u) + f(u, s) + g(u, s)],$$

donde se ha hecho

$$f(s, u) = \frac{1}{4(s - m^2)^2} \operatorname{Tr}\{(\hat{p}' + m)\gamma^\mu (\hat{p} + \hat{k} + m)\gamma^\nu (\hat{p} + m)\gamma_\nu (\hat{p} + \hat{k} + m)\gamma_\mu\},$$

$$g(s, u) = \frac{1}{4(s - m^2)(u - m^2)} \times$$
$$\times \operatorname{Tr}\{(\hat{p}' + m)\gamma^\mu (\hat{p} + \hat{k} + m)\gamma^\nu (\hat{p} + m)\gamma_\mu (\hat{p} - \hat{k}' + m)\gamma_\nu\}$$

(al introducir estas definiciones lo hacemos teniendo ya presente que el resultado dependerá sólo de magnitudes invariantes).

La suma respecto de μ y ν se efectúa mediante las fórmulas (22.6); prescindiendo luego de los términos que contienen un número impar de factores γ, obtendremos

$$f(s, u) = \frac{1}{(s - m^2)^2} \times$$
$$\times \operatorname{Tr}\{\hat{p}'(\hat{p} + \hat{k})\hat{p}(\hat{p} + \hat{k}) + 4m^2(\hat{p} + \hat{k})(\hat{k} - \hat{p}') + m^2\hat{p}\hat{p}' + 4m^4\}.$$

Calculando la traza de acuerdo con la fórmula (22.13) y expresando todas las cantidades en función de los invariantes s, u, se encuentra después de simples transformaciones

$$f(s,\ u)=\frac{2}{(s-m^2)^2}\{4m^4-(s-m^2)(u-m^2)+2m^2(s-m^2)\}.$$

De manera análoga se calcula g:

$$g(s,\ u)=\frac{2m^2}{(s-m^2)(u-m^2)}\{4m^2+(s-m^2)+(u-m^2)\}.$$

En definitiva, para la sección eficaz obtendremos

$$d\sigma=8\pi r_e^2\frac{m^2dt}{(s-m^2)^2}\left\{\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{s-m^2}{u-m^2}+\frac{u-m^2}{s-m^2}\right)\right\},\qquad(86.6)$$

donde $r_e=e^2/m$. Esta fórmula expresa la sección eficaz en función de cantidades invariantes. Mediante ella es fácil expresar la sección eficaz en función de los parámetros de la colisión en cualquier sistema de referencia concreto.

Hagámoslo para el sistema de referencia del laboratorio, en el cual el electrón se encuentra en reposo antes del choque: $p=(m,\ 0)$. Aquí

$$s-m^2=2m\omega,\qquad u-m^2=-2m\omega'.\qquad(86.7)$$

Escribiendo la ecuación de conservación del 4-impulso en la forma $p+k-k'=p'$ y elevándola al cuadrado, obtendremos

$$pk-pk'-kk'=0,$$

de donde (en el sistema del laboratorio)

$$m(\omega-\omega')-\omega\omega'(1-\cos\vartheta)=0,$$

ϑ es el ángulo de dispersión del fotón. Esta igualdad determina la relación entre el cambio de energía del fotón y el ángulo de dispersión:

$$\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega}=\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta).\qquad(86.8)$$

El invariante t se reduce a

$$t=-2kk'=-2\omega\omega'(1-\cos\vartheta).$$

Para una energía ω dada se encuentra [mediante (86.8)]

$$dt=2\omega'^2d\cos\vartheta=\frac{1}{\pi}\omega'^2d\sigma'\qquad(d\sigma'=2\pi\ \mathrm{sen}\ \vartheta\ d\vartheta).$$

La substitución de las expresiones que preceden en (86.6) conduce a la forma siguiente de la sección eficaz de dispersión en el sistema de referencia del laboratorio:

$$d\sigma=\frac{r_e^2}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\mathrm{sen}^2\vartheta\right)d\sigma'\qquad(86.9)$$

(*O. Klein, Y. Nishina*, 1929; *I. E. Tamm*, 1930).

Dado que el ángulo ϑ está ligado de manera unívoca con ω' por la relación (86.8), la sección eficaz se puede expresar en función de la energía ω' del fotón dispersado:

$$d\sigma = \pi r_e^2 \frac{m\, d\omega'}{\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{m}{\omega'} - \frac{m}{\omega}\right)^2 - 2m\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right)\right], \tag{86.10}$$

variando ω' entre los límites

$$\frac{\omega}{1+2\frac{\omega}{m}} \leqslant \omega' \leqslant \omega. \tag{86.11}$$

Para $\omega \ll m$ en (86.9) se puede suponer $\omega \approx \omega$ y se obtiene, como debía ser, la fórmula clásica no-relativista de Thomson

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \vartheta)\, do' \tag{86.12}$$

[véase II (78.5)].

Para calcular la sección eficaz total volvamos a la fórmula (86.6). Los invariantes s, t, u que intervienen en ella toman valores que satisfacen las desigualdades

$$s \geqslant m^2,\ t \leqslant 0,\ us \leqslant m^4. \tag{86.13}$$

Éstas se obtuvieron ya en el § 68 (la región física que les corresponde es la I de la fig. 9). Es fácil comprobarlas también directamente escribiendo las expresiones de los invariantes en el sistema del centro de masa. En él $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k} = 0$ y las energías del electrón ε y del fotón ω están ligadas por la igualdad $\varepsilon = \sqrt{\omega^2 + m^2}$. Los invariantes son:

$$\begin{aligned} s &= (\varepsilon + \omega)^2 = m^2 + 2\omega(\omega + \varepsilon), \\ u &= m^2 - 2\omega(\varepsilon + \omega\cos\theta), \\ t &= -2\omega^2(1 - \cos\theta), \end{aligned} \tag{86.14}$$

donde θ es el ángulo de dispersión (ángulo entre $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p}'$ ó entre $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{k}'$). Las tres desigualdades (86.13) se obtienen a partir de las condiciones: $\omega \geq 0$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

Para s dado (es decir, para una energía dada de las partículas), la integración respecto de t se puede substituir por la integración respecto de $u = 2m^2 - s - t$ en el intervalo

$$\frac{m^4}{s} \leqslant u \leqslant 2m^2 - s.$$

Introduciendo en vez de s, u las cantidades

$$x = \frac{s - m^2}{m^2}, \qquad y = \frac{m^2 - u}{m^2}, \tag{86.15}$$

obtendremos

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{x^2} \int_{x/(x+1)}^{x} \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right] dy$$

y después de una integración elemental

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x}\left\{\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2}\right)\ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2}\right\}. \quad (86.16)$$

Los primeros términos del desarrollo dan, cuando $x \ll 1$ (caso no relativista),

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3}(1 - x). \quad (86.17)$$

El primer término es la sección eficaz clásica de Thomson. En el caso opuesto, el ultrarrelativista, en que $x \gg 1$, también el desarrollo de la fórmula (86.16) da

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x}\left(\ln x + \frac{1}{2}\right). \quad (86.18)$$

En el sistema de referencia del laboratorio

$$x = \frac{2\omega}{m}, \quad (86.19)$$

de modo que las fórmulas (86.16-19) proporcionan directamente la dependencia de la sección eficaz de dispersión por un electrón en reposo en función de la energía del fotón. En la fig. 15 se representa gráficamente σ en función de ω/m.

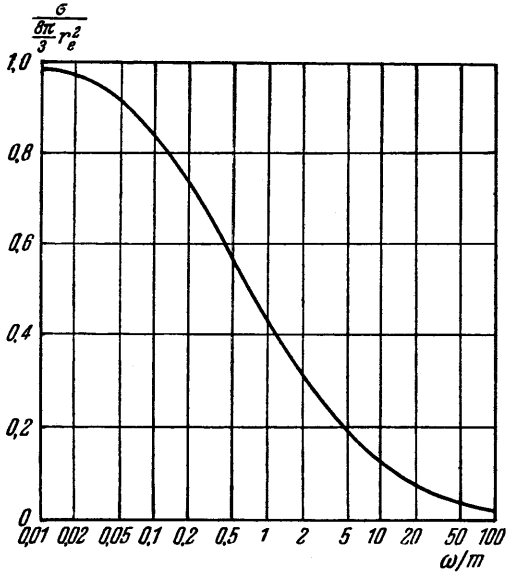


Fig. 15.

Observemos que en el caso ultrarrelativista la sección eficaz decrece al aumentar la energía, tanto en el sistema de referencia del laboratorio ($\sigma \sim \omega^{-1} \ln \omega$), como en el sistema del centro de masa ($x \approx 4\omega^2/m^2$, $\sigma \sim \omega^{-2} \ln \omega$). En cambio, la dis-

tribución angular en el mismo caso ultrarrelativista posee un carácter por completo diferente en estos dos sistemas de referencia.

En el sistema del laboratorio la sección eficaz diferencial presenta un máximo acusado en la dirección hacia adelante. En el estrecho cono $\vartheta \lesssim \sqrt{m/\omega}$ tenemos $\omega' \sim \omega$ y la sección eficaz es $d\sigma/do' \sim r_e^2$ (alcanzando el valor r_e^2 para $\vartheta \to 0$). Fuera de este cono, la sección eficaz decrece y en la región $\vartheta^2 \gg m/\omega$ [donde $\omega' \approx m/(1 - \cos\vartheta)$] tenemos:

$$\frac{d\sigma}{do'} = \frac{r_e^2}{2} \frac{m}{\omega(1-\cos\vartheta)},$$

es decir, la sección eficaz queda dividida por $\sim \omega/m$.

En el sistema del centro de masa, en cambio, la sección eficaz diferencial presenta un máximo en la dirección hacia atrás. Para $\pi - \theta \ll 1$ tenemos, según (86.14),

$$\frac{s-m^2}{m^2} \approx \frac{4\omega^2}{m^2}, \quad \frac{m^2-u}{m^2} \approx 1 + \frac{\omega^2}{m^2}(\pi-\theta)^2.$$

El término mayor en la expresión (86.6) de la sección eficaz da

$$d\sigma \approx 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{4(s-m^2)(m^2-u)},$$

de donde

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2} \frac{do'}{1+(\pi-\theta)^2\omega^2/m^2}.$$

La sección eficaz vale $d\sigma/do' \sim r_e^2$ en el estrecho cono $\pi - \theta \lesssim m/\omega$, y fuera de él queda dividida por $\sim \omega^2/m^2$.

§ 87. Dispersión de un fotón por un electrón. Efectos de polarización

Volvamos a las fórmulas de partida del párrafo precedente y veamos cómo deben efectuarse los cálculos teniendo en cuenta las polarizaciones de los fotones y electrones iniciales y finales.

La matriz densidad del fotón se expresa, según (8.17), mediante un par de 4-vectores unitarios $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ que satisfacen las condiciones (8.16). En el presente caso cabe elegir dichos vectores de la misma manera para ambos fotones: estos vectores son los 4-vectores introducidos en el § 71 *

---

* Otra manera de efectuar el cálculo consiste en considerar desde el principio un determinado sistema de referencia (digamos, el del laboratorio) y elegir para $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ vectores unitarios puramente espaciales $[e = (0, \boldsymbol{e})]$, perpendiculares a los impulsos de los fotones:

$$\boldsymbol{e}^{(1)} = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'|}, \quad \boldsymbol{e}^{(2)} = \frac{1}{\omega}\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(1)}$$

para el fotón $\boldsymbol{k}$ y

$$\boldsymbol{e}^{(1)} = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}'|}, \quad \boldsymbol{e}^{(2)} = \frac{1}{\omega'}\,\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{e}^{(1)}$$

para el fotón $\boldsymbol{k}'$. Sin embargo, todos los cálculos se realizarán entonces en forma tridimensional y el resultado no tendrá una forma invariante.

$$e^{(1)} = \frac{N}{\sqrt{-N^2}}, \qquad e^{(2)} = \frac{P}{\sqrt{-P^2}}, \tag{87.1}$$

donde

$$P^\lambda = (p^\lambda + p'^\lambda) - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2},$$
$$N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho,$$
$$K^\lambda = k^\lambda + k'^\lambda, \quad q^\lambda = k'^\lambda - k^\lambda = p^\lambda - p'^\lambda. \tag{87.2}$$

Las expresiones $Q^{\mu\nu}$ en (86.5) vienen dadas por la fórmula (86.4). Cabe considerarlas como componentes de un 4-tensor (en el sentido de que forman un 4-tensor después de formar las cantidades $\bar{u}' Q^{\mu\nu} u$, « en los encuadramientos », como se dice). Todas las componentes de un 4-tensor se pueden obtener proyectándolo sobre cuatro 4-vectores ortogonales dos a dos, por ejemplo, sobre los vectores antes definidos P, N, q, K. Dado que los tensores $\rho^{(\gamma)'}_{\mu\nu}$, $\rho^{(\gamma)}_{\mu\nu}$ contienen sólo componentes respecto de P y N, de hecho necesitaremos únicamente las componentes $Q_{\mu\nu}$ respecto de estos 4-vectores. En otras palabras, basta buscar en $Q_{\mu\nu}$ los términos de la forma

$$Q_{\mu\nu} = Q_0 (e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu) + Q_1 (e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(1)}_\nu) - $$
$$- iQ_2 (e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(1)}_\nu) + Q_3 (e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu); \tag{87.3}$$

los demás términos desaparecerían, de todas maneras, al substituir en (86.5). Las cantidades Q_0 y Q_3 son escalares, en el mismo sentido en que $Q_{\mu\nu}$ es un 4-tensor; contienen, por ello, las matrices γ tan sólo en combinaciones « invariantes »: $\hat{K}$ y análogas. En este mismo sentido Q_1 y Q_2 son pseudoescalares (¡N es un pseudovector!) y, en consecuencia, deben contener la matriz γ^5.

Proyectando directamente el tensor $Q_{\mu\nu}$, se encuentra

$$Q_0 = \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} (e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu)$$

etcétera. Para el cálculo conviene expresar primero $Q_{\mu\nu}$ en función de los 4-vectores P, N, q, K ortogonales entre sí:

$$Q^{\mu\nu} = \gamma^\mu \frac{\frac{1}{2}\hat{P} + m}{s - m^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\frac{1}{2}\hat{P} + m}{u - m^2} \gamma^\mu - \frac{1}{t} (\gamma^\mu \hat{K} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{K} \gamma^\mu).$$

El cálculo que después sigue se reduce a puras transformaciones algebraicas basadas en las fórmulas deducidas en el § 22. Además, es posible efectuar cambios en $Q^{\mu\nu}$ que no se reflejan en el resultado al formar los productos $\bar{u}' Q^{\mu\nu} u$. Por ejemplo, dado que

$$\bar{u}' (\hat{p} + \hat{p}') u = 2m\bar{u}' u,$$
$$\bar{u}' \gamma^5 \hat{q} u_1 = \bar{u}' (\gamma^5 \hat{p} + \hat{p}' \gamma^5) u = 2m\bar{u}' \gamma^5 u,$$

en $Q^{\mu\nu}$ se pueden substituir los términos

$$\hat{p}+\hat{p}' \to 2m, \qquad \gamma^5\hat{q} \to 2m\gamma^5. \tag{87.4}$$

Prescindiendo de los detalles del cálculo, he aquí el resultado *:

$$\begin{aligned} Q_0 &= -ma_+, \qquad Q_1 = \frac{i}{2}\, a_+\gamma^5\hat{K}, \\ Q_2 &= -ma_+\gamma^5, \quad Q_3 = ma_+ + \frac{1}{2}\, a_-\hat{K}, \end{aligned} \tag{87.5}$$

donde

$$a_\pm = \frac{1}{s-m^2} \pm \frac{1}{u-m^2}.$$

Con vistas a los cálculos que seguirán conviene aplicar a $Q_{\mu\nu}$ el mismo método formal que se describió en el § 8 para la matriz densidad de un fotón: las cuatro componentes del tensor (87.3) respecto de las direcciones orientadas $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ las reunimos en una matriz 2×2, Q, que descompondremos luego en matrices de Pauli. De manera análoga a la fórmula (8.18), resulta

$$Q = Q_0 \cdot 1 + \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{Q} = (Q_1,\ Q_2,\ Q_3). \tag{87.6}$$

En lo que concierne al tensor $\overline{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q^+_{\mu\nu}\gamma^0$ que figura en (86.5), a partir de (87.3) y (87.5) es fácil comprobar [apoyándose en las reglas (66.2a)] que sus componentes se obtienen a partir de las componentes $Q_{\mu\nu}$ substituyendo las cantidades $Q_0, Q_1, \ldots$ por $\overline{Q}_0, \overline{Q}_1, \ldots$, donde

$$\overline{Q}_0 = Q_0, \ \overline{Q}_1 = -Q_1, \ \overline{Q}_2 = -Q_2, \ \overline{Q}_3 = Q_3, \tag{87.7}$$

y permutando al mismo tiempo los índices $\mu\nu$**. En forma matricial, esto significa que

$$\overline{Q} = \overline{Q}_0 \cdot 1 + \overline{\boldsymbol{Q}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{87.8}$$

Precisemos ahora el sentido de los 4-vectores $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ en lo que concierne a sus relaciones con la polarización de los fotones. Para cada uno de éstos las direcciones de polarización se determinarán por las componentes transversales (con relación al impulso del fotón $\boldsymbol{k}$) de los 3-vectores $e^{(1)}$, $e^{(2)}$***. Es fácil ver que tanto en el sistema del centro de masa, como en el sistema del laboratorio (sistema de reposo del electrón inicial) el vector $\boldsymbol{P}$ se encuentra en el plano $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ y que el vector $\boldsymbol{N}$ es perpendicular a este plano. Por consiguiente, la dirección de $e^{(1)}$ define la polarización perpendicularmente al plano de dispersión, y la dirección de $e^{(2)}$, la pola-

---

* La expresión (87.3) con los valores (87.5) corresponde a la forma (77.11-13) establecida en el § 71 a partir de consideraciones generales. Junto con las igualdades $f_3 = f_8 = 0$, que se siguen de la invariencia-T, resulta aquí ser igual a cero una amplitud invariante más (la f_2). Es ésta una propiedad de la aproximación considerada de la teoría de perturbaciones y desaparecería en aproximaciones de orden superior.

* Para la matriz $Q_{\mu\nu}$ en la forma de partida (86.4) tendríamos simplemente $\overline{Q}_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$. Sin embargo, esta propiedad se pierde como resultado de transformaciones que implican cambios del tipo (87.4) y otros análogos.

*** En cambio, las componentes longitudinales de $\boldsymbol{e}$ (como también las componentes temporales de los 4-vectores e) es posible ignorarlas sin más en este caso: que en nada intervienen queda asegurado por la invariancia de contraste.

rización en el plano de dispersión. Hay que tener también en cuenta que los parámetros de Stokes ξ_1, ξ_2, ξ_3 se determinan respecto de ejes xyz que forman un sistema directo (con el eje z a lo largo de la dirección orientada de $\boldsymbol{k}$). Es fácil ver que para el fotón inicial constituyen un tal sistema los vectores $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}_\perp$, $\boldsymbol{k}$, y para el fotón final, los vectores $\boldsymbol{N}$, $-\boldsymbol{P}'_\perp$, $\boldsymbol{k}'$ ($\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'_\perp$ son los componentes de $\boldsymbol{P}$ perpendiculares a $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{k}'$, respectivamente). El cambio de signo de $e^{(2)}$ en la matriz densidad del fotón (8.17) equivale a cambiar el signo de ξ_1 y ξ_2. Por ello, las matrices densidad de los fotones inicial y final, referidas a los 4-versores $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, serán

$$\rho^{(\gamma)} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$
$$\rho^{(\gamma)'} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi}'\cdot\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi}' = (-\xi'_1, -\xi'_2, \xi'_3). \tag{87.9}$$

La traza tensorial

$$\rho^{(\gamma)'}_{\lambda\mu} Q^{\mu\nu} \rho^{(\gamma)}_{\nu\rho} \tilde{\bar{Q}}^{\rho\lambda}$$

se calcula ahora como traza del producto de matrices (87.6-9) mediante (33.5). Se obtiene en definitiva

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 = 8\pi^2 e^4 \operatorname{Tr} \{ & (\rho^{(e)'} Q_0 \rho^{(e)} \bar{Q}_0 + \rho^{(e)'} \boldsymbol{Q}\cdot\rho^{(e)} \bar{\boldsymbol{Q}}) + \\ & + (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}')\cdot(\rho^{(e)'} Q_0 \rho^{(e)} \bar{\boldsymbol{Q}} + \rho^{(e)'} \boldsymbol{Q} \rho^{(e)} \bar{Q}_0) - \\ & - i(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')\cdot[\rho^{(e)'} \boldsymbol{Q} \times \rho^{(e)} \bar{\boldsymbol{Q}}] + \\ & + (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}')(\rho^{(e)'} Q_0 \rho^{(e)} \bar{Q}_0 - \rho^{(e)'} \boldsymbol{Q}\cdot\rho^{(e)} \bar{\boldsymbol{Q}}) + \\ & + \rho^{(e)'} (\boldsymbol{\xi}'\cdot\boldsymbol{Q})\rho^{(e)} (\boldsymbol{\xi}\cdot\bar{\boldsymbol{Q}}) + \rho^{(e)'} (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{Q})\rho^{(e)} (\boldsymbol{\xi}'\cdot\bar{\boldsymbol{Q}}) - \\ & - i[\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\xi}']\cdot(\rho^{(e)'} Q_0 \rho^{(e)} \bar{\boldsymbol{Q}} - \rho^{(e)'} \boldsymbol{Q} \rho^{(e)} \bar{Q}_0)\}. \end{aligned} \tag{87.10}$$

Dispersión por electrones no polarizados

Calculemos, hasta determinarla, la sección eficaz de dispersión de fotones polarizados por un electrón no polarizado, sumada respecto de las polarizaciones del electrón final. Para ello hay que hacer en (87.10)

$$\rho^{(e)} = \frac{1}{2}(\hat{p} + m), \quad \rho^{(e)'} = \frac{1}{2}(\hat{p}' + m)$$

y multiplicar por dos el resultado, que debe substituirse en vez de $|M_{fi}|^2$ en la fórmula de la sección eficaz (65.22)

$$d\sigma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{dt\, d\varphi}{(s - m^2)^2} |M_{fi}|^2$$

(φ es el acimut en el sistema del centro de masa o en el sistema del laboratorio). Toda una serie de términos en (87.10) se anulan idénticamente (los términos en las líneas 3.ª y 6.ª y parte de los que aparecen en la 2.ª y 5.ª). El cálculo de los términos que quedan conduce al siguiente resultado [con las notaciones de (86.15)]:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\bar{\sigma} + 2r_e^2 \frac{dy\, d\varphi}{x^2}\left\{(\xi_3 + \xi_3')\left[-\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right] + \right.$$
$$+ \xi_1\xi_1'\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2}\right) + \xi_2\xi_2'\,\frac{1}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y}\right) +$$
$$\left. + \xi_3\xi_3'\left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\right]\right\}. \qquad (87.11)$$

$d\bar{\sigma}$ es la sección eficaz de dispersión de los fotones no polarizados dada por la fórmula (86.9); el factor 1/2 procede de que en (87.11) no se ha sumado respecto de las polarizaciones del fotón final.

En el sistema del laboratorio la fórmula (87.11) toma la forma

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 d\sigma' \{F_0 + F_3(\xi_3 + \xi_3') + F_{11}\xi_1\xi_1' +$$
$$+ F_{22}\xi_2\xi_2' + F_{33}\xi_3\xi_3'\}, \quad d\sigma' = \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \qquad (87.12)$$

donde

$$F_0 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \operatorname{sen}^2\vartheta, \quad F_3 = \operatorname{sen}^2\vartheta,$$
$$F_{11} = 2\cos\vartheta, \quad F_{22} = \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega}\right)\cos\vartheta, \quad F_{33} = 1 + \cos^2\vartheta \qquad (87.13)$$

(*U. Fano*, 1949). Nótese que aunque la expresión (87.12) no contiene una dependencia explícita respecto del acimut del plano de dispersión φ, existe una dependencia implícita, ya que los parámetros ξ_1, ξ_2, ξ_3 se definen con relación a los ejes xyz, que están vinculados con dicho plano. Recordemos que el eje x es el mismo para ambos fotones y perpendicular al plano de dispersión:

$$\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}',$$

y el eje y se encuentra en dicho plano:

$$\boldsymbol{y} \parallel \boldsymbol{k} \times [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}'], \quad \boldsymbol{y}' \parallel \boldsymbol{k}' \times [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}'].$$

Formando la suma de las secciones eficaces que difieren en el signo de $\boldsymbol{\xi}'$ (es decir, haciendo $\boldsymbol{\xi}' = 0$ y multiplicando el resultado por dos) obtendremos la sección eficaz total de dispersión (sumada respecto de las polarizaciones del fotón final) de un fotón polarizado que choca con un electrón no polarizado. Designándola por $d\sigma(\boldsymbol{\xi})$ tenemos

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\, r_e^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 F\, d\sigma', \qquad (87.14)$$

donde

$$F = F_0 + \xi_3 F_3 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - (1 - \xi_3)\operatorname{sen}^2\vartheta. \qquad (87.15)$$

Vemos, pues, que la sección eficaz de dispersión de los fotones polarizados perpendicularmente al plano de dispersión ($\xi_3 = 1$) es mayor que para los fotones polarizados en dicho plano ($\xi_3 = -1$). La sección eficaz, en cambio, no depende de la polarización circular. Tampoco depende del parámetro ξ_1. Por consiguiente

la sección eficaz de dispersión coincide con la correspondiente a fotones no polarizados si no existe polarización lineal respecto de los ejes x o y ($\xi_3 = 0$) o incluso si el fotón está polarizado en direcciones que forman ángulos de 45° con estos ejes.

Propiedades análogas posee la sección eficaz de dispersión de fotones no polarizados cuando se detecta el fotón polarizado. Esta sección eficaz [designémosla por $d\sigma(\xi')$] se obtendrá a partir de la fórmula (87.12) si en ella se hace $\xi = 0$:

$$d\sigma(\xi') = \frac{1}{4} r_e^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 F' \, do', \quad F' = F_0 + \xi_3' F_3. \tag{87.16}$$

La fórmula (87.12) permite hallar también la polarización del fotón secundario como a tal; los parámetros de esta polarización los representaremos por $\xi^{(f)}$ para distinguirlos de los correspondientes a la polarización detectada ξ'. Según las reglas expuestas en el § 66 las cantidades $\xi_i^{(f)}$ son iguales a las razones de los coeficientes de ξ_i' al término que no contiene ξ':

$$\xi_1^{(f)} = \frac{F_{11}}{F} \xi_1, \quad \xi_2^{(f)} = \frac{F_{22}}{F} \xi_2, \quad \xi_3^{(f)} = \frac{F_3 + F_{33}\xi_3}{F}. \tag{87.17}$$

En particular, en la dispersión de un fotón no polarizado,

$$\xi_1^{(f)} = \xi_2^{(f)} = 0, \quad \xi_3^{(f)} = \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{\omega/\omega' + \omega'/\omega - \operatorname{sen}^2 \vartheta}. \tag{87.18}$$

En esta expresión $\xi_3^{(f)} > 0$, es decir, el fotón secundario se polariza perpendicularmente al plano de dispersión. En cambio, la polarización circular de dicho fotón se produce tan sólo si el fotón primario está polarizado circularmente; $\xi_2^{(f)} \neq 0$ únicamente cuando $\xi_2 \neq 0$.

Consideremos el caso en que el fotón incidente está por completo polarizado linealmente ($\xi_2 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_3^2 = 1$) y determinemos la sección eficaz de la dispersión en la que se detecta también la polarización lineal del fotón secundario. Expresando los parámetros ξ_i y ξ_i' en función de las componentes de los vectores polarización $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{e}'$ de los fotones, obtendremos la siguiente expresión para la sección eficaz de dispersión:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4 \cos^2 \Theta\right) do', \tag{87.19}$$

donde Θ es el ángulo formado por las direcciones de polarización de los fotones incidente y dispersado *.

Según esta fórmula la sección eficaz se comporta de manera esencialmente distinta en los casos en que las polarizaciones $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{e}'$ son perpendiculares entre sí y

---

* La propia fórmula (87.19) se podría obtener de manera más sencilla haciendo, ya desde el principio, $e = (0, \boldsymbol{e})$, $e' = (0, \boldsymbol{e}')$ en la amplitud de dispersión (86.3) y efectuando luego el cálculo del cuadrado de la amplitud en forma tridimensional (es decir, separando las componentes temporales y espaciales de los 4-vectores).

Promediando $\cos^2 \Theta = (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}')^2$ respecto de las direcciones $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{e}'$ [mediante (45.4a)] y multiplicando por dos la sección eficaz (paso a la suma respecto de $\boldsymbol{e}'$), volvemos, naturalmente, a (86.9).

cuando se encuentran en un mismo plano. Distinguiendo estos dos casos mediante los índices $\perp$ y $\parallel$,en el límite no-relativista ($\omega \ll m$, $\omega' \approx \omega$) tenemos

$$d\sigma_{\perp} = 0, \quad d\sigma_{\parallel} = r_e^2 \cos^2 \Theta \, d\sigma' \tag{87.20}$$

de acuerdo con las fórmulas clásicas. En el caso opuesto, el ultrarrelativista, se tiene $\omega \gg m$, $\omega' \approx m/(1 - \cos \vartheta)$. Aquí hay que diferenciar la región en que los ángulos son grandes y aquella en que son pequeños (ω/ω' grande o pequeño):

$$d\sigma_{\perp} = d\sigma_{\parallel} = \frac{1}{4} r_e^2 \frac{\omega'}{\omega} \, d\sigma' = \frac{1}{4} r_e^2 \frac{m d\sigma'}{\omega (1 - \cos \vartheta)} \quad \text{para } \vartheta^2 \gg \frac{m}{\omega};$$

$$d\sigma_{\perp} = 0, \quad d\sigma_{\parallel} = r_e^2 \cos^2 \Theta \, d\sigma' \quad \text{para } \vartheta^2 \ll \frac{m}{\omega}. \tag{87.21}$$

Vemos, pues, que en la región de ángulos muy pequeños la sección eficaz de dispersión coincide con la clásica. En cambio, la igualdad $d\sigma_{\perp} \approx d\sigma_{\parallel}$ que se obtiene para ángulos no demasiado pequeños significa que, en el caso ultrarrelativista y en esta región, no está polarizada la radiación dispersa; subrayemos, con todo, que esta conclusión se refiere precisamente a un fotón incidente linealmente polarizado: de (87.17) se deduce que en el caso ultrarrelativista y para un fotón cuya polarización sea circular se tiene $\xi_2^{(f)} \approx \cos \vartheta \cdot \xi_2$.

Dispersión por electrones polarizados

En el caso de electrones polarizados el cálculo de las trazas en la fórmula (87.10) resulta muy pesado, aunque no ofrezca dificultades de principio. Presentaremos aquí algunos resultados finales de dicho cálculo*.

En el caso general, la sección eficaz depende tanto de los parámetros de polarización de los fotones inicial y final ξ y ξ', como de las polarizaciones de los electrones inicial y final, caracterizadas por los vectores ζ y ζ'. La dependencia de la sección eficaz en relación con cada uno de estos parámetros es lineal. La sección eficaz tiene la forma

$$d\sigma = \frac{1}{2} d\sigma(\xi, \xi') + \frac{r_e^2}{8} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 d\sigma' \{ \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\xi} \xi_2 + \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{\zeta}' \xi_2' + \\ + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\zeta}' \xi_2 + \boldsymbol{g}' \cdot \boldsymbol{\zeta} \xi_2' + G_{ik} \zeta_i \zeta_k' + \ldots \}. \tag{87.22}$$

Aquí $d\sigma(\xi, \xi')$ es la sección eficaz (87.12). Se han escrito todos los términos que contienen los productos de dos parámetros de polarización. Los términos que contienen productos de tres o de cuatro parámetros no se han incluido; estos términos carecen de importancia si lo que nos interesa es la correlación entre las polarizaciones de dos partículas solamente: dichos términos desaparecen cuando los parámetros de polarización de otras dos partículas se suponen iguales a cero.

* La deducción completa de los mismos puede verse en los artículos originales: F. Lipps, H. A. Tolhoek, Physica **20**, 85, 395 (1954). Véanse también los artículos de puesta al día: H. A. Tolhoek, Rev. Mod. Phys. **28**, 277 (1956); H. McMaster, Rev. Mod. Phys, **33**, 8 (1961).

He aquí los valores de algunos de los coeficientes en el sistema del laboratorio

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)(\boldsymbol{k}\cos\vartheta+\boldsymbol{k}'), \\ f' &= -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\cos\vartheta), \\ g &= -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)\left[(\boldsymbol{k}\cos\vartheta+\boldsymbol{k}')-(1+\cos\vartheta)\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\right], \\ g' &= -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)\left[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\cos\vartheta)-(1+\cos\vartheta)\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\right]. \end{aligned} \tag{87.23}$$

En la sección eficaz (87.22) no existe un término de la forma $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\zeta}$; esto significa que la polarización del electrón no influye sobre la sección eficaz total de dispersión (la que resulta de sumar respecto de ξ' y ζ') de fotones no polarizados. Falta también un término de la forma $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\zeta}'$; esto significa que en la dispersión de fotones no polarizados no se polariza el electrón de retroceso.

Vemos asimismo que en los términos bilineales respecto de las polarizaciones del electrón y del fotón intervienen solamente los parámetros ξ_2, ξ_2' que corresponden a la polarización circular del fotón. Los vectores polarización de los electrones $\boldsymbol{\zeta}$ y $\boldsymbol{\zeta}'$, en cambio, aparecen en forma de productos escalares $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\zeta},\ldots$, que contienen sólo las proyecciones de estos vectores sobre el plano de dispersión. En consecuencia, por ejemplo, la sección eficaz de dispersión de un fotón polarizado por un electrón polarizado

$$d\sigma(\xi,\ \boldsymbol{\zeta}) = d\sigma(\xi) + \frac{1}{2}r_e^2\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \xi_2 \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\zeta}\ do' \tag{87.24}$$

difiere de $d\sigma(\xi)$ únicamente si el fotón está polarizado circularmente y los electrones poseen una proyección del valor medio del spin no nula sobre el plano de dispersión. Por la misma razón, el electrón de retroceso se polariza tan sólo en el caso en que el fotón está polarizado circularmente; el vector polarización del electrón que resulta del proceso se encuentra entonces en el plano de dispersión:

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{1}{F}\xi_2 \boldsymbol{g}. \tag{87.25}$$

Relaciones de simetría

Probemos, resumiendo, que las propiedades cualitativas de los efectos de polarización en la dispersión de fotones por electrones se siguen ya de las condiciones generales de simetría.

El parámetro ξ_2 de la polarización circular es un pseudoescalar (véase § 8). Por ello, en virtud de la condición de invariancia-P, los términos de la forma $\sim \xi_2$ (o $\sim \xi_2'$) en la sección eficaz de dispersión pueden aparecer solamente como producto de ξ_2 por un cierto pseudoescalar construido a partir de los vectores de que

disponemos $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{k}'$ *. Pero a partir de dos vectores polares es imposible formar un pseudoescalar. De aquí se deduce que dichos términos no pueden existir en la sección eficaz.

Los parámetros de polarización lineal ξ_1 y ξ_3 están ligados con las componentes de un tensor simétrico bidimensional (en un plano perpendicular a $\boldsymbol{k}$) por

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\rho^{(\tau)}_{\alpha\beta} + \rho^{(\tau)}_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}.$$

En el presente caso, uno de los ejes de polarización se ha elegido a lo largo del vector $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}'$ y el otro se encuentra en el plano $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ (a lo largo del vector $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\nu}$ o $\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{\nu}$ para uno u otro fotón). Los términos $\propto \xi_1$ pueden aparecer en la sección eficaz únicamente en forma de productos $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\nu})_\beta$ (o, lo que es lo mismo $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha k'_\beta$), etc. Pero dado que $\boldsymbol{\nu}$ es un vector axil, $\boldsymbol{k}$ es un vector polar y $S_{\alpha\beta}$ es un tensor en sentido estricto, dichos productos no son invariantes respecto de la inversión. En consecuencia, tampoco puede existir en la sección eficaz términos $\propto \xi_1$ (o $\propto \xi'_1$). En cambio, términos $\propto \xi_3$ (o $\propto \xi'_3$) aparecen como productos $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta$, etc., y no están prohibidos por consideraciones de simetría.

Los términos en la sección eficaz proporcionales a la polarización del electrón $\boldsymbol{\zeta}$ no están prohibidos por razones de paridad: dichos términos podrían formarse como productos de dos vectores axiles: $\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\nu}$. Sin embargo, deben faltar en la aproximación que consideramos, la primera no nula, de la teoría de perturbaciones como consecuencia del carácter hermítico de la matriz de dispersión en dicha aproximación (§ 72).

En virtud de esta hermiticidad, el cuadrado de la amplitud de dispersión (y con él también la sección eficaz) no cambia al permutar los estados inicial y final. Por otra parte, la sección eficaz debe también ser invariante respecto de la inversión del tiempo — es decir, respecto de la permutación de los estados inicial y final junto con el cambio del signo de los vectores impulso y momento cinético de todas las partículas — (los parámetros de Stokes ξ_1, ξ_2, ξ_3 no varían con ello — véase § 8 —). Combinando estas dos condiciones, llegamos a la conclusión de que en la aproximación considerada la sección eficaz no debe variar si se cambian a la vez el signo de todos los impulsos y momentos cinéticos sin permutar los estados inicial y final, es decir, en la transformación

$$\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}' \to -\boldsymbol{k}', \quad \boldsymbol{\zeta} \to -\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\zeta}' \to -\boldsymbol{\zeta}' \tag{87.26}$$

conservando invariables los parámetros $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}'$.

La transformación (87.26) cambia el signo del producto $\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\nu}$ y, por ello, tales términos no pueden figurar en la sección eficaz. Hay que subrayar, sin embargo,

* Consideraremos el proceso en el sistema del laboratorio, en el que $\boldsymbol{p} = 0, \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$. Es evidente que las consecuencias que nos interesan de las condiciones de simetría (existencia o falta de ciertos términos en la sección eficaz) no dependen de la elección del sistema de referencia.

que esta prohibición no es consecuencia de las condiciones rigurosas de simetría y, por lo tanto, puede quedar violada en las aproximaciones siguientes de la teoría de perturbaciones.

De los términos de correlación binaria entre las polarizaciones de los fotones entre sí, solamente están prohibidos por la simetría respecto de la paridad los términos de la forma $\xi_1\xi_3$ y $\xi_2\xi_3$, y en la correlación de fotones con electrones no está prohibido ningún término. Sin embargo, todos los términos de la forma $\xi_1\xi_2$, $\xi_1\zeta$, $\xi_3\zeta$ están prohibidos en la primera aproximación por la condición de invariancia respecto de la transformación (87.26). Así, podrían formarse términos de la forma $\xi_1\xi_2'$ y $\xi_1\zeta$ (desde el punto de vista de que se conserve la paridad) como escalares, por ejemplo, $\xi_2' S_{\alpha\beta} k'_\alpha \nu_\beta$ y $(S_{\alpha\beta} k'_\alpha \nu_\beta)(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{k})$; estas combinaciones, con todo, cambian de signo en la transformación (87.26).

Términos de correlación permitidos de la forma $\xi_2\zeta$ pueden aparecer como productos del tipo $\xi_2(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{k})$. Los vectores de polarización de los electrones intervienen en ellos sólo en la forma de proyecciones sobre el plano de dispersión.

Finalmente, toda una serie de relaciones entre los coeficientes de los términos permitidos resulta de las condiciones de universalidad de cruce. Los canales de reacción que difieren en la permutación de los fotones inicial y final corresponden a un único proceso — la dispersión de un fotón por un electrón —. Por ello, el cuadrado del módulo de la amplitud, y con él también la sección eficaz de dispersión, deben ser invariantes respecto de la transformación que expresa el paso de uno de estos canales al otro,

$$\boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}', \quad \boldsymbol{e} \leftrightarrow \boldsymbol{e}'^*$$

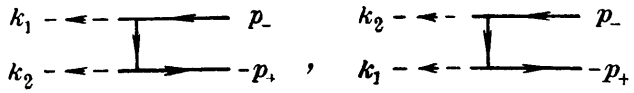
conservando invariables los impulsos y las polarizaciones de los electrones. En forma tridimensional, esta transformación significa la substitución:

$$\omega \leftrightarrow -\omega', \quad \boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}',$$
$$\xi_1 \leftrightarrow \xi_1', \quad \xi_2 \leftrightarrow -\xi_2', \quad \xi_3 \leftrightarrow \xi_3'. \tag{87.27}$$

El cambio de signo del parámetro ξ_2 es evidente si se tiene en cuenta la expresión $\xi_2 = i(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}^*)\cdot\boldsymbol{n}$ en la cual el vector $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}^*$ cambia de signo al substituir $\boldsymbol{e}\leftrightarrow\boldsymbol{e}^*$, y el vector $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ no varía al substituir $\boldsymbol{k}\leftrightarrow-\boldsymbol{k}$, $\omega\leftrightarrow-\omega$. La transformación (87.27), que no afecta a los impulsos de los electrones, deja al sistema del laboratorio en reposo en el laboratorio. Por ello la sección eficaz (87.22) no debe cambiar su forma en esta transformación; las fórmulas (87.12), (87.22-23) satisfacen, en efecto, esta condición.

§ 88. Aniquilación de un par electrón-positón en dos fotones

A la aniquilación de un electrón y de un positón (4-impulsos p_- y p_+) con formación de dos fotones (k_1 y k_2), corresponden dos diagramas:



(88.1)

Estos difieren de los diagramas de dispersión de un fotón por un electrón en la substitución

$$p \to p_-, \quad p' \to -p_+, \quad k \to -k_1, \quad k' \to k_2. \tag{88.2}$$

Ambos procesos son dos canales de cruce de una misma reacción (generalizada). Después de aplicar la substitución (88.2), los invariantes cinemáticos (86.2) cobran el significado siguiente:

$$\begin{aligned} s &= (p_- - k_1)^2, \\ t &= (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2, \\ u &= (p_- - k_2)^2. \end{aligned} \tag{88.3}$$

Si la dispersión del fotón era el canal-s, la aniquilación es el canal-t.

Dado que el cuadrado $|M_{fi}|^2$ para la aniquilación (promediado respecto de las polarizaciones de los electrones y sumado para las polarizaciones de los fotones) se expresa en función de los invariantes s, u, coincide con la magnitud análoga para la dispersión sin más que cambiar el significado de los invariantes *. En la fórmula para la sección eficaz (65.23), en los factores que aparecen en $|M_{fi}|^2$ hay que substituir, además, $s \leftrightarrow t$ y para la cantidad I se tiene ahora, según (65.15a), $I^2 = {}^1/_4 t(t - 4m^2)$. Efectuando los correspondientes cambios en la fórmula (86.6), obtenemos en definitiva la sección eficaz de aniquilación

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 ds}{t\,(t-4m^2)} \left\{ \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} \left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right) \right\}. \tag{88.4}$$

La región física del canal de aniquilación es la región II de la fig. 9. Para t dado (energía dada en el sistema del centro de masa) el intervalo de variación de s se determina por la ecuación de la frontera $su = m^4$. Junto con la relación $s+t+u=2m^2$ esto da

$$-\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4m^2)} \leqslant s - m^2 \leqslant -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4m^2)}. \tag{88.5}$$

La integración de la expresión (88.4) es elemental; el resultado ha de dividirse todavía por 2, teniendo en cuenta la identidad de las dos partículas finales (de los fotones). De esta manera obtenemos

---

* Se tiene en cuenta aquí que los fotones y los electrones tienen el mismo número (dos) de polarizaciones independientes y, por ello, carece de importancia respecto de cuáles se promedia $|M_{fi}|^2$ y respecto de cuáles se suma.

$$\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\tau^2(\tau-4)}\left[(\tau^2+4\tau-8)\ln\frac{\sqrt{\tau}+\sqrt{\tau-4}}{\sqrt{\tau}-\sqrt{\tau-4}} - (\tau+4)\sqrt{\tau(\tau-4)}\right], \quad (88.6)$$

donde $\tau = t/m^2$ (*P. A. M. Dirac*, 1930).

En el límite no-relativista ($\tau \to 4$) obtenemos a partir de aquí

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{\sqrt{\tau-4}}. \quad (88.7)$$

En cambio, en el caso ultrarrelativista ($\tau \to \infty$) resulta

$$\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\tau}(\ln\tau - 1). \quad (88.8)$$

En el sistema del laboratorio, en el cual una de las partículas (digamos el electrón) estaba en reposo antes del choque, el invariante τ es

$$\tau = 2(1+\gamma), \quad \gamma = \frac{\varepsilon_+}{m}. \quad (88.9)$$

Las fórmulas (88.6-8) dan la dependencia de la sección eficaz total respecto de la energía del positón incidente:

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}) - \frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right]. \quad (88.10)$$

En particular, en el límite no-relativista *

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{v_+}, \qquad \text{(n. r.)} \quad (88.11)$$

donde v_+ es la velocidad del positón.

En el sistema del centro de masa, el electrón, el positón y los dos fotones tienen energías iguales $\varepsilon = \omega$. Los invariantes son:

$$m^2 - s = 2\varepsilon(\varepsilon - |\boldsymbol{p}|\cos\theta), \quad m^2 - u = 2\varepsilon(\varepsilon + |\boldsymbol{p}|\cos\theta),$$
$$t = 4\varepsilon^2, \quad (88.12)$$

donde θ es el ángulo que forman los impulsos del electrón y de uno de los fotones. Substituyendo en (88.4), obtendremos la distribución angular de los fotones de aniquilación

$$d\sigma = \frac{r_e^2 m^2}{4\varepsilon|\boldsymbol{p}|}\left[\frac{\varepsilon^2+\boldsymbol{p}^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)}{\varepsilon^2-\boldsymbol{p}^2\cos^2\theta} - \frac{2\boldsymbol{p}^4\operatorname{sen}^4\theta}{(\varepsilon^2-\boldsymbol{p}^2\cos^2\theta)^2}\right]do. \quad (88.13)$$

En el caso ultrarrelativista, presenta máximos simétricos en las direcciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Cerca de $\theta = 0$

---

* Esta fórmula, sin embargo, deja de ser aplicable cuando $v_+ \lesssim \alpha$, y es imposible prescindir de la interacción coulombiana de las componentes del par (cf. final del § 92).

$$d\sigma \approx \frac{r_e^2 m^2 \, d\sigma_0}{2\varepsilon^2 (\theta^2 + m^2/\varepsilon^2)}. \quad \text{(u. r.)} \tag{88.14}$$

La sección eficaz total se obtiene de (88.6):

$$\sigma = \pi r_e^2 \frac{1-v^2}{4v}\left[\frac{3-v^4}{v}\ln\frac{1+v}{1-v} - 2(2-v^2)\right], \tag{88.15}$$

donde $v = |\boldsymbol{p}|/\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}/\varepsilon$ es la velocidad de las partículas que chocan.

No estudiaremos aquí en detalle los efectos de polarización que resultan de la aniquilación de un par *. Nos limitaremos solamente a algunas propiedades cualitativas de estos efectos en los casos límite de velocidades v grandes y pequeñas de las partículas que chocan. El proceso lo consideraremos en el sistema del centro de masa.

En el límite $v \to 0$ el único estado que da una contribución diferente de cero a la sección eficaz es el de momento cinético orbital $l = 0$ en el movimiento relativo. Pero un estado-S del sistema « electrón + positón » posee paridad negativa (véase el problema del § 27). Ahora bien, en los estados impares del sistema de dos fotones sus polarizaciones son ortogonales entre sí (§ 9). Esta misma propiedad deberán poseer por consiguiente, los fotones de aniquilación en el caso no relativista.

Si el electrón y el positón están polarizados, en el mismo caso no-relativista cabe afirmar que su aniquilación es posible tan sólo si sus spins son antiparalelos. En efecto, dado que la aniquilación tiene lugar en un estado-S, el momento cinético total del sistema coincide con el spin total de las partículas, igual a 1 en el caso de spins paralelos. Pero el sistema de dos fotones no tiene estados cuyo momento cinético total sea igual a 1 (§ 9).

En el límite ultrarrelativista ($v \to 1$), la aniquilación de un electrón y un positón polarizados longitudinalmente (con helicidad determinada) es sólo posible cuando sus helicidades son de diferente signo**. En este caso límite las partículas con helicidad determinada se comportan como un neutrino (véase el final del § 81) y, por ello, el electrón y el positón que se destruyen deben ser análogos a un neutrino y a un antineutrino, de donde se sigue lo antes afirmado.

En cuanto a la aniquilación de un electrón y un positón con helicidades iguales, ésta se produce en el caso ultrarrelativista únicamente cuando se tienen en cuenta términos que contiene m. En orden de magnitud, la amplitud de este proceso difiere de la amplitud de destrucción de un par con spins paralelos en el factor m/ε; según esto, la sección eficaz diferirá, por consiguiente, en el factor $(m/\varepsilon)^2$.

PROBLEMA

Hallar la sección eficaz de formación de un par electrón-positón en el choque de dos fotones (*G. Breit, J. A. Wheeler*, 1934).

* Véase L. A. PAGE, Phys. Rev., **106**, 394 (1957); H. MCMASTER, Rev. Mod. Phys., **33**, 8 (1961).

** Dado que al mismo tiempo son opuestos (en el sistema del centro de masa) los sentidos de los impulsos de las partículas, el hecho de que las helicidades sean de signo contrario corresponde a spins paralelos.

Solución. Este proceso es el inverso de la aniquilación de un par electrón-positón en dos fotones. Los cuadrados de la amplitud de ambos procesos son iguales y su relación con la sección eficaz difiere solamente en que ahora se tiene $I^2 = (k_1k_2)^2 = t^2/4$. Por ello,

$$d\sigma_{\text{for}} = d\sigma_{\text{ani}} \frac{t - 4m^2}{t}.$$

En el sistema del centro de masa $(t = 4\varepsilon^2 = 4\omega^2)$

$$d\sigma_{\text{for}} = v^2 d\sigma_{\text{ani}},$$

donde v es la velocidad de los componentes del par. Al integrar con vistas a hallar la sección eficaz total, hay que tener en cuenta que, dada la no identidad de las dos partículas finales (un electrón y un positón), no es necesario dividir el resultado por 2, como en el caso de la aniquilación. Por ello (en el sistema del centro de masa)

$$\sigma_{\text{for}} = 2v^2\sigma_{\text{ani}} = \frac{\pi r_e^2}{2}(1 - v^2)\left\{(3 - v^4)\ln\frac{1+v}{1-v} - 2v(2 - v^2)\right\}. \quad (1)$$

En un sistema cualquiera de referencia K, en el cual los dos fotones k_1 y k_2 se dirijan uno hacia el otro, tenemos (por la invariancia de k_1k_2).

$$\omega_1\omega_2 = \omega^2,$$

donde ω es la energía de los fotones en el sistema del centro de masa. Dado que en este sistema las energías de los fotones y de los componentes del par coinciden, se tendrá $\omega = \varepsilon = m/\sqrt{1 - v^2}$. Por consiguiente, para pasar al sistema K hay que hacer en (1)

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_1\omega_2}}.$$

§ 89. Aniquilación del positonio

En virtud de la conservación del impulso, la aniquilación del electrón y del positón en el positonio debe ir acompañada de la emisión de dos fotones por lo menos. Esta desintegración, sin embargo, es posible (en el estado fundamental) tan sólo para el parapositonio. En el § 9 se probó que el momento cinético total del sistema de dos fotones no puede ser igual a 1. Por consiguiente, el ortopositonio, que se encuentra en un estado $^3S_1$, no puede desintegrarse dando lugar a dos fotones. Además, dado que en el estado $^3S_1$ el positonio constituye un sistema impar respecto de la carga (véase el problema del § 27), en virtud del teorema de Furry (§ 80) su desintegración en un número par de fotones es también imposible. En cambio, en el estado $^1S_0$ el positonio es par respecto de la carga y, en consecuencia, está prohibida la desintegración del parapositonio en un número impar cualquiera de fotones.

El proceso fundamental que determina la duración de la vida del positonio es, de esta manera, la aniquilación en dos fotones en el caso del parapositonio y la aniquilación en tres fotones en el caso del ortopositonio (*I. Ia. Pomeranchuk*, 1948). La probabilidad de desintegración puede vincularse con la sección eficaz de aniquilación de un par libre.

Los impulsos del electrón y del positón en el positonio son $\sim me^2/\hbar$, es decir,

pequeños comparados con mc. Por ello, al calcular la probabilidad de aniquilación cabe pasar al límite de dos partículas que se encuentran en reposo en el origen de coordenadas. Sea $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ la sección eficaz de aniquilación de un par libre en dos fotones promediada respecto de las direcciones de los spins de ambas partículas. En el límite no relativista, según (88.11) *, se tiene

$$\bar{\sigma}_{2\gamma} = \pi \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c}{v}, \tag{89.1}$$

donde v es la velocidad relativa de las partículas. Obtendremos la probabilidad de aniquilación $\bar{w}_{2\gamma}$ multiplicando $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ por la densidad de flujo, que es igual a $v|\psi(0)|^2$. Aquí $\psi(r)$ es la función de onda, normalizada a 1, del estado fundamental del positonio

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \qquad a = \frac{2\hbar^2}{me^2} \tag{89.2}$$

(el radio de Bohr del positonio a es dos veces mayor que el radio del átomo de hidrógeno debido a que la masa reducida es dos veces menor). Esta probabilidad, sin embargo, corresponde al promedio respecto de los spins del estado inicial. Pero, en el positonio, de los cuatro estados de spin posibles del sistema formado por las dos partículas sólo uno es susceptible de destrucción dando lugar a dos fotones (con spin total 0). Por consiguiente, el valor medio de la probabilidad de desintegración $\bar{w}_{2\gamma}$ está ligado con la probabilidad de desintegración del parapositonio w_0 por la relación $\bar{w}_{2\gamma} = w_0/4$. De esta manera,

$$w_0 = 4\,|\psi(0)|^2 (v\bar{\sigma}_{2\gamma})_{v\to 0}. \tag{89.3}$$

Substituyendo los valores de (89.1-2) obtendremos para la duración de la vida del parapositonio

$$\tau_0 = \frac{2\hbar}{mc^2\alpha^5} = 1{,}23 \cdot 10^{-10}\ \text{s}. \tag{89.4}$$

Hay que hacer observar que la anchura del nivel $\Gamma_0 = \hbar/\tau_0$ es pequeña comparada con su energía

$$|E_{\text{fun}}| = \frac{me^4}{4\hbar^2} = mc^2 \frac{\alpha^2}{4}.$$

Precisamente esta circunstancia permite considerar el positonio como un sistema cuasiestacionario.

De manera análoga se halla que la probabilidad de desintegración del ortopositonio está ligada con el valor medio, respecto de los spins, de la sección eficaz de aniquilación de un par libre en tres fotones por la relación

$$w_1 = \frac{4}{3}\bar{w}_{3\gamma} = \frac{4}{3}|\psi(0)|^2 (v\bar{\sigma}_{3\gamma})_{v\to 0} \tag{89.5}$$

---

* Las fórmulas (89.1-7) se han escrito en unidades ordinarias.

(3/4 es el peso estadístico del estado con spin 1). Adelantando ideas, indicaremos que

$$\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4(\pi^2 - 9)\, c}{3v} \alpha \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{89.6}$$

Por ello la vida del ortopositonio es de

$$\tau_1 = \frac{9\pi}{2(\pi^2 - 9)} \frac{\hbar}{mc^2\alpha^6} = 1{,}4 \cdot 10^{-7} \text{ s}. \tag{89.7}$$

La desigualdad $\Gamma_1 \ll |E_{\text{fun}}|$ en este caso se cumple, naturalmente, en mayor medida que en el caso del parapositonio.

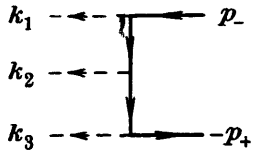
Efectuemos ahora el cálculo de la sección eficaz de la aniquilación de un par libre en tres fotones (*A. Ore, J. L. Powell*, 1949 *).

Según (65.18) la sección eficaz del proceso considerado en el sistema del centro de masa se expresa por el cuadrado de la amplitud mediante la fórmula

$$d\sigma_{3\gamma} = \frac{(2\pi)^4 |M_{fi}|^2}{4I} \delta(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3)\, \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m) \times \\ \times \frac{d^3k_1\, d^3k_2\, d^3k_3}{(2\pi)^9\, 2\omega_1 \cdot 2\omega_2 \cdot 2\omega_3}, \tag{89.8}$$

en la que, según (65.16), $I = 2m \cdot \frac{m}{2} v = m^2 v$, donde v es la velocidad relativa del positón y el electrón (velocidad que se supone pequeña); $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ y ω_1, ω_2, ω_3 son los vectores de onda y las frecuencias de los fotones que se originan; las funciones-δ expresan las leyes de conservación de la energía y del impulso. En virtud de estas leyes, las tres frecuencias ω_1, ω_2, ω_3 deben representarse por las longitudes de los lados de un triángulo cuyo perímetro es $2m$. En otras palabras, los valores absolutos de los impulsos $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ y los ángulos que forman entre sí están por completo determinados cuando se dan dos de las frecuencias.

A la aniquilación en tres fotones corresponde el diagrama



y cinco diagramas más que se obtienen permutando los fotones k_1, k_2, k_3. La correspondiente amplitud la escribiremos en la forma

$$M_{fi} = (4\pi)^{3/2} e_\lambda^{(3)*} e_\mu^{(2)*} e_\nu^{(1)*}\, \bar{u}(-p_+)\, Q^{\lambda\mu\nu}\, u(p_-), \tag{89.9}$$

donde

$$Q^{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{per}} \gamma^\lambda G(k_3 - p_+) \gamma^\mu G(p_- - k_1) \gamma^\nu, \tag{89.10}$$

* Otro canal de esta misma reacción es el doble efecto Compton: $e + \gamma \to e + \gamma + \gamma$. [Para la sección eficaz de este proceso, véase F. MANDL, T. H. R. SQUIRME, Proc. Roy. Soc. A **215**, 497 (1952)].

y la suma se extiende a todas las permutaciones de los números de fotones 1, 2, 3, junto con las permutaciones, al mismo tiempo, de los correspondientes índices tensoriales $\lambda\mu\nu$. El cuadrado del módulo de la amplitud, promediado respecto de las polarizaciones del electrón y del positón y sumado para las polarizaciones de los fotones, es

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{polar}}|M_{fi}|^2 = (4\pi)^3\,\mathrm{Tr}\{\rho_+ Q^{\lambda\mu\nu}\rho_-\,\bar{Q}_{\lambda\mu\nu}\}, \tag{89.11}$$

donde

$$\rho_- = \frac{1}{2}(\hat{p}_- + m),\quad \rho_+ = \frac{1}{2}(\hat{p}_+ - m).$$

Las matrices $\bar{Q}^{\lambda\mu\nu}$ difieren de las matrices $Q^{\lambda\mu\nu}$ en la inversión del orden de los factores en cada término de la suma. En el caso que aquí nos interesa de pequeñas velocidades del electrón y del positón, se pueden igualar a cero los 3-impulsos $\boldsymbol{p}_-$ y $\boldsymbol{p}_+$, es decir, tomar $p_- = p_+ = (m, 0)$. Entonces las funciones de Green de electrón adoptan la forma

$$G(p_- - k_1) = \frac{\hat{p} - \hat{k}_1 + m}{(p - k_1)^2 - m^2} \approx \frac{-k_1 + m(\gamma^0 + 1)}{-2m\omega_1}$$

etc., y las matrices densidad se reducen a

$$\rho_{\mp} = \frac{m}{2}(\gamma^0 \pm 1).$$

Al efectuar el producto en (89.11) aparecen un gran número de términos. Sin embargo, el número de ellos que efectivamente hay que calcular se puede reducir considerablemente utilizando al máximo las propiedades de simetría respecto de las permutaciones de los fotones. Así, basta multiplicar los seis términos de $Q^{\lambda\mu\nu}$ (89.10) por sólo uno, cualquiera, de los términos de $\bar{Q}_{\lambda\mu\nu}$. En las seis trazas que así quedan cabe separar partes que se transforman entre sí al aplicar las diferentes permutaciones de fotones. Los productos de 4-vectores p, k_1, k_2, k_3 que resultan al explicitar las trazas se expresan todos ellos en función de las frecuencias ω_1, ω_2, ω_3. Dado que $p = (m, 0)$, se tendrá $pk_1 = m\omega_1$, ... En cambio, los productos k_1k_2, ... se determinan a partir de la ley de conservación del 4-impulso: $2p = k_1 + k_2 + k_3$; así, escribiendo esta igualdad en la forma $2p - k_3 = k_1 + k_2$ y elevándola al cuadrado, obtendremos

$$k_1k_2 = 2m(m - \omega_3),\ \ldots \tag{89.12}$$

Mediante un cálculo a pesar de todo bastante largo, se obtiene en definitiva

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{polar}}|M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 e^6 \cdot 16\left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right].$$

Substituyendo esta expresión en (89.8), resulta la sección eficaz diferencial de aniquilamiento en tres fotones:

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{e^6}{\pi^2 m^2 v}\left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right] \times$$
$$\times\, \delta(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3)\, \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m)\, \frac{d^3k_1\, d^3k_2\, d^3k_3}{\omega_1\omega_2\omega_3}. \qquad (89.13)$$

De aquí hay que eliminar aún las funciones-δ. La primera de ellas se elimina integrando respecto de d^3k_3, hecho lo cual substituimos las diferenciales que quedan de acuerdo con

$$d^3k_1\, d^3k_2 \to 4\pi\omega_1^2\, d\omega_1 \cdot 2\pi\omega_2^2 d(\cos\theta_{12})\, d\omega_2,$$

donde θ_{12} es el ángulo formado por $\boldsymbol{k}_1$ y $\boldsymbol{k}_2$; se supone que ya se ha efectuado la integración respecto de la dirección de $\boldsymbol{k}_1$ y del acimut de $\boldsymbol{k}_2$ respecto de $\boldsymbol{k}_1$. Diferenciando la igualdad

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\theta_{12}},$$

encontramos

$$d\cos\theta_{12} = \frac{\omega_3}{\omega_1\omega_2}\, d\omega_3.$$

La integración respecto de $d\omega_3$ elimina la segunda función-δ. El resultado que se obtiene para la sección eficaz de aniquilación con formación de fotones de energías dadas tiene así la forma

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{1}{6}\,\frac{8e^6}{vm^2}\left\{\left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2\right\} d\omega_1\, d\omega_2 \qquad (89.14)$$

(con vistas a una ulterior integración respecto de las frecuencias, se ha introducido aquí el factor 1/6 que tiene en cuenta la identidad de los fotones — cf. la nota de la pág. 273).

Cada una de las frecuencias ω_1, ω_2, ω_3 pueden tomar valores entre 0 y m (el valor m se alcanza para dos frecuencias cuando la tercera es igual a cero). Para ω_1 dada, la frecuencia ω_2 varía entre $m - \omega_1$ y m. Integrando (89.14) respecto de $d\omega_2$ entre estos límites, se obtendrá la distribución espectral de los fotones de desintegración:

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{8e^6}{3v\,m^3} F(\omega_1)\, d\omega_1,$$

$$F(\omega_1) = \frac{\omega_1(m-\omega_1)}{(2m-\omega_1)^2} + \frac{2m-\omega_1}{\omega_1} + \left[\frac{2m(m-\omega_1)}{\omega_1^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2m(m-\omega_1)^2}{(2m-\omega_1)^3}\right] \ln\frac{m-\omega_1}{m}.$$

La función $F(\omega_1)$ crece de manera monótona a partir de cero para $\omega_1 = 0$ hasta 1 para $\omega_1 = m$; la fig. 16 la representa gráficamente.

La sección eficaz total de aniquilación se obtiene integrando (89.14) respecto de ambas frecuencias:

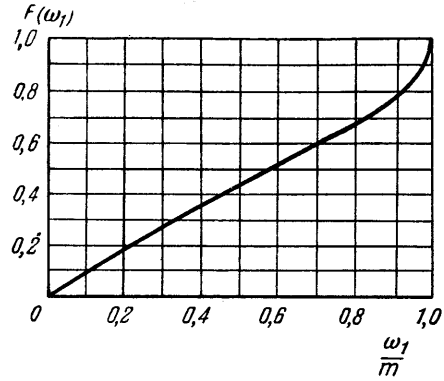


FIG. 16.

$$\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4e^6}{3vm^2} 3 \int_0^m \int_{m-\omega_1}^m \frac{(\omega_1 + \omega_2 - m)^2}{\omega_1^2 \omega_2^2} \, d\omega_1 \, d\omega_2.$$

La integral que aquí aparece es igual a $(\pi^2 - 9)/3$, con lo que llegamos a la fórmula ya señalada (89.6).

§ 90. Radiación de frenado de un electrón por un núcleo. Caso no-relativista

Éste y algunos de los párrafos que siguen se dedican al importante fenómeno de la *radiación de frenado*, es decir, a la radiación que acompaña al choque de las partículas. Empezaremos por la colisión no-relativista de un electrón y un núcleo. Supondremos que el núcleo permanece en reposo, es decir, consideramos la radiación que se produce en la dispersión de un electrón por el campo coulombiano de un centro inmóvil (*A. Sommerfeld*, 1931).

Partiremos de la fórmula (45.5) para la probabilidad de radiación dipolar

$$dw = \frac{\omega^3}{2\pi} | \boldsymbol{e}^* \cdot \boldsymbol{d}_{fi} |^2 \, do_{\boldsymbol{k}}. \tag{90.1}$$

En el presente caso los estados inicial y final del electrón pertenecen al espectro continuo y la frecuencia del fotón es

$$\omega = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{p}'^2), \tag{90.2}$$

donde $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{p}' = m\boldsymbol{v}'$ son los impulsos inicial y final del electrón. Si las funciones de onda inicial y final de éste están normalizadas « a una partícula en el volumen $V = 1$ », la expresión (90.1) multiplicada por $d^3p'/(2\pi)^3$ y dividida por la densidad de flujo incidente, $v/V = v$, dará la sección eficaz $d\sigma_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}'}$ de emisión del fotón $\boldsymbol{k}$ en el ángulo sólido $do_{\boldsymbol{k}}$ acompañada de la dispersión del electrón en el intervalo

de estados d^3p'. Substituyendo el elemento de matriz del momento dipolar $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}$ por el elemento de matriz del impulso de acuerdo con

$$\boldsymbol{d}_{fi} = -\frac{1}{i\omega}\frac{e}{m}\boldsymbol{p}_{fi},$$

escribiremos la expresión de la sección eficaz en la forma ★

$$d\sigma_{kp'} = \frac{\omega e^2}{(2\pi)^4 mp} |\boldsymbol{e}^* \cdot \boldsymbol{p}_{fi}|^2 \, do_k \, d^3p', \tag{90.3}$$

donde

$$\boldsymbol{p}_{fi} = \int \psi_f^* \, \mathbf{p} \psi_i \, d^3x = -i \int \psi_f^* \nabla \psi_i \, d^3x.$$

Para las funciones ψ_i y ψ_f hay que utilizar las funciones de onda exactas en el campo atractivo de Coulomb, precisamente aquellas funciones que contienen asintóticamente una onda plana y una onda esférica; en ψ_f la onda esférica debe ser convergente, y en ψ_i, divergente (véase III, § 134). Estas funciones son de la forma

$$\psi_i = A_i e^{ipr} F(i\nu, \ 1, \ i(pr - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})), \quad \nu = \frac{Ze^2 m}{p}; \tag{90.4}$$

$$\psi_f = A_f e^{ip'r} F(-i\nu', \ 1, \ -i(p'r + \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r})), \quad \nu' = \frac{Ze^2 m}{p'}$$

con los coeficientes de normalización ★★

$$A_i = e^{\pi\nu/2}\Gamma(1 - i\nu), \qquad A_f = e^{\pi\nu'/2}\Gamma(1 + i\nu'). \tag{90.5}$$

Observando que

$$\nabla F(i\nu, \ 1, \ i(pr - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})) = i\left(p\frac{\boldsymbol{r}}{r} - \boldsymbol{p}\right)F' = -\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_\nu,$$

escribiremos el gradiante $\nabla\psi_i$ en la forma

$$\nabla\psi_i = i\boldsymbol{p}\psi_i - A_i e^{ip\cdot r}\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_\nu.$$

Multiplicando por ψ_f^* e integrando, el primer término se anula en virtud de la ortogonalidad de ψ_i y ψ_f. Por consiguiente, para el elemento de matriz $\boldsymbol{p}_{fi}$ tenemos

$$\boldsymbol{p}_{fi} = iA_i A_f p \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{p}}, \tag{90.6}$$

donde J designa la integral

$$J = \int \frac{e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{r} F(i\nu', \ 1, \ i(p'r + \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r})) F(i\nu, \ 1, \ i(pr - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})) \, d^3x, \tag{90.7}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$$

Hemos sacado $\partial/\partial\boldsymbol{p}$ fuera del signo de integral suponiendo que al derivar J las

---

★ En este párrafo hemos hecho $p = |\boldsymbol{p}|$, $p' = |\boldsymbol{p}'|$.

★★ ¡La normalización corresponde a densidad unidad en vez de la normalización respecto de $\delta(\boldsymbol{p})$ en III, § 134!

cantidades ν, ν', $\boldsymbol{q}$ deben considerarse como parámetros independientes y tan sólo después de efectuar la derivación hay que expresar ν y $\boldsymbol{q}$ en función de $\boldsymbol{p}$.

La integral se calcula substituyendo cada una de las funciones hipergeométricas degeneradas por sus representaciones en forma de integrales de contorno. Presentaremos aquí solamente el resultado*:

$$J = BF(i\nu', i\nu, 1, z),$$

$$B = 4\pi e^{-\pi\nu}(-\boldsymbol{q}^2 - 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})^{-i\nu}(\boldsymbol{q}^2 - 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}')^{-i\nu'}(\boldsymbol{q}^2)^{i\nu+i\nu'-1},$$

$$z = 2\frac{\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}') - 2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}')}{(\boldsymbol{q}^2 - 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}')(\boldsymbol{q}^2 + 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})}. \tag{90.8}$$

$F(i\nu', i\nu, 1, z)$ es la función hipergeométrica completa.

Después de efectuar la derivación en (90.6) se puede hacer $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$; entonces

$$z = -2\frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^2}, \quad \boldsymbol{q}^2 = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^2(1 - z) \tag{90.9}$$

($z < 0$). Observemos también que

$$-\boldsymbol{q}^2 - 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}^2 - 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{p}'^2 > 0.$$

En definitiva encontramos para el elemento de matriz la siguiente expresión final:

$$\boldsymbol{p}_{fi} = A_i A_f \frac{8\pi i e^{-\pi\nu}}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^3(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}')}\left(\frac{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}'}{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'}\right)^{-i(\nu+\nu')} \times$$

$$\times (1 - z)^{i(\nu+\nu')-1}[i\nu\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}F(z) + (1 - z)F'(z)(\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}')], \tag{90.10}$$

donde para abreviar se ha hecho

$$F(z) = F(i\nu', i\nu, 1, z). \tag{90.11}$$

La sección eficaz se obtiene substituyendo (90.10) en (90.3), pero la fórmula general es muy compleja y difícilmente descriptible. Por ello pasamos directamente al cálculo de la distribución espectral de la radiación, es decir, integramos la sección eficaz respecto de las direcciones del fotón y del electrón final.

La integración respecto $d\sigma_k$ y la suma para todas las polarizaciones del fotón se reduce a promediar respecto de las direcciones $\boldsymbol{e}$ y a multiplicar por $2\cdot 4\pi$, es decir, a la substitución

$$e_i e_k^* d\sigma_k \to \frac{8\pi}{3}\delta_{ik}.$$

Hecho esto, la sección eficaz resulta ser

$$d\sigma_{p'} = \frac{4\omega e^2}{3vm}|\boldsymbol{p}_{fi}|^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} = \frac{\omega e^2 p'}{6\pi^3 p}|\boldsymbol{p}_{fi}|^2 d\omega\, d\sigma_{p'}. \tag{90.12}$$

El cuadrado $|\boldsymbol{p}_{fi}|^2$ se calcula utilizando (90.9-11) y teniendo en cuenta que

---

* Para el cálculo, véase A. NORDSIECK, Phys. Rev. **93**, 758 (1954).

$$|\Gamma(1-i\nu)|^2=\frac{\pi\nu}{\operatorname{senh}\pi\nu}.$$

Se obtiene así

$$|p_{fi}|^2=\frac{32\pi(Ze^2)^2m^3}{p(p+p')^2(p-p')^4(1-e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu}-1)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\nu\nu'}{1-z}|F|^2-z|F'|^2+i\frac{\nu+\nu'}{2}\frac{z}{1-z}(FF'^*-F^*F')\right\}. \qquad (90.13)$$

Para integrar la sección eficaz (90.12) respecto de $d\sigma_{p'}=2\pi\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta$ pasaremos de la variable ϑ (ángulo de dispersión) a la variable

$$z=-\frac{2pp'}{(p-p')^2}(1-\cos\vartheta),\quad d\sigma_{p'}\to\frac{\pi(p-p')^2}{pp'}dz.$$

La integral respecto de dz se obtiene a su vez transformando la expresión entre llaves en (90.13). De acuerdo con la ecuación diferencial de las funciones hipergeométricas [véase III (e, 2)] tenemos

$$z(1-z)F''+[1-(1+i\nu+i\nu')z]F'+\nu\nu'F=0,$$
$$z(1-z)F''^*+[1-(1-i\nu-i\nu')z]F'^*+\nu\nu'F^*=0.$$

Multiplicando estas dos ecuaciones por F^* y F, respectivamente, y sumando, resulta

$$(1-z)\left[\frac{d}{dz}z(F'F^*+F'^*F)-2z|F'|^2+\frac{i(\nu+\nu')z}{1-z}(F'^*F-F'F^*)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\nu\nu'}{1-z}|F|^2\right]=0.$$

Vemos así que la expresión entre llaves en (90.13) es igual a

$$\{\dots\}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dz}z(F'F^*+FF'^*) \qquad (90.14)$$

y se integra sin más.

Resumiendo las fórmulas obtenidas, se encuentra la expresión final para la sección eficaz de la radiación de frenado en el intervalo de frecuencias $d\omega$ *

$$d\sigma_\omega=\frac{64\pi^2}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{m^2c^2}{(p-p')^2}\frac{p'}{p}\frac{1}{(1-e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu}-1)}\left(-\frac{d}{d\xi}|F(\xi)|^2\right)\frac{d\omega}{\omega}, \qquad (90.15)$$

donde

$$\nu=\frac{Z\alpha mc}{p}=\frac{Ze^2}{\hbar v},\quad \nu'=\frac{Ze^2}{\hbar v'},\quad p'=\sqrt{p^2-2m\hbar\omega},$$
$$F(\xi)=F(i\nu',i\nu,1,\xi),\quad \xi=-\frac{4pp'}{(p-p')^2}.$$

La fórmula mecánico-cuántica (90.15) debe transformarse en el resultado de la

* Las fórmulas (90.15-19) se han escrito en unidades ordinarias.

teoría clásica (véase II, § 70) en el caso límite en el que $\nu \gg 1$ y $\hbar\omega \ll p^2/2m$ (la primera de estas desigualdades es la condición que permite considerar el movimiento del electrón en el campo coulombiano como cuasiclásico, la segunda es la que hace posible atribuir dicho carácter al elemento de matriz de la transición). Para llevar a cabo el paso al límite es necesario obtener las expresiones asintóticas de las funciones hipergeométricas para grandes valores del argumento y de los parámetros, en lo que aquí no nos detendremos.

Consideremos el caso límite en que ambas velocidades v y v' son tan grandes que $\nu \ll 1$, $\nu' \ll 1$ (pero, claro está, $v \ll 1$ como antes, de modo que $Z\alpha \ll \nu \ll 1$; esto es posible solamente para un pequeño valor de Z). Para calcular en este caso la derivada $F'(\xi)$ utilizaremos la fórmula

$$\frac{d}{dz}F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z),$$

que es fácil obtener mediante una simple derivación de la serie hipergeométrica. Tenemos

$$F'(\xi) \approx i\nu \cdot i\nu' F(1, 1, 2, \xi) = \frac{\nu\nu'}{\xi}\ln(1-\xi)$$

(la última igualdad es evidente por comparación directa de las correspondientes series). Para la propia función $F(\xi)$, se tiene simplemente

$$F(\xi) \approx F(0, 0, 1, \xi) = 1.$$

En definitiva encontramos, partiendo de (90.15),

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2 \frac{c^2}{v^2}\ln\frac{v+v'}{v-v'}\frac{d\omega}{\omega},$$
$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \ll 1. \tag{90.16}$$

El que ν y ν' sean pequeñas es precisamente la condición de aplicabilidad de la aproximación de Born en el caso de la interacción coulombiana. En consecuencia, la propia fórmula (90.16) se puede obtener de manera más fácil acudiendo directamente a la teoría de perturbaciones (véase problema 1).

Supongamos ahora que un electrón rápido ($\nu \ll 1$) pierde al emitir radiación una fracción apreciable de su energía, de modo que $v' \ll v$ y ν' puede no ser pequeña. Entonces

$$-\xi \approx \frac{4p'}{p} = \frac{4\nu}{\nu'} \ll 1, \quad F(\xi) \approx F(i\nu', 0, 1, \xi) = 1,$$
$$F'(\xi) \approx -\nu\nu' F(1+i\nu', 1, 2, \xi) \approx -\nu\nu',$$

y la sección eficaz es

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi}{3}Z^3\alpha^3 r_e^2\left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{1}{1-\exp(-2\pi Ze^2/\hbar v')}\frac{d\omega}{\omega}, \tag{90.17}$$
$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \gtrsim 1.$$

Cuando $\nu' \ll 1$ esta fórmula da la misma expresión límite

$$d\sigma_\omega = \frac{32}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{c^2 v'}{v^3} \frac{d\omega}{\omega},$$

que la fórmula (90.16) para $v' \ll v$. Por ello, las fórmulas (90.16-17) juntas cubren (para $\nu \ll 1$) todo el intervalo de valores de ν'.

Si $\omega \to \omega_0$ (donde $\hbar\omega_0 = mv^2/2$), la velocidad $v' \to 0$ y $\nu' \to \infty$. En este límite, (90.17) nos da

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^3 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{\hbar\, d\omega}{mv^2}. \tag{90.18}$$

Así, pues, $d\sigma_\omega/d\omega$ tiende a un límite finito no nulo cuando $\omega \to \omega_0$. Esta circunstancia se puede explicar de manera general por consideraciones análogas a las expuestas en III, § 144. Físicamente está vinculada con el hecho de que la frecuencia $\omega = \omega_0$ es la frontera únicamente del espectro continuo de frenado. El electrón también puede emitir radiación con una frecuencia $\omega > \omega_0$ pasando a un estado de enlace. Pero los estados de enlace fuertemente excitados en un campo de Coulomb difieren poco en sus propiedades de los estados libres próximos a su frontera. Por consiguiente, la frontera que separa el espectro continuo del discreto no es en esencia un punto físicamente discernible.

Todas las fórmulas escritas se refieren a un campo de Coulomb atractivo. La sección eficaz de radiación en un campo repulsivo se obtiene de (90.15) por la substitución: $\nu \to -\nu$, $\nu' \to -\nu'$. Con ello, en particular, en nada cambia la fórmula límite de Born (90.16). Pero en el límite $\nu \ll 1$, $\nu' \to \infty$ obtendremos, en vez de (90.18),

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^3 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \exp\left(-\frac{\sqrt{2mc^2}\,\pi Z\alpha}{\sqrt{\hbar(\omega_0 - \omega)}}\right) \frac{\hbar\, d\omega}{mv^2}, \tag{90.19}$$

es decir, la sección eficaz diferencial tiende exponencialmente a cero para $\omega \to \omega_0$. De nuevo este resultado es natural: en un campo de repulsión no existen estados de enlace y la frecuencia $\omega = \omega_0$ es la frontera real del espectro de radiación.

PROBLEMAS

1. Hallar, en la aproximación de Born, la sección eficaz de radiación de frenado en el choque no-relativista de dos partículas con valores diferentes de la razón e/m.

Solución. El momento dipolar de dos partículas con cargas e_1, e_2 y masas m_1, m_2 en el sistema de su centro de masa es igual a

$$\boldsymbol{d} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\boldsymbol{r},$$

donde $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. De aquí se sigue

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = -\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\nabla\frac{e_1 e_2}{r}.$$

El elemento de matriz

$$d_{p'p} = -\frac{1}{\omega^2}(\ddot{d})_{p'p}, \quad \omega = \frac{p^2 - p'^2}{2\mu}$$

($\boldsymbol{p} = \mu\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}' = \mu\boldsymbol{v}'$ son los impulsos del movimiento relativo) se calcula referido a ondas planas*

$$\psi_p = e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}, \quad \psi_{p'} = e^{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}}$$

mediante la fórmula

$$\left(\nabla \frac{1}{r}\right)_{p'p} = \frac{4\pi i \boldsymbol{q}}{q^2}, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}.$$

En definitiva obtendremos

$$d\sigma_{kp'} = \frac{e_1^2 e_2^2}{\pi^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{v'}{v}\frac{\mu^2}{q^4}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{q})\frac{d\omega}{\omega}\, do_{p'} do_k.$$

Después de sumar respecto de las polarizaciones, la distribución angular de la radiación viene dada por el factor $\operatorname{sen}^2\Theta$, donde Θ es el ángulo formado por la dirección del fotón $\boldsymbol{k}$ y el vector $\boldsymbol{q}$, que se encuentran en el plano de dispersión [véase (45.4a)].

Después de integrar respecto de las direcciones del fotón, resulta

$$d\sigma_{\omega\theta} = \frac{16}{3} e_1^2 e_2^2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{v'}{v}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\theta},$$

donde θ es el ángulo de dispersión. Finalmente, la integración respecto de $d\theta$ da

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} e_1^2 e_2^2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{v^2} \ln\frac{v + v'}{v - v'}\frac{d\omega}{\omega}.$$

Para la radiación en el campo de un centro de Coulomb inmóvil esta fórmula coincide con la (90.16).

2. Hallar, en la aproximación de Born, la sección eficaz de radiación de frenado en la colisión no-relativista de dos electrones**.

Solución. La radiación dipolar no existe en este caso, de modo que hay que considerar la cuadripolar. En la teoría clásica la distribución espectral de la intensidad total de la radiación cuadripolar viene dada por la fórmula

$$I_\omega = \frac{1}{90}|(\ddot{D}_{ik})_\omega|^2,$$

donde $D_{ik} = \Sigma e(3x_i x_k - r^2\delta_{ik})$ es el tensor del momento cuadripolar del sistema de cargas***. Para dos electrones en el sistema de su centro de masa,

$$D_{ik} = \frac{e}{2}(3x_i x_k - r^2\delta_{ik}), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2.$$

Al pasar a la teoría cuántica, hay que substituir las componentes de Fourier por elementos de matriz (cf. lo dicho en el § 45 acerca de la radiación dipolar) y de acuerdo con la normalización impuesta a las funciones de onda (ondas planas) se obtendrá, después de dividir por la energía del fotón ω, la sección eficaz de radiación con dispersión de los electrones en el intervalo de estados d^3p':

---

* La substitución de dos partículas por una sola partícula con la masa reducida es admisible, claro está, tan sólo en el caso no-relativista.

** La velocidad de choque v satisface las condiciones $\alpha \ll e^2/\hbar v \ll 1$. El caso clásico ($e^2/\hbar v \gg 1$) se estudió en el problema de II, § 71.

*** Esta fórmula se obtiene a partir de II (71.5) de la misma manera como se obtuvo II (67.11) a partir de II (67.8).

$$d\sigma_{p'} = \frac{1}{90\omega} |(\ddot{D}_{ik})_{p'p}|^2 \frac{d^3p'}{v(2\pi)^3},$$

donde $v = 2p/m$ es la velocidad inicial del movimiento relativo; la frecuencia emitida es $\omega = (p^2 - p'^2)/m$.

El operador $\ddot{D}_{ik}$ se calcula mediante triple conmutación del operador D_{ik} con el hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{m} + \frac{e^2}{r}$$

y resulta igual a★

$$\ddot{D}_{ik} = \frac{2e^3}{m}\left[6\left(\frac{x_i}{r^3}p_k + p_k\frac{x_i}{r^3}\right) + 6\left(\frac{x_k}{r^3}p_l + p_i\frac{x_k}{r^3}\right) - \right.$$
$$\left. - 9\left(\frac{x_i x_k x_l}{r^5}p_l + p_l\frac{x_i x_k x_l}{r^5}\right) - \delta_{ik}\left(\frac{x_l}{r^3}p_l + p_l\frac{x_l}{r^3}\right)\right].$$

Teniendo presente la identidad de ambas partículas (las dos son electrones), los elementos de matriz se calculan referidos a las funciones de onda

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ip\cdot r} \pm e^{-ip\cdot r}), \qquad \psi_{p'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ip'\cdot r} \pm e^{-ip'\cdot r}),$$

donde los signos + y — corresponden a los spins totales 0 y 1 de los electrones (a la permutación de los electrones corresponde la substitución $r \to -r$).

Cálculos pesados★★ conducen a la siguiente fórmula para la distribución espectral de la radiación:

$$d\sigma_\omega = \frac{4}{15}\alpha r_e^2\left\{17 - \frac{3x^2}{(2-x)^2} + \frac{12(2-x)^4 - 7(2-x)^2x^2 - 3x^4}{(2-x)^3\sqrt{1-x}} \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{arcosh}\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}\frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx,$$

donde $x = \omega/\varepsilon$ y $\varepsilon = p^2/m$ es la energía del movimiento relativo de los electrones; la sección eficaz se ha promediado con relación a los valores del spin total de los electrones. La sección eficaz de pérdida de energía por radiación es:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \omega\, d\sigma_\omega = 8{,}1\,\alpha r_e^2.$$

3. Determinar la energía de la radiación que se produce cuando un núcleo emite un electrón no-relativista en un estado-*s*.

Solución. La función de onda del electrón emitido por el núcleo es una onda-*s* esférica divergente normalizada de modo que el flujo total sea igual a la unidad:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{4\pi v}}\,\frac{e^{ipr}}{r}$$

★ Esta expresión es análoga a la fórmula clásica

$$\ddot{D}_{ik} = \frac{4e^3}{m^2}\left[6\frac{x_i}{r^3}p_k + 6\frac{x_k}{r^3}p_i - 9\frac{x_i x_k}{r^5}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{r^3}\delta_{ik}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right],$$

que se obtendría como resultado de derivar $\ddot{D}_{ik}$ teniendo en cuenta la ecuación clásica del movimiento

$$\frac{m}{2}\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2\mathbf{r}}{r^3}.$$

★★ Cómo efectuarlos puede verse en B. K. Fediushin, Zh ETF **22**, 140, 1952.

[véase III (33.12)]. Como función de onda del estado final del electrón (después de emitido el fotón) eligiremos una onda plana

$$\psi_f = e^{ip'\cdot r}.$$

El elemento de matriz de la transición es

$$p_{fi} = (p_{if})^* = \left(\int \psi_i^* \mathrm{p} \psi_f d^3x\right)^* =$$

$$= \frac{p'}{\sqrt{4\pi v}} \int e^{-ip'\cdot r + ipr} \frac{d^3x}{r} = \sqrt{\frac{4\pi}{v}} \frac{p}{p'^2 - p^2} = -\sqrt{\frac{\pi}{v}} \frac{v'}{\omega}$$

[la integral se calcula de acuerdo con (57.6a)]. La energía de la radiación se obtiene a partir de la fórmula (45.8) multiplicada por $d^3p'/(2\pi)^3$ e integrada respecto de las direcciones $\boldsymbol{p}'$ (lo que se reduce a multiplicar por 4π). En definitiva obtendremos la distribución espectral de la energía radiada

$$dE_\omega = \frac{2e^2v'}{3\pi v} d\omega \ .$$

Cuando $\omega \to 0$, la velocidad final del electrón $v' \to v$ y esta fórmula coincide, como debía ocurrir, con el límite no-relativista del resultado clásico (véase el problema en II, § 69). La energía total emitida (en unidades ordinarias) vale

$$E = \frac{4}{15\pi} \alpha \left(\frac{v}{c}\right)^2 \varepsilon,$$

donde $\varepsilon = mv^2/2$ es la energía inicial del electrón.

4. Determinar la energía de la radiación que se produce al reflejarse un electrón no-relativista en una « pared de potencial » infinitamente alta.

Solución. Supongamos que el electrón se mueve perpendicularmente a la pared. Aunque el fotón puede ser emitido en una dirección cualquiera, sin embargo, dado que en el caso no-relativista el impulso del fotón es pequeño comparado con el impulso del electrón, se puede considerar que también el electrón reflejado se moverá perpendicularmente al plano de la pared. Tomemos este plano como plano $x = 0$, y supongamos que el electrón se mueve hacia él del lado $x > 0$. Las funciones de onda de los estados estacionarios del movimiento unidimensional normalizadas respecto de $\delta(p)$ ($p = p_x$) tienen la forma de ondas estacionarias (III, § 21):

$$\psi_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} px, \qquad \psi_f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} p'x.$$

El elemento de matriz del operador $\mathrm{p} = \mathrm{p}_x$ * es

$$p_{fi} = -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen} p'x \frac{d}{dx} \operatorname{sen} px \, dx = -\frac{2ip}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen} p'x \cos px dx =$$

$$= -\frac{2i}{\pi} \frac{pp'}{p^2 - p'^2}.$$

La energía emitida en una sola reflexión del electrón se obtiene de (45.8) multiplicando por $dp' = d\omega/v'$ y dividiendo por $v/2\pi$ (densidad de flujo de la onda que se dirige a la barrera en la función inicial ψ_i):

$$dE_\omega = \frac{4\omega^2 e^2}{3m^2} |p_{fi}|^2 \frac{2\pi d\omega}{vv'} = \frac{8}{3\pi} e^2 v v' d\omega. \tag{1}$$

* Las integrales de esta forma hay que interpretarlas como límite para $\delta \to 0$ del valor que se obtiene introduciendo en el integrando el factor $e^{-\delta x}$.

Para pequeñas frecuencias ($\omega \ll \varepsilon = mv^2/2$) tenemos $v' \approx v$ y (1) pasa a ser la fórmula clásica II (69.5) (que hay que integrar respecto de los ángulos y tener en cuenta, además, que $v = \Delta v/2$, donde Δv es la variación de la velocidad del electrón en la reflexión); así debía ocurrir, dado que en la reflexión en la pared la condición de que el tiempo de colisión sea pequeño [II (69.1)] se cumple en cualquier caso. La fórmula cuántica (1) permite, sin embargo, hallar también la energía total radiada:

$$E = \int_0^{\varepsilon} \frac{dE_\omega}{d\omega}\, d\omega = \frac{16}{9\pi}\, \alpha\varepsilon \frac{v^2}{c^2}$$

(en unidades ordinarias).

§ 91. Radiación de frenado de un electrón por un núcleo. Caso relativista

Pasemos a la radiación de frenado de un electrón por un núcleo en el caso en que las velocidades del electrón son relativistas*. Supondremos, además, que se cumple la condición de aplicabilidad de la aproximación de Born, es decir, tanto para la velocidad inicial (v) como para la final (v') del electrón se tiene: $Ze^2/\hbar v \ll 1$, $Ze^2/\hbar v' \ll 1$. Por otra parte, en cualquier caso la carga del núcleo no debe ser demasiado grande: $Z\alpha \ll 1$.

Como en el párrafo precedente, prescindiremos del retroceso del núcleo, ya que éste representa sólo el papel de fuente del campo exterior (acerca de la justificación de esta manera de proceder, véase § 94).

Según (65.25) la sección eficaz del proceso es

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8\,|\boldsymbol{p}|\,\varepsilon'\omega}\, \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)\, \frac{d^3p'd^3k}{(2\pi)^5}. \tag{91.1}$$

Aquí $\boldsymbol{p}$, ε y $\boldsymbol{p}'$, ε' son los impulsos y las energías iniciales y finales del electrón; $\boldsymbol{k}$, ω, el impulso y la energía del fotón. La función-δ se elimina integrando respecto de $d\varepsilon'$; dado que $\boldsymbol{p}'$ y $\boldsymbol{k}$ son variables independientes, dicha integración se efectúa de manera muy sencilla. Observando que

$$d^3p' = |\boldsymbol{p}'|\,\varepsilon' d\varepsilon' do', \quad d^3k = \omega^2 d\omega\, do_{\boldsymbol{k}},$$

basta substituir simplemente

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)\, d^3p'd^3k \to \omega^2\, |\boldsymbol{p}'|\, \varepsilon' do_{\boldsymbol{k}} do'\, d\omega.$$

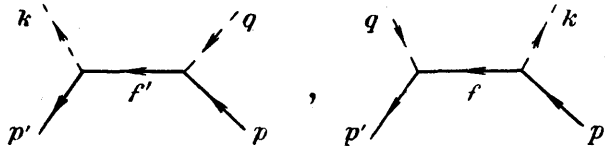
Entonces

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} |M_{fi}|^2 \frac{\omega\,|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}\, do_{\boldsymbol{k}} do' d\omega. \tag{91.2}$$

En la primera aproximación no nula, al elemento de matriz M_{fi} le corresponden dos diagramas

---

* La mayor parte de los resultados que se exponen a continuación fueron obtenidos por primera vez por *H. A. Bethe* y *W. Heitler*, 1934, y por *F. Sauter*, 1934, independientemente.



(91.3)

El terminal libre q corresponde al campo exterior, de modo que $q = p' - p + k$ es el 4-vector de transferencia de impulso al núcleo. El haber prescindido del retroceso significa que la componente temporal es $q^0 = 0$.

Según el diagrama (91.3) tenemos

$$M_{fi} = -e^2 A_0^{(e)}(\boldsymbol{q})\sqrt{4\pi}\, e_\mu^* \bar{u}' \left(\gamma^\mu \frac{\hat{f}' + m}{f'^2 - m^2}\gamma^0 + \gamma^0 \frac{\hat{f} + m}{f^2 - m^2}\gamma^\mu\right) u. \tag{91.4}$$

Los 4-impulsos intermedios son $f = p - k$, $f' = p' + k$; introduzcamos las notaciones:

$$f^2 - m^2 = -2kp \equiv -2\varkappa\omega, \quad f'^2 - m^2 = 2kp' \equiv 2\varkappa'\omega. \tag{91.5}$$

$A_0^{(e)}$ es el potencial escalar del campo exterior; para un campo puramente coulombiano,

$$A_0^{(e)}(\boldsymbol{q}) = \frac{4\pi Ze}{\boldsymbol{q}^2}. \tag{91.6}$$

Substituyendo en (91.2), tenemos para la sección eficaz

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^6}{4\pi^2}\frac{|\boldsymbol{p}'|\,\omega}{|\boldsymbol{p}|\,\boldsymbol{q}^4}\, e_\mu^* e_\nu\, (\bar{u}' Q^\mu u)\,(\bar{u}\overline{Q}^\nu u')\, do_k do' d\omega,$$

donde

$$Q^\mu = \gamma^\mu \frac{\hat{f}' + m}{2\omega\varkappa'}\gamma^0 - \gamma^0 \frac{\hat{f} + m}{2\omega\varkappa}\gamma^\mu,$$

$$\overline{Q}^\nu = \gamma^0 Q^{\nu +}\gamma^0 = \gamma^0 \frac{\hat{f}' + m}{2\omega\varkappa'}\gamma^\nu - \gamma^\nu \frac{\hat{f} + m}{2\omega\varkappa}\gamma^0.$$

No considerando los efectos de polarización, promediaremos la sección eficaz respecto de las direcciones del spin del electrón inicial y sumaremos con relación a las polarizaciones del electrón final y del fotón. Todo esto se reduce a la substitución

$$e_\mu^* e_\nu\, (\bar{u}' Q^\mu u)\,(\bar{u}\overline{Q}^\nu u') \to -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, Q_\mu (\hat{p} + m)\overline{Q}^\mu (\hat{p}' + m).$$

El cálculo de la traza se efectúa siguiendo las fórmulas ordinarias (§ 22). Los cálculos se pueden simplificar un poco utilizando la igualdad

$$\gamma^0 \hat{p}\gamma^0 = \hat{\tilde{p}},$$

en la que $\tilde{p} = (\varepsilon, -\boldsymbol{p})$, si $p = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$. Además, el número de términos que hay que calcular puede reducirse si se tiene en cuenta la simetría respecto de la substitución $p \leftrightarrow p'$, $k \to -k$, $q \to -q$ (esta substitución conduce únicamente a la permutación cíclica de los factores en el producto de matrices y, por consiguiente, no modifica su traza).

En definitiva se obtiene la siguiente expresión para la sección eficaz de radiación de frenado con emisión de un fotón de frecuencia y dirección dadas y salida de un electrón secundario en una dirección dada *:

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{4\pi^2}\frac{p'm^4}{pq^4}\frac{d\omega}{\omega}\,do_k do' \times$$
$$\times\left\{\frac{q^2}{\varkappa\varkappa' m^2}(2\varepsilon^2+2\varepsilon'^2-q^2)+q^2\left(\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa'}\right)^2-4\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa'}-\frac{\varepsilon'}{\varkappa}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2\omega q^2}{m^2}\left(\frac{1}{\varkappa'}-\frac{1}{\varkappa}\right)-\frac{2\omega^2}{m^2}\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}+\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)\right\}, \quad (91.7)$$

donde

$$\varkappa = \varepsilon - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad \varkappa' = \varepsilon' - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}' \quad (\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega), \qquad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}.$$

Mediante simples transformaciones se puede dar a esta fórmula una estructura más cómoda para el estudio del problema

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi}\frac{d\omega}{\omega}\frac{p'm^2}{pq^4}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\operatorname{sen}\theta'\,d\theta'\,d\varphi \times$$
$$\times\left\{\frac{p'^2}{\varkappa'^2}(4\varepsilon^2-q^2)\operatorname{sen}^2\theta'+\frac{p^2}{\varkappa^2}(4\varepsilon'^2-q^2)\operatorname{sen}^2\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{2\omega^2}{\varkappa\varkappa'}(p^2\operatorname{sen}^2\theta+p'^2\operatorname{sen}^2\theta')-\frac{2pp'}{\varkappa\varkappa'}(2\varepsilon^2+2\varepsilon'^2-q^2)\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi\right\}, \quad (91.8)$$

donde

$$\varkappa = \varepsilon - p\cos\theta, \qquad \varkappa' = \varepsilon' - p'\cos\theta',$$
$$q^2 = p^2+p'^2+\omega^2-2p\omega\cos\theta+2p'\omega\cos\theta'-$$
$$-2pp'(\cos\theta\cos\theta'+\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi);$$

θ y θ' son los ángulos formados por $\boldsymbol{k}$ con $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p}'$, respectivamente; φ es el ángulo entre los planos $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p})$ y $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}')$.

La integración de (91.8) respecto de las direcciones del fotón y del electrón secundario resulta bastante pesada. La fórmula a que conduce para la distribución espectral de la radiación es la siguiente**:

$$d\sigma_\omega = Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\frac{p'}{p}\left\{\frac{4}{3}-2\varepsilon\varepsilon'\frac{p^2+p'^2}{p^2p'^2}+m^2\left(l\frac{\varepsilon'}{p^3}+l'\frac{\varepsilon}{p'^3}-\frac{ll'}{pp'}\right)+\right.$$
$$+L\left[\frac{8\varepsilon\varepsilon'}{3pp'}+\frac{\omega^2}{p^3p'^3}(\varepsilon^2\varepsilon'^2+p^2p'^2+m^2\varepsilon\varepsilon')+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m^2\omega}{2pp'}\left(l\frac{\varepsilon\varepsilon'+p^2}{p^3}-l'\frac{\varepsilon\varepsilon'+p'^2}{p'^3}\right)\right]\right\}, \quad (91.9)$$

donde

---

* Aquí y en lo que sigue de este párrafo p, p', q designarán los módulos de los vectores tridimensionales: $p = |\boldsymbol{p}|$, $p' = |\boldsymbol{p}'|$, $q = |\boldsymbol{q}|$.

** La integración respecto de las direcciones de tan sólo el electrón secundario se puede también efectuar en forma analítica — véase R. L. GLUCKSTERN, M. H. HULL, Phys. Rev. **90**, 1.030 (1953).

Indicaremos también el artículo de puesta al día por H. W. KOCH, J. W. MOTZ, Rev. Mod. Phys. **31**, 920 (1959), en el cual se dan representaciones gráficas de las fórmulas de radiación de frenado.

$$L = \ln \frac{\varepsilon\varepsilon' + pp' - m^2}{\varepsilon\varepsilon' - pp' - m^2},$$

$$l = \ln \frac{\varepsilon + p}{\varepsilon - p}, \quad l' = \ln \frac{\varepsilon' + p'}{\varepsilon' - p'}.$$

Recordaremos que los valores de las frecuencias admisibles en las fórmulas obtenidas están limitados solamente por la condición impuesta a la velocidad final del electrón ($Ze^2/v' \ll 1$): el electrón no debe perder casi toda su energía. Para $\omega \to 0$ la sección eficaz de radiación diverge como $d\omega/\omega$; éste es un aspecto de la regla general que se considerará en el § 95.

En el límite no-relativista ($p \ll m$) el impulso del fotón es pequeño comparado con el impulso del electrón, puesto que

$$\omega = \frac{p'^2 - p^2}{2m} \ll p.$$

Por lo tanto, $q^2 \approx (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})^2$. Haciendo en (91.8) $\varepsilon = \varepsilon' = m$ y prescindiendo de p, p', ω comparados con m, obtendremos

$$d\sigma = \frac{2}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p'm^2}{pq^4} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, d\varphi \times \\ \times (p^2 \operatorname{sen}^2\theta + p'^2 \operatorname{sen}^2\theta' - 2pp' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi),$$

o bien

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2} \frac{p'}{p} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{q}]^2 \frac{do_k do'}{q^4} \frac{d\omega}{\omega} \tag{91.10}$$

de acuerdo con la fórmula obtenida en la aproximación de Born en el problema 1 del § 90. Según esto, también para la distribución espectral de la radiación se obtiene el resultado (90.16) que ya conocemos *.

En el caso ultrarrelativista, cuando son grandes tanto la energía inicial del electrón como la final ($\varepsilon, \varepsilon' \gg m$), la distribución angular de los fotones y de los electrones secundarios tiene un carácter muy específico. Cuando los ángulos θ, θ' son pequeños, las cantidades $\varkappa$, $\varkappa'$ que figuran en los denominadores de la fórmula (91.8) son iguales a

$$\varkappa \approx \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2} + \theta^2\right), \quad \varkappa' \approx \frac{\varepsilon'}{2}\left(\frac{m^2}{\varepsilon'^2} + \theta'^2\right) \tag{91.11}$$

y en el intervalo en que $\theta \lesssim m/\varepsilon$ llegan a ser muy pequeñas. En este intervalo es también pequeño el módulo del vector $\boldsymbol{q}(q \sim m)$. Así, pues, en el caso ultrarrelativista el fotón y el electrón secundario se dirigen hacia adelante dentro de un estrecho cono de abertura $\sim m/\varepsilon$.

* Sin embargo, obtener esta fórmula por paso al límite en (91.9) es bastante complicado dada la reducción de varios términos entre sí.

Es fácil obtener a partir de (91.8) una fórmula cuantitativa para la distribución angular en el caso ultrarrelativista substituyendo los valores (91.11) de $\varkappa$, $\varkappa'$, haciendo en todos los demás términos $p = \varepsilon$ y $p' = \varepsilon'$ y prescindiendo de q^2 frente a ε^2. Introduciendo las notaciones convenientes:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{m}\theta, \qquad \delta' = \frac{\varepsilon'}{m}\theta', \tag{91.12}$$

presentaremos esta fórmula en la forma

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{\varepsilon' m^4}{\varepsilon q^4} \frac{d\omega}{\omega} \delta d\delta \cdot \delta' d\delta' d\varphi \times$$
$$\times \left\{ \frac{\delta^2}{(1+\delta^2)^2} + \frac{\delta'^2}{(1+\delta'^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'} \frac{\delta^2+\delta'^2}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) \frac{\delta\delta' \cos\varphi}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} \right\}. \tag{91.13}$$

Haciendo $\boldsymbol{n}^2 = [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{q}]^2 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q})^2$ ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$), es fácil hallar que para ángulos pequeños se tiene

$$\frac{q^2}{m^2} = (\delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta' \cos\varphi) + m^2 \left(\frac{1+\delta^2}{2\varepsilon} - \frac{1+\delta'^2}{2\varepsilon'}\right)^2. \tag{91.14}$$

Cuando $\delta \sim \delta' \sim 1$ el segundo término es aquí pequeño comparado con el primero. Ambos términos son comparables en la región de ángulos todavía menores, donde $\delta \sim m/\varepsilon$. Aunque entonces q pasa a ser notablemente pequeño ($q \sim m^2/\varepsilon \ll m$), la contribución integral de esta región a la sección eficaz, con todo, es pequeña comparada con la contribución de toda la región en la que $\delta \gtrsim 1$ (como es fácil ver, la razón de dichas contribuciones vale m^2/ε^2). Pero q puede alcanzar valores $q \sim m^2/\varepsilon$ también cuando $\delta \sim \delta' \sim 1$ si, además,

$$|\delta - \delta'| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad \varphi \lesssim \frac{m}{\varepsilon}. \tag{91.15}$$

La contribución de este dominio es del mismo orden de magnitud que toda la sección eficaz integrada (o incluso es la fundamental en ella, véase más adelante).

La integración de la fórmula (91.13) respecto de $d\varphi$ y de $d\delta'$ da la distribución angular de los fotones (de frecuencia dada) con independencia de las direcciones de los electrones secundarios *:

$$d\sigma = 8Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{\delta \cdot d\delta}{(1+\delta^2)^2} \times$$
$$\times \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{4\delta^2}{(1+\delta^2)^2}\right] \ln \frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + 2 - \frac{16\delta^2}{(1+\delta^2)^2}\right] \right\}. \tag{91.16}$$

* Primero se efectúa la integración respecto de $d\varphi$ (entre los límites 0 y 2π). La integración respecto de $d\delta'$ conviene substituirla por la integración respecto de la diferencia $|\Delta| = |\delta' - \delta|$ descomponiendo su dominio en dos partes: de 0 a un cierto valor Δ_0 y de Δ_0 a ∞, donde Δ_0 satisface las desigualdades $m/\varepsilon \ll \Delta_0 \ll 1$. En cada dominio es posible prescindir en el integrando de ciertos términos correspondientes a los mismos.

Una vez se ha efectuado la integración respecto de $d\delta$, se encuentra la distribución espectral de la radiación en el caso ultrarrelativista:

$$d\sigma_\omega = 4Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega}-\frac{1}{2}\right) \tag{91.17}$$

[esta fórmula se puede obtener, naturalmente, también a partir de (91.9) y de manera inmediata].

Préstese atención a la existencia en (91.16) y (91.17) del logaritmo de una cantidad grande (incluso cuando $\omega \sim \varepsilon$, la razón $\dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \sim \dfrac{\varepsilon'}{m} \gg 1$). Si ésta es hasta tal punto grande que incluso lo es su logaritmo, pasan a ser fundamentales en las fórmulas indicadas los términos que contienen logaritmos. Obsérvese que este logaritmo procede de la integración en el dominio (91.15) *. De esta manera, en la aproximación logarítmica (es decir, prescindiendo de los términos que no contienen el logaritmo cuyo valor es grande) el electrón secundario se mueve en la dirección de incidencia dentro de un ángulo $\sim (m/\varepsilon)^2$.

Finalmente, he aquí la fórmula límite para el dominio cerca de la frontera bien definida del espectro en la que el electrón ultrarrelativista emite casi toda su energía: $\omega \approx \varepsilon \gg \varepsilon'$. De (91.9) se sigue fácilmente

$$d\sigma_\omega = 2Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon'^2}{p'^2}\ln\frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'} - \frac{m^2\varepsilon'}{4p'^3}\ln^2\frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'} - \frac{\varepsilon'}{p'}\right\}. \tag{91.18}$$

Obsérvese que las fórmulas (91.17-18) cubren todo el intervalo de valores ω para el electrón inicial ultrarrelativista; cuando $\omega \approx \varepsilon \gg \varepsilon' \gg m$ ambas fórmulas coinciden. Si el electrón secundario es no-relativista ($p' \ll m$), se tiene

$$d\sigma_\omega = 2Z^2\alpha r_e^2 \frac{\sqrt{2m(\varepsilon-\omega)}}{m}\frac{d\omega}{\varepsilon}. \tag{91.19}$$

Efectos de polarización

Los efectos de polarización en la radiación de frenado se pueden investigar siguiendo el mismo método general que se describió en el § 66. La cuestión de la elección de los 4-vectores $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ es particularmente sencilla en este caso. Dado que el proceso conviene considerarlo de hecho tan sólo en un determinado sistema de coordenadas (el sistema de reposo del núcleo), basta tomar $e^{(1)} = (0, \boldsymbol{e}^{(1)})$,

---

* Es fácil comprobarlo considerando el dominio de integración en el cual φ y $\Delta = \delta' - \delta$ satisfacen las condiciones: $m/\varepsilon \ll \Delta$, $\varphi \ll 1$. En este dominio $q^2/m^2 \approx \Delta^2 + \varphi^2\delta^2$ y la expresión entre llaves de (91.13) contiene términos que son proporcionales a φ^2 o a Δ^2 (cuando $\varphi = 0$ y $\Delta = 0$, dicha expresión se anula). Pero las integrales de la forma

$$\int \frac{\varphi^2 d\varphi\, d\Delta}{(\Delta^2+\delta^2\varphi^2)^2} \quad \text{ó} \quad \int \frac{\Delta^2 d\varphi\, d\Delta}{(\Delta^2+\delta^2\varphi^2)^2}$$

divergen logarítmicamente; su « corte » tiene lugar en las fronteras del dominio indicado de valores de las variables.

$e^{(2)} = (0, \boldsymbol{e}^{(2)})$), donde $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ son vectores unitarios perpendiculares a $\boldsymbol{k}$, uno de los cuales se encuentra en el plano $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p})$, y el otro es perpendicular a él.

No presentaremos aquí ni los propios cálculos, que son bastante pesados, ni sus resultados cuantitativos *. Haremos notar solamente algunas propiedades cualitativas de los efectos de polarización. Estas propiedades se pueden obtener mediante diferentes relaciones de simetría, de manera análoga a como se procedió en el § 87 para el efecto Compton.

La teoría expuesta corresponde a la primera aproximación no nula de la teoría de perturbaciones. En esta aproximación, la sección eficaz no puede contener un término que sea proporcional a tan sólo un vector polarización de electrón, sea el inicial (ζ) o el final (ζ'). Que no exista un término $\sim \zeta$ significa que la sección eficaz total de radiación (sumada respecto de las polarizaciones del fotón y del electrón secundario) no depende de la polarización del electrón incidente.

De los términos proporcionales a un solo parámetro de polarización de fotón (ξ_1', ξ_2', ξ_3') falta el término $\sim \xi_2'$. Esto significa que en la radiación por un electrón no polarizado, el fotón carece de polarización circular. Sin embargo, existe aquí una diferencia respecto del resultado análogo para el efecto Compton. En el último caso, tales términos estaban prohibidos por la paridad espacial debido a la imposibilidad de construir un pseudoescalar a partir de los únicos dos vectores independientes $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ a nuestra disposición. En cambio, en el caso de la radiación de frenado, se tienen tres impulsos independientes $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}', \boldsymbol{k})$, lo que basta para construir el pseudoescalar $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}')$. Un término de la forma $\xi_2'\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}')$ no contradice la paridad espacial y, por ello, rigurosamente hablando, es diferente de cero. Sin embargo, no es invariante respecto del cambio de los signos de todos los impulsos [cf. (87.26)] y, en consecuencia, no aparece en la primera aproximación de Born.

La existencia del pseudoescalar $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}')$ conduce también a que, junto con un término $\sim \xi_3'$, esté permitido en la sección eficaz también un término $\sim \xi_1'$ (en contraste con la situación que se da en el efecto Compton). Dicho término resulta como producto de la forma

$$S_{\alpha\beta}\nu_\alpha [\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\nu}]_\beta (\boldsymbol{k}\cdot[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}'])$$

(donde $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}$), invariante tanto respecto de la inversión espacial, como con relación al cambio de signo de todos los impulsos. De esta manera, el fotón emitido posee una polarización lineal de ambos tipos (lo mismo en las direcciones de los ejes $\boldsymbol{e}^{(1)}$ y $\boldsymbol{e}^{(2)}$, como en las direcciones «diagonales» que forman un ángulo de 45° con estos ejes). Esto se refiere, sin embargo, tan sólo a aquellas condiciones en

* Véanse para esto los artículos originales: R. L. GLUCKSTER, H. H. HULL, G. BREIT, Phys. Rev. **90**, 1.026 (1.953); G. L. VYSOTSKII, A. A. KRESNIN, L. N. ROZENTSVEIG, Zh.ETF **32**, 1.078 (1957); K. MCVOY, Phys. Rev. **106**, 828, 1957; **111**, 1.333 (1958); H. BANERJEE, Phys. Rev. **111**, 532 (1958); C. FRONSDAL, H. ÜBERALL, Phys. Rev. **111**, 580 (1955). (En estos mismos artículos se dan referencias más detalladas acerca del tema.) Véase también el artículo de puesta al día por H. MCMASTER, Rev. Mod. Phys. **33**, 8 (1961).

que se registre también la dirección en que se emite el electrón secundario, ya que al integrar respecto de todas las direcciones $\boldsymbol{p}'$, el término $\sim \xi_1'$ se anula. Este resultado era de prever, evidentemente, por consideraciones de simetría: después de integrar, las dos direcciones « diagonales », que no coinciden entre sí, se transforman en equivalentes y, por ello, es imposible la polarización preferente a lo largo de una de ellas (hecho que ocurre cuando $\xi_1' \neq 0$).

El grado de polarización lineal no depende del estado de polarización del electrón incidente: los términos de correlación en la sección eficaz de la forma $\xi_1'\zeta$ y $\xi_3'\zeta$ están prohibidos en la primera aproximación de Born. En cambio, está permitido el término $\xi_2'\zeta$, de modo que, en la radiación por un electrón polarizado, el fotón posee una polarización circular (*Ia. B. Zel'dovich*, 1952).

Apantallamiento

Las fórmulas obtenidas más arriba se han deducido para un campo puramente coulombiano. Pero si de lo que se trata es no de la radiación en el choque con un núcleo « desnudo », sino con un átomo, deberá tenerse en cuenta el apantallamiento del campo del núcleo por los electrones, apantallamiento que conduce a una disminución de la sección eficaz. Para ello es necesario introducir en el potencial del campo exterior $A^{(e)}(q)$ el factor atómico de forma $F(q)$ (véase III, § 137). Según III (137.2) esto se consigue substituyendo Z por $Z - F(q)$. Veamos en qué condiciones el apantallamiento es esencial.

A un determinado valor q en el factor de forma corresponden distancias $r \sim 1/q$ en la distribución espacial de las cargas electrónicas del átomo. El factor de forma se acerca al valor Z (apantallamiento total) cuando $q \lesssim 1/a$, donde a caracteriza las dimensiones del átomo.

Por otra parte, en el caso ultrarrelativista la contribución principal a la sección eficaz de radiación procede, como vimos antes, del dominio de valores de q próximo al valor mínimo que puede poseer q para energías dadas inicial y final del electrón. En el caso ultrarrelativista,

$$q_{\min} = p - p' - \omega = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} - \sqrt{\varepsilon'^2 - m^2} - (\varepsilon - \varepsilon') \approx \frac{m^2\omega}{2\varepsilon\varepsilon'}.$$

El apantallamiento es importante si $q_{\min} \lesssim 1/a$, o bien

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \gtrsim \frac{a}{1/m}. \tag{91.20}$$

Esta condición se cumple en cualquier caso para energías suficientemente grandes del electrón incidente.

Si $q_{\min} \ll 1/a$ (« apantallamiento total »), en la aproximación logarítmica se puede escribir sin más el resultado para la distribución espectral de la radiación. En efecto, en (91.17) aparece bajo el signo de logaritmo precisamente el primer término de la desigualdad $\varepsilon\varepsilon'/m\omega \gg ma$. Si la desigualdad se cumple, la integral respecto de dq que conduce a este logaritmo se corta para valores que son del orden

de magnitud del segundo miembro de la desigualdad. Según el modelo de Thomas-Fermi se tiene $a \sim a_0 Z^{-1/3}$, donde $a_0 \sim 1/me^2$ es el radio de Bohr (véase III, § 70); entonces $am \sim 1/\alpha Z^{1/3}$. De esta manera, en el caso de apantallamiento total hay que substituir el logaritmo en (91.17) por $\ln(1/\alpha Z^{1/3})$ *.

Pérdida de energía

La pérdida de energía por un electrón debida a radiación se caracteriza por un « frenado eficaz »:

$$\varkappa_{\text{rad}} = \int_0^{\varepsilon - m} \omega \, d\sigma_\omega. \tag{91.21}$$

El cálculo de la integral con $d\sigma_\omega$ dada por (91.17) conduce al siguiente resultado **:

$$\varkappa_{\text{rad}} = Z^2 \alpha r_e^2 \varepsilon \left\{ \frac{12\varepsilon^2 + 4m^2}{3\varepsilon p} \ln \frac{\varepsilon + p}{m} - \right.$$
$$\left. - \frac{(8\varepsilon + 6p)\, m^2}{3\varepsilon p^2} \ln^2 \frac{\varepsilon + p}{m} - \frac{4}{3} + \frac{2m^2}{\varepsilon p} F\left(\frac{2p\,(\varepsilon + p)}{m^2}\right) \right\}, \tag{91.22}$$

donde la función $F(x)$ se define por

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y}\, dy.$$

Para valores x pequeños

$$F(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots$$

Para valores x grandes cabe utilizar la fórmula exacta

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 x - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

El caso no-relativista (91.22) se transforma en

$$\varkappa_{\text{rad}} = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 m. \tag{91.23}$$

Naturalmente, esta fórmula se puede obtener por integración inmediata de la fórmula no-relativista de Born (90.16).

En el caso ultrarrelativista

$$\varkappa_{\text{rad}} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \varepsilon \left(\ln \frac{2\varepsilon}{m} - \frac{1}{3}\right). \tag{91.24}$$

---

* Para un estudio más detallado de esta cuestión véase H. A. BETHE, W. HEITLER, Proc. Roy. Soc. A **146**, 83 (1934); H. A. BETHE, Proc. Cam. Phil. Soc. **30**, 524 (1934).

** Aunque la fórmula (91.17) no es aplicable cerca del límite superior, sin embargo, teniendo en cuenta la convergencia de la integral, este hecho carece de importancia.

La razón $\varkappa_{\text{rad}}/\varepsilon$ se llama también sección eficaz de pérdida de energía por radiación. Para grandes valores de ε crece logarítmicamente. Sin embargo, este aumento desaparece cuando se tiene en cuenta el apantallamiento. En el caso de apantallamiento completo, $\varkappa_{\text{rad}}/\varepsilon$ tiende a un límite constante $\approx 4Z^2\alpha r_e^2 \ln(1/\alpha Z^{1/3})$.

En la colisión con un átomo es necesario tener presente también que parte de la radiación procede, no sólo de la colisión con el núcleo, sino también con los electrones. Veremos más adelante (§ 94) que en el caso ultrarrelativista la sección eficaz de radiación del electrón en el choque con electrones difiere de la correspondiente sección eficaz en el caso del núcleo tan sólo en que no existe factor Z^2. Por ello, la existencia de Z electrones atómicos se puede tener en cuenta de manera aproximada substituyendo Z^2 por $Z(Z+1)$.

§ 92. Formación de un par por un fotón en el campo de un núcleo

La formación de un par electrón-positón en el choque de un fotón con un núcleo ($Z + \gamma \to Z + e^- + e^+$) es otro canal de cruce de la misma reacción a que pertenece la radiación de frenado producida cuando un electrón choca con un núcleo ($Z + e^- \to Z + e^- + \gamma$). Por consiguiente, la amplitud M_{fi} de este proceso se obtiene a partir de la amplitud de la radiación de frenado simplemente mediante las substituciones

$$\varepsilon,\ \boldsymbol{p} \to -\varepsilon_+, -\boldsymbol{p}_+, \qquad \varepsilon',\ \boldsymbol{p}' \to \varepsilon_-,\ \boldsymbol{p}_-,$$
$$\omega,\ \boldsymbol{k} \to -\omega, -\boldsymbol{k} \tag{92.1}$$

(los índices — y + se refieren al electrón y al positón). En términos de módulos y ángulos, la transformación de los impulsos es

$$p \to p_+, \quad p' \to p_-, \quad \theta \to \pi - \theta_+, \quad \theta' \to \theta_-, \quad \varphi \to \varphi - \pi,$$

donde $\theta_\pm$ son los ángulos formados por $\boldsymbol{p}_\pm$ y $\boldsymbol{k}$; φ es el ángulo entre los planos $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_+)$ y $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_-)$.

La sección eficaz se expresa ahora en función de M_{fi} de acuerdo con

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8\omega\varepsilon_-\varepsilon_+} \delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-) \frac{d^3p_+ d^3p_-}{(2\pi)^5}$$

[en vez de (91.1)], o después de eliminar la función-δ

$$d\sigma = \frac{p_+ p_-}{(2\pi)^5 \omega} |M_{fi}|^2 do_+ do_- d\varepsilon_+.$$

(En este párrafo $p_\pm = |\boldsymbol{p}_\pm|$, $q = |\boldsymbol{q}|$). Comparando con (91.2), vemos que para obtener la sección eficaz de formación de un par a partir de la sección eficaz de la radiación de frenado hay que efectuar en ésta la substitución (92.1), multiplicándola por

$$\frac{p_+^2}{\omega^2} \frac{d\varepsilon_+}{d\omega}, \tag{92.2}$$

y substituir $do'\, do_{\boldsymbol{k}}$ por $do_+\, do_-$.

De esta manera obtenemos a partir de (91.8) la expresión siguiente para la sección eficaz diferencial de formación de un par por un fotón no polarizado promediada respecto de las polarizaciones de las componentes del par *:

$$d\sigma = -\frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi}\frac{m^2 p_+ p_- d\varepsilon_+}{\omega^3 q^4}\,\mathrm{sen}\theta_+ d\theta_+ \cdot \mathrm{sen}\theta_- d\theta_- d\varphi \times$$
$$\times\left\{\frac{p_+^2}{\varkappa_+^2}(4\varepsilon_-^2 - q^2)\,\mathrm{sen}^2\theta_+ + \frac{p_-^2}{\varkappa_-^2}(4\varepsilon_+^2 - q^2)\,\mathrm{sen}^2\theta_- - \right.$$
$$\left. - \frac{2\omega^2}{\varkappa_+\varkappa_-}(p_+^2\,\mathrm{sen}^2\theta_+ + p_-^2\,\mathrm{sen}^2\theta_-) - \frac{2p_+p_-}{\varkappa_+\varkappa_-}(2\varepsilon_+^2 + 2\varepsilon_-^2 - q^2)\mathrm{sen}\theta_+\mathrm{sen}\theta_-\cos\varphi\right\}, \tag{92.3}$$
$$\varkappa_\pm = \varepsilon_\pm - p_\pm\cos\theta_\pm, \quad q^2 = (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k})^2, \quad \varepsilon_+ + \varepsilon_- = \omega$$

(*H. A. Bethe, W. Heitler*, 1934).

Mediante la misma transformación se obtiene de (91.9) la distribución energética de los componentes del par:

$$d\sigma_{\varepsilon_+} = Z^2\alpha r_e^2\frac{p_+p_-}{\omega^3}d\varepsilon_+\left\{-\frac{4}{3} - 2\varepsilon_+\varepsilon_-\frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+^2p_-^2} + m^2\left(l_-\frac{\varepsilon_+}{p_-^3} + l_+\frac{\varepsilon_-}{p_+^3} - \right.\right.$$
$$\left. - l_+l_-\frac{1}{p_+p_-}\right) + L\left[-\frac{8\varepsilon_+\varepsilon_-}{3p_+p_-} + \frac{\omega^2}{p_+^3p_-^3}(\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2 + p_+^2p_-^2 - m^2\varepsilon_+\varepsilon_-) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{m^2\omega}{2p_+p_-}\left(l_+\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+^2}{p_+^3} + l_-\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_-^2}{p_-^3}\right)\right]\right\},$$
$$L = \ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- + m^2}, \qquad l_\pm = \ln\frac{\varepsilon_\pm + p_\pm}{\varepsilon_\pm - p_\pm}. \tag{92.4}$$

Dado que las fórmulas obtenidas se basan en la aproximación de Born, son válidas con tal que se cumplan las condiciones $Ze^2/v_\pm \ll 1$. Haremos observar que la simetría de las fórmulas (92.3-4) respecto del electrón y del positón son precisamente consecuencia de la aproximación de Born; dicha simetría desaparecería en aproximaciones de orden superior.

En el caso ultrarrelativista ($\varepsilon_\pm \gg m$) el electrón y el positón son emitidos formando ángulos $\theta_\pm \sim m/\varepsilon_\pm$ respecto de la dirección del fotón incidente. La distribución angular viene dada por una fórmula análoga a la (91.13):

$$d\sigma = \frac{8}{\pi}Z^2\alpha r_e^2\frac{m^4\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^3q^4}d\varepsilon_+\left\{-\frac{\delta_+^2}{(1+\delta_+^2)^2} - \frac{\delta_-^2}{(1+\delta_-^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_+\varepsilon_-}\frac{\delta_+^2 + \delta_-^2}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} + \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+}\right)\frac{\delta_+\delta_-\cos\varphi}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)}\right\}\delta_+\delta_-\cdot d\delta_+\,d\delta_-\cdot d\varphi, \tag{92.5}$$

en la que

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_-\cos\varphi + m^2\left(\frac{1+\delta_+^2}{2\varepsilon_+} + \frac{1+\delta_-^2}{2\varepsilon_-}\right)^2. \tag{92.6}$$

---

* Para los efectos de polarización en la formación de un par por un fotón véase la misma literatura a que se hizo referencia en el § 91 al tratar de la radiación de frenado.

La distribución en energías para este mismo caso es:

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3}\left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\left(\ln\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{(u. r.)}. \tag{92.7}$$

La integración de esta expresión respecto de $d\varepsilon_+$ (entre los límites m y ω) conduce a la sección eficaz total de formación de pares por un fotón de energía dada *:

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2\alpha r_e^2\left(\ln\frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42}\right), \qquad \omega \gg m. \tag{92.8}$$

Al igual que en la radiación de frenado, para el caso ultrarrelativista el término logarítmico en la sección eficaz procede del intervalo de valores $q \sim m^2/\varepsilon$. A éste corresponden ahora ángulos para los cuales

$$|\delta_+ - \delta_-| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad |\pi - \varphi| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}$$

[en vez de $\varphi \lesssim m/\varepsilon$ en (91.15)]. De esta manera, en la aproximación logarítmica las direcciones del electrón y del positón forman con la dirección del fotón ángulos inversamente proporcionales a las energías de las partículas y se encuentran prácticamente en un mismo plano con aquélla, pero a lados distintos de la misma.

Cerca del umbral de reacción ($\omega \to 2m$), la aproximación de Born es inaplicable. Deducir en este caso fórmulas cuantitativas exigiría un cálculo exacto de la interacción coulombiana de las tres partículas cargadas que se encuentran en el estado final (el núcleo y el par). La simetría respecto del electrón (atraído hacia el núcleo) y del positón (repelido por el núcleo) desaparece entonces, naturalmente.

Si

$$Z\alpha \ll \sqrt{\frac{\omega - 2m}{\omega}} \ll 1, \tag{92.9}$$

la aproximación de Born es todavía aplicable. Para energías no-relativistas del par se tiene $\omega \approx 2m \gg p_\pm$, por lo cual $q \approx \omega$. En (92.3) se puede hacer $\varepsilon_\pm = \varkappa_\pm = m$, $\omega = 2m$, con lo cual esta fórmula se reduce a la expresión

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{64\pi^2}\frac{p_+p_-}{m^5}(p_+^2 \operatorname{sen}^2\theta_+ + p_-^2 \operatorname{sen}^2\theta_-)\, do_+\, do_-\, d\varepsilon_+. \tag{92.10}$$

Después de integrar respecto de los ángulos, queda

$$d\sigma = \frac{1}{6} Z^2\alpha r_e^2 \frac{p_+p_-(p_+^2 + p_-^2)}{m^5} d\varepsilon_+ = \\ = \frac{2Z^2\alpha r_e^2}{3m^3}(\omega - 2m)\sqrt{(\varepsilon_+ - m)(\varepsilon_- - m)}\, d\varepsilon_+. \tag{92.11}$$

Finalmente, integrando respecto de $d\varepsilon_+$ (entre los límites 0 y $\omega - m$), obtendremos la sección eficaz total

* Teniendo en cuenta la convergencia de la integral en ambos límites, la no aplicabilidad de la fórmula (92.7) para valores $\varepsilon_\pm - m$ pequeños carece de importancia.

$$\sigma = \frac{\pi}{12} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{\omega - 2m}{m}\right)^3. \tag{92.12}$$

Si la velocidad relativa (v_0) de las componentes del par que se crea resulta pequeña, es necesario tener en cuenta la interacción de Coulomb entre ellas (*A. D. Sajarov*, 1948). Esta interacción llega a ser importante cuando v_0 es del orden de magnitud (o menor) que las velocidades de la partícula en el estado ligado del electrón y el positón (positonio):

$$v_0 \lesssim \alpha. \tag{92.13}$$

Consideremos el proceso en el sistema del centro de masa del par. En los diagramas que representan el proceso en este sistema son esenciales los impulsos virtuales $\sim m$. En otras palabras, las distancias entre el electrón y el positón $\sim 1/m$ cobran importancia. Por otra parte, la función de onda de su movimiento relativo $\psi(r)$ cambia de manera notable tan sólo para distancias $r \sim 1/mv_0 \sim 1/m\alpha$, es decir, para distancias que son grandes comparadas con $1/m$. Por ello, el tener en cuenta la interacción de las partículas se reduce, simplemente, a que aparezca en el elemento de matriz de la transición el factor $\psi^*(0)$. De acuerdo con esto, la sección eficaz diferencial queda multiplicada por $|\psi(0)|^2$, es decir, por

$$\frac{2\pi\alpha/v_0}{1 - e^{-2\pi\alpha/v_0}} \tag{92.14}$$

[véase III (134.11)]. La velocidad relativa de dos partículas es la velocidad de una de ellas en el sistema de reposo de la otra. Comparando los valores del invariante $p_{+\mu}p_-^{\mu}$ en este sistema y en el sistema del laboratorio (sistema de reposo del núcleo), se obtiene

$$\frac{m^2}{\sqrt{1 - v_0^2}} = \varepsilon_+\varepsilon_- - \boldsymbol{p}_+ \cdot \boldsymbol{p}_-,$$

de donde puede deducirse v_0. Si $\boldsymbol{p}_+$ y $\boldsymbol{p}_-$ son próximos entre sí tanto en módulo como en dirección, para v_0 resulta la fórmula aproximada

$$v_0^2 = p^2\vartheta^2 + \frac{(p_+ - p_-)^2}{\varepsilon^2} \tag{92.15}$$

(aplicable cuando $v_0 \ll 1$); en ella $p = (p_+ + p_-)/2$, $\varepsilon = (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2$ y ϑ es el ángulo formado por $\boldsymbol{p}_+$ y $\boldsymbol{p}_-$.

Cuando se corrige el valor de la sección eficaz dado por las fórmulas (92.14-15), se manifiesta una anomalía en la correlación entre los impulsos del electrón y del positón que se forman: aparece un máximo acusado para $\boldsymbol{p}_+ \approx \boldsymbol{p}_-$.

§ 93. Teoría exacta de la creación de pares y de la radiación de frenado en el caso ultrarrelativista

En los dos párrafos que preceden, la radiación de frenado y la creación de pares

por un fotón en la región relativista se estudiaron tomando como base la aproximación de Born, para lo cual se exigía en cualquier caso que se cumpliera la condición $Z\alpha \ll 1$. En este párrafo se expone una teoría de estos procesos libre de dicha limitación, es decir, una teoría que vale también para $Z\alpha \sim 1$ (*H. A. Bethe, L. Maximon*, 1954). Se supondrá en ella que ambas partículas (el electrón inicial y el final o los componentes del par) son ultrarrelativistas; su energía es $\varepsilon \gg m$.

Vimos que, en el caso ultrarrelativista, las dos partículas se mueven formando ángulos pequeños (θ, θ' ó θ_+, θ_-) con la dirección del fotón: $\theta \lesssim m/\varepsilon$. Esta propiedad se conserva también en la teoría exacta (respecto de $Z\alpha$) y, por lo tanto, examinaremos precisamente qué ocurre en esta región angular.

La transferencia de impulso al núcleo en dicha región es $q \sim m$. Esto significa que en las funciones de onda son esenciales los parámetros de impacto $\rho \sim 1/q \sim 1/m$, es decir, las distancias « grandes ». A tales distancias cabe utilizar la función de onda obtenida en el § 39.

Creación de pares

La sección eficaz de creación de un par tiene una forma que es análoga a la sección eficaz del efecto fotoeléctrico (cf. 56.1-2):

$$d\sigma = 2\pi \left| e\sqrt{4\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\omega}} M_{fi} \right|^2 \delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-) \frac{d^3p_+ d^3p_-}{(2\pi)^6}, \tag{93.1}$$

donde

$$M_{fi} = \int \psi^{(-)*}_{\varepsilon_- \boldsymbol{p}_-} (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \psi^{(+)}_{-\varepsilon_+ -\boldsymbol{p}_+}\, d^3x. \tag{93.2}$$

Aquí $\psi^{(-)}_{\varepsilon_- \boldsymbol{p}_-}$ es la función de onda del electrón, y $\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+ -\boldsymbol{p}_+}$ la función de onda con energía negativa ($-\varepsilon_+$) e impulso $-\boldsymbol{p}_+$.

La función $\psi^{(-)}_{\varepsilon_- \boldsymbol{p}_-}$, que se refiere a una partícula en el estado final, debe contener en su expresión asintótica (junto con una onda plana) una onda esférica convergente; esta circunstancia se ha caracterizado por el superíndice (—) en la función. De acuerdo con (39.10), dicha función de onda es *

$$\psi^{(-)}_{\varepsilon_- \boldsymbol{p}_-} = \frac{C^{(-)}}{\sqrt{2\varepsilon_-}} e^{i\boldsymbol{p}_-\cdot\boldsymbol{r}} \left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla}{2\varepsilon_-}\right) F(-i\nu,\ 1,\ -i(p_- r + \boldsymbol{p}_-\cdot\boldsymbol{r}))\, u(p_-), \tag{93.3}$$

$$C^{(-)} = e^{\pi\nu/2}\Gamma(1 + i\nu), \quad \nu = Z\alpha.$$

En cambio, la forma asintótica de la función $\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+ -\boldsymbol{p}_+}$ ha de contener una onda esférica divergente [superíndice (+)], dado que por su propio sentido es la función de onda de un « estado inicial con energía negativa ». En cuanto a la función de onda del positón (función que se forma a partir de $\psi^{(+)*}_{-\varepsilon_+ -\boldsymbol{p}_+}$) su expresión asintótica presenta en estas condiciones una onda convergente, como debe ser para una partícula final. Según (39.11) esta función es

* En este párrafo $p_\pm = |\boldsymbol{p}_\pm|$, $q = |\boldsymbol{q}|$.

$$\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+ - p_+} = \frac{C^{(+)}}{\sqrt{2\varepsilon_+}} e^{-ip_+\cdot r}\left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla}{2\varepsilon_+}\right) F(-i\nu,\ 1,\ i(p_+ r + \boldsymbol{p}_+\cdot\boldsymbol{r}))\, u(-p_+), \tag{93.4}$$

$$C^{(+)} = e^{-\pi\nu/2}\Gamma(1 + i\nu).$$

Obsérvese que la necesidad de tener en cuenta los términos $\sim 1/\varepsilon$ en (93.3-4) se debe a la estructura matricial de M_{fi} dada por (93.2). El elemento de matriz $(\boldsymbol{a})_{fi}$ es un vector cuya dirección es próxima a la de $\boldsymbol{k}$. En consecuencia, el término fundamental en $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})_{fi}$ resulta ser pequeño y los términos correctivos son del mismo orden que él mismo.

Substituyendo (93.3-4) en (93.2) y prescindiendo de los términos $\sim 1/\varepsilon_+\varepsilon_-$, se encuentra

$$M_{fi} = \frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_+\varepsilon_-}} u^*(p_-)\{(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha})I + (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{I}_+) + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{I}_-)(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha})\}\, u(-p_+), \tag{93.5}$$

donde

$$N = C^{(+)}C^{(-)} = \frac{\pi\nu}{\operatorname{senh}\pi\nu}, \tag{93.6}$$

$$I = \int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} F_-^* F_+ d^3x,$$

$$\boldsymbol{I}_+ = \frac{i}{2\varepsilon_+}\int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} F_-^* \nabla F_+ d^3x, \quad \boldsymbol{I}_- = \frac{i}{2\varepsilon_-}\int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} (\nabla F_-)^* F_+ d^3x, \tag{93.7}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k}$$

[F_- y F_+ designan, para abreviar, las funciones hipergeométricas introducidas en (93.3) y (93.4)]. Se observa inmediatamente que las integrales I, $\boldsymbol{I}_+$, $\boldsymbol{I}_-$ están ligadas por una identidad: de

$$\int \nabla(e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} F_-^* F_+)\, d^3x = 0.$$

se sigue

$$\boldsymbol{q}I + 2\varepsilon_+ \boldsymbol{I}_+ + 2\varepsilon_- \boldsymbol{I}_- = 0 \tag{93.8}$$

El cuadrado $|M_{fi}|^2$ lo promediaremos respecto de las polarizaciones del fotón incidente y lo sumaremos con relación a los spins del electrón y el positón *. Esto se consigue substituyendo el tensor

$$e_i e_k^* \to \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k), \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega},$$

y los productos bispinoriales

$$u_\pm \cdot \bar{u}_\pm \to 2\rho_\pm = (\varepsilon_\pm \gamma^0 - \boldsymbol{p}_\pm\cdot\boldsymbol{\gamma} \mp m).$$

Substituyendo también $\boldsymbol{a} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, se encuentra

---

* Para el cálculo teniendo en cuenta las polarizaciones de las partículas véase H. OLSEN, L. MAXIMON, Phys. Rev., **114**, 887 (1959).

$$|M_{fi}|^2 \to \frac{N^2}{2\varepsilon_+\varepsilon_-}\{\mathrm{Tr}\,\rho_- Q\rho_+ Q - \mathrm{Tr}\,\rho_-(n\cdot Q)\rho_+(n\cdot\bar{Q})\},$$
$$Q = \gamma I - \gamma^0\gamma(\gamma\cdot I_+) - \gamma^0(\gamma\cdot I_-)\gamma,$$
$$\bar{Q} = \gamma I^* - \gamma^0(\gamma\cdot I_+^*)\gamma - \gamma^0\gamma(\gamma\cdot I_-^*).$$

Escribamos sin más el resultado que se obtiene después de prescindir de los términos que no nos interesan para el caso relativista en la región de ángulos pequeños

$$\theta_\pm \sim \frac{m}{\varepsilon} \ll 1. \tag{93.9}$$

Introduciendo los vectores auxiliares:

$$\delta_\pm = \frac{1}{m}(p_\pm)_\perp, \qquad \delta_\pm = \frac{\varepsilon_\pm}{m}\theta_\pm \tag{93.10}$$

(el subíndice $\perp$ representa la componente perpendicular a la dirección de k), el resultado toma la forma

$$|M_{fi}|^2 \to \frac{N^2}{4}\left\{\frac{m^2\omega^2}{2\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}|I|^2 + 2\left|I\frac{m\delta_+}{2\varepsilon_+} + I_+\right|^2 + 2\left|I\frac{m\delta_-}{2\varepsilon_-} + I_-\right|^2\right\}. \tag{93.11}$$

Aquí se ha tenido en cuenta que $I \sim \frac{\varepsilon}{q} I_\pm \sim \frac{\varepsilon}{m} I_\pm$ [como puede verse en (93.8)] y se ha prescindido de los términos de orden superior respecto de m/ε.

Las integrales $I_\pm$ pueden escribirse en la forma

$$I_\pm = i\frac{p_\pm}{2\varepsilon_\pm}\frac{\partial J}{\partial p_\pm},$$

con

$$J = \int \frac{e^{-iq\cdot r}}{r} F(-i\nu, 1, i(p_+ r + p_+\cdot r))\, F(i\nu, 1, i(p_- r + p\cdot r))\, d^3x. \tag{93.12}$$

La integral J se expresa mediante la función hipergeométrica completa (no degenerada) *

$$J = \frac{4\pi}{q^2}\left(\frac{q^2 - 2p_+\cdot q}{q^2 - 2p_-\cdot q}\right)^{i\nu} F(-i\nu, i\nu, 1, z),$$
$$z = 2\,\frac{q^2(p_+p_- - p_+\cdot p_-) + 2(p_+\cdot q)(p_-\cdot q)}{(q^2 - 2p_+\cdot q)(q^2 - 2p_-\cdot q)}. \tag{93.13}$$

La derivación respecto de $p_\pm$ debe efectuarse para un valor dado del parámetro q y sólo después puede hacerse $q = p_+ + p_- - k$. He aquí el resultado en una forma en que se ha prescindido ya de las cantidades que no interesan en el caso ultrarrelativista y cuando se cumplen las condiciones (93.9):

---

* Cómo efectuar los cálculos puede verse en el artículo de NORDSIECK citado en la pág. 402.

$$I_{\pm} = \frac{4\pi}{q^2}\frac{\varepsilon_{\mp}}{m^2\omega}\left(\frac{\varepsilon_+\xi_+}{\varepsilon_-\xi_-}\right)^{i\nu}\left\{\pm\nu q\xi_{\mp}F(z) + i\frac{q^2}{m^2}F'(z)\left(q\xi_{\mp} - m\delta_{\pm}\right)\right\}. \qquad (93.14)$$

Para abreviar se han introducido las notaciones:

$$\xi_{\pm} = \frac{1}{1+\delta_{\pm}^2}, \quad z = 1 - \frac{q^2}{m^2}\xi_+\xi_-, \qquad (93.15)$$
$$F(z) = F(-i\nu,\ i\nu,\ 1,\ z)$$

[$F(z)$ es una función real]. La integral I se calcula luego directamente a partir de (93.8).

Substituyendo los valores de las integrales en (93.11) y a continuación en (93.1), obtendremos la sección eficaz diferencial buscada. La fórmula final es

$$d\sigma = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi\nu}{\operatorname{senh}\pi\nu}\right)^2 Z^2\alpha r_e^2\frac{m^4}{q^4\omega^3}\delta_+ d\delta_+\cdot\delta_- d\delta_-\cdot d\varphi\, d\varepsilon_+\cdot\left\{F^2(z)\times\right.$$
$$\times\left[-2\varepsilon_+\varepsilon_-\left(\delta_+^2\xi_+^2+\delta_-^2\xi_-^2\right)+\omega^2\left(\delta_+^2+\delta_-^2\right)\xi_+\xi_- + 2\left(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2\right)\delta_+\delta_-\xi_+\xi_-\cos\varphi\right]+$$
$$+\frac{q^4}{m^4}\frac{\xi_+^2\xi_-^2}{\nu^2}F'^2(z)\left[-2\varepsilon_+\varepsilon_-\left(\delta_+^2\xi_+^2+\delta_-^2\xi_-^2\right)+\omega^2\left(1+\delta_+^2\delta_-^2\right)\xi_+\xi_- -\right.$$
$$\left.\left.-2\left(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2\right)\delta_+\delta_-\xi_+\xi_-\cos\varphi\right]\right\}. \qquad (93.16)$$

Cuando $\nu\to 0$, se tiene

$$\frac{\pi\nu}{\operatorname{senh}\pi\nu}\to 1,\ F(z)\to 1,\quad F'(z)\approx\nu^2\to 0.$$

La expresión (93.16) se reduce en tal caso, como debe ser, a la fórmula de Bethe-Heitler (92.5), que corresponde a la aproximación de Born. A la misma fórmula se reduce también para ν arbitrario si los ángulos que forman las componentes del par satisfacen las condiciones

$$|\delta_+ - \delta_-| \ll 1, \quad |\pi - \varphi| \ll 1.$$

En efecto, en tal caso es $q \ll m$, de modo que en (93.16) se puede prescindir del segundo término de la expresión entre llaves teniendo en cuenta la presencia en él del factor suplementario (en comparación con el primer término) $(q/m)^4$. En cambio, en el primer término tenemos [observando que $(1-z)\sim q^2/m^2 \ll 1$] *

$$F(z)\to F(1)\equiv F(-i\nu,\ i\nu,\ 1,\ 1) = \frac{1}{\Gamma(1-i\nu)\,\Gamma(1+i\nu)} = \frac{\operatorname{senh}\pi\nu}{\pi\nu}, \qquad (93.17)$$

por lo que se reduce el factor análogo que aparece ante dicha expresión.

Pasemos a la integración de la sección eficaz respecto de las direcciones de emisión de las componentes del par.

La integración respecto de los ángulos la descompondremos en dos intervalos, I y II, en los cuales se tiene, respectivamente,

$$\text{I)}\ 1-z > 1-z_1, \quad \text{II)}\ 1-z < 1-z_1,$$

---

* Este valor de la función puede obtenerse a partir de la fórmula III (e, 7) que liga las funciones hipergeométricas de argumento z y $1-z$.

donde z_1 es un valor para el cual $1 \gg 1 - z_1 \gg (m/\varepsilon)^2$. Dado que en el intervalo II se tiene $1 - z \ll 1, q^2 \ll m^2$, por lo dicho antes se tendrá en él $d\sigma \approx d\sigma_B \equiv d\sigma \mid_{\nu=0}$, donde $d\sigma_B$ es la sección eficaz en la aproximación de Born. En consecuencia, para la integral respecto de los ángulos se obtiene

$$d\sigma_{\varepsilon_+} \equiv \int d\sigma = \int_I d\sigma + \int_{II} d\sigma\,|_{\nu\to 0} = (d\sigma_{\varepsilon_+})_B + \int_I (d\sigma - d\sigma|_{\nu\to 0}), \quad (93.18)$$

donde $(d\sigma_{\varepsilon_+})_B$ es la integral correspondiente a la sección eficaz de Born (92.7).

En el intervalo I tenemos

$$\frac{q^2}{m^2} \approx \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_- \cos\varphi.$$

Pasemos de las variables δ_+, δ_-, φ a las variables ξ_+, ξ_-, z. El cálculo directo del jacobiano de la transformación nos da

$$\delta_+ d\delta_+ \cdot \delta_- d\delta_- \cdot d\varphi \to \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{8m^2} \frac{d\xi_+ d\xi_- d\varphi}{(\xi_+\xi_-)^3 \operatorname{sen}\varphi},$$

y, además, se tiene

$$1 - z = \frac{q^2}{m^2}\xi_+\xi_- = \xi_+ + \xi_- - 2\xi_+\xi_- + 2\sqrt{\xi_+\xi_-(1-\xi_+)(1-\xi_-)}\cos\varphi.$$

Despejando de aquí $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$ y substituyendo en (93.16), obtendremos, después de simples transformaciones algebraicas,

$$d\sigma = A\, d\varepsilon_+ \frac{2d\xi_+ d\xi_- dz}{[z(1-z) - (1-z)(\xi_+ + \xi_- - 1)^2 - z(\xi_+ - \xi_-)^2]^{1/2}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{F^2(z)}{(1-z)^2} [(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2)(1-z) + 2\varepsilon_+\varepsilon_-(\xi_+ - \xi_-)^2] + \right.$$
$$\left. + \frac{F'^2(z)}{\nu^2} [(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) z + 2\varepsilon_+\varepsilon_-(\xi_+ + \xi_- - 1)^2] \right\},$$
$$A = \left(\frac{\pi\nu}{\operatorname{senh}\pi\nu}\right)^2 \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{2\pi\omega^3}.$$

Finalmente, introduzcamos en vez de ξ_+, ξ_- nuevas variables «esféricas» χ, ψ de acuerdo con

$$\xi_+ + \xi_- - 1 = \sqrt{z}\, \operatorname{sen}\chi \cos\psi;$$
$$\xi_+ - \xi_- = \sqrt{1-z}\, \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\psi;$$
$$0 \leqslant \chi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi;$$
$$2d\xi_+ d\xi_- \to \sqrt{z(1-z)}\, \operatorname{sen}\chi \cos\chi\, d\chi\, d\psi.$$

Los intervalos indicados de variación de χ y ψ corresponden a la variación de ξ_+ y ξ_- entre 0 y 1, es decir, de δ_+ y δ_- (o, lo que es lo mismo, de θ_+ y θ_-) entre 0 y ∞; la rápida convergencia de la integral permite esta ampliación del intervalo de variación de los ángulos. Después de la transformación, la raíz en el denominador se reduce a $\sqrt{z(1-z)}\cos\chi$; la integración respecto de $d\chi$ y $d\psi$ es elemental y da

$$d\sigma = 2A \cdot 2\pi\, dz \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\left[\frac{F^2(z)}{1-z} + \frac{z}{\nu^2}F'^2(z)\right] d\varepsilon_+.$$

Se ha introducido aquí el factor suplementario 2 que tiene en cuenta el hecho de que la integración respecto de dz se efectuará entre 0 y z_1, mientras que al variar el acimut φ entre 0 y π y de π a 2π cada valor de z aparece dos veces.

La integración respecto de dz se lleva a cabo mediante la fórmula (90.14), que para $\nu' = -\nu$ [y $F(z)$ real] tiene la forma

$$\frac{F^2}{1-z^2} + \frac{z}{\nu^2}F'^2 = \frac{1}{\nu^2}\frac{d}{dz}(zFF').$$

La integral de esta expresión es igual a $z_1F(z_1)F'(z_1)/\nu^2$. El valor $z_1F(z_1) \approx F(1)$ se toma de (93.17) y la expresión límite para $F'(z_1 \to 1)$ viene dada por la fórmula *

$$\frac{1}{\nu^2}F'(z) = F(1-i\nu,\ 1+i\nu,\ 2,\ z) \approx -[\ln(1-z) + 2f(\nu)]\frac{\operatorname{senh}\pi\nu}{\pi\nu},$$

donde

$$f(\nu) = \frac{1}{2}[\Psi(1+i\nu) + \Psi(1-i\nu) - 2\Psi(1)] = \nu^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\nu^2)}, \quad (93.19)$$

$$\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

Substituyendo en (93.18) todas las expresiones obtenidas, se llega a la siguiente fórmula final:

$$d\sigma_{\varepsilon_+} = 4Z^2\alpha r_e^2\left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\left[\ln\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\alpha Z)\right]\frac{d\varepsilon_+}{\omega^3}. \quad (93.20)$$

La sección eficaz total de formación de un par por un fotón de energía ω es

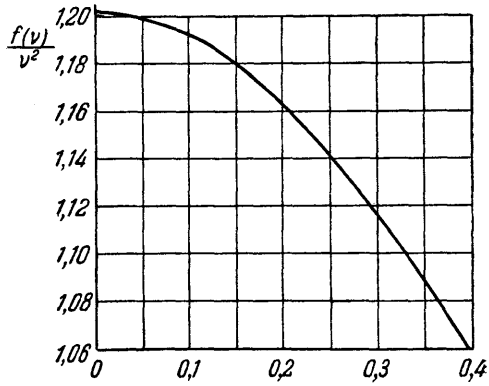


FIG. 17.

* La deducción de estas fórmulas puede encontrarse en el apéndice al artículo de H. DAVIES, H. A. BETHE, L. C. MAXIMON, Phys. Rev., **93**, 788 (1954).

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_e^2 \left[\ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} - f(\alpha Z) \right]. \tag{93.21}$$

Vemos así que, en estas fórmulas, las modificaciones se reducen a restar del logaritmo una función universal $f(\alpha Z)$ del número atómico. En la fig. 17 se representa gráficamente esta función. Cuando $\nu \ll 1$, se tiene $f(\nu) \approx 1{,}2\nu^2$.

Radiación de frenado

El elemento de matriz para el proceso de radiación de frenado se escribe

$$M_{fi}^{\text{fren}} = \int \psi_{\varepsilon' p'}^{(-)*} \, (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}^*) \, e^{-i \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}} \, \psi_{\varepsilon p}^{(+)} \, d^3 x; \tag{93.22}$$

las funciones de onda del electrón inicial $(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ y del final $(\varepsilon', \boldsymbol{p}')$ contienen en su expresión asintótica una onda esférica divergente y convergente, respectivamente. El cálculo de esta integral es análogo al del elemento de matriz (93.2). Sin embargo, no nos detendremos en efectuarlo.

En vez de ello expondremos otro método de cálculo de la sección eficaz de la radiación de frenado que se basa en un problema cuasiclásico y no utiliza de manera explícita las funciones de onda del electrón en el campo de un núcleo (y, en este sentido, no está ligado con la forma exacta del potencial del campo) *.

En el proceso de emisión de radiación de frenado el núcleo cede al electrón y al fotón un impulso $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}$. Al igual que antes (en el problema de creación de pares), hay que distinguir dos dominios de valores de la componente transversal (respecto de $\boldsymbol{p}$) del impulso transferido $q_\perp$:

$$\text{I)} \quad m \gtrsim q_\perp \gg \frac{\omega m^2}{\varepsilon^2}, \qquad \text{II)} \quad q_\perp \sim \frac{\omega m^2}{\varepsilon^2} \ll m. \tag{93.23}$$

Es claro que en la región I la sección eficaz de radiación coincide con la de Born. Ello se debe a que para tales valores de $q_\perp$ carece de importancia el retroceso en la emisión del fotón por el electrón [como se demostrará detenidamente en el § 95; véase el razonamiento que conduce a la condición (95.10)]. Por ello, en la región I la sección eficaz del proceso se descompone en el producto de la sección eficaz exacta de dispersión del electrón en el campo del núcleo por la probabilidad de emisión del fotón, que es independiente de la forma del campo. Pero dado que según (81.10) la sección eficaz de dispersión en un campo de Coulomb coincide, para ángulos pequeños, con la sección eficaz de Born, con ésta coincidirá también la sección eficaz total del proceso en la región I.

Así, pues, basta considerar tan sólo la región II. A una pequeña transferencia de impulso corresponde el paso del electrón por delante del núcleo a grandes dis-

* La deducción expuesta en lo que sigue se debe a V. N. BAIER y V. M. KATKOV (1968). Para otro método de cálculo cuasiclásico, véase H. OLSEN, L. MAXIMON, H. WERGELAND, Phys. Rev., **106**, 27 (1957).

tancias de impacto: $\varrho \sim 1/q_\perp \backsim \varepsilon/m^2$. Pero a tales distancias el movimiento del electrón es, evidentemente, cuasiclásico [de lo que es fácil convencerse también mediante una inmediata aplicación de la condición ordinaria para que se dé el carácter cuasiclásico, III (46.7), a la ecuación ultrarrelativista (39.5)].

El hecho de que el movimiento sea cuasiclásico permite utilizar el método que ya se aplicó en el § 59 a la radiación de frenado magnético. La probabilidad de que se emita un fotón viene dada por la integral (59.9) [con Q dada por (59.13)], que en el presente caso es igual a la probabilidad de emisión en un solo paso del electrón por delante del núcleo.

Como en el § 59, es necesario ante todo calcular la cantidad L definida por (59.15). La única diferencia consiste en la forma de la trayectoria clásica del electrón $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Para grandes distancias de impacto, el movimiento tiene lugar en una región en la que el campo del núcleo $U(r)$ se puede ya considerar débil. En la aproximación de orden cero la trayectoria es una recta que pasa a distancia ϱ del centro. En la aproximación siguiente, tenemos la ecuación del movimiento (cf. I § 20):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r},$$

donde $\boldsymbol{\rho}$ es un vector en el plano xy, perpendicular al impulso inicial del electrón, y la variable r en el segundo miembro de la igualdad hay que interpretarla como función de la aproximación de orden cero:

$$r \approx \sqrt{\varrho^2 + v^2 t^2} \approx \sqrt{\varrho^2 + t^2}.$$

De aquí se sigue

$$\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = -\boldsymbol{\rho}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}t}{r}. \tag{93.24}$$

La velocidad $\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{p}(t)/\varepsilon$, igualdad en la que la energía ε [que depende solamente del módulo, pero no de la dirección de $\boldsymbol{p}(t)$] puede considerarse constante dentro de la precisión exigida. En consecuencia, una integración más nos da

$$\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1) = \mathbf{v}(t_1)(t_2 - t_1) - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_{t_1}^{t}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}t'}{r(t')}, \tag{93.25}$$

En lo que sigue haremos $t_1 \to -\infty$, de modo que las cantidades $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(-\infty)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(-\infty)$ son el impulso y la velocidad iniciales del electrón.

Esta fórmula tiene exactamente la misma estructura que (59.17): el primer término es paralelo, y el segundo, perpendicular a $\mathbf{v}$, conteniendo el coeficiente del segundo término el factor $1/\varepsilon$. Por lo tanto, se obtiene para L la anterior expresión (59.18), con $\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)$ dado por (93.25).

Utilizando esta expresión, representaremos la probabilidad (59.9) en la forma

$$dw = |a(\boldsymbol{\rho})|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{93.26}$$

donde

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\rho}) &= e\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \exp\left\{ i \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} (\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}(t)) \right\} dt, \\ R(t) &= \frac{u^*_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}}{\sqrt{2\varepsilon}} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^* \frac{u_{\varepsilon\boldsymbol{p}}}{\sqrt{2\varepsilon}} \end{aligned} \tag{93.27}$$

y, además, todos los factores del integrando se pueden considerar ya como magnitudes clásicas, es decir, cabe prescindir de su carácter no conmutativo *.

Recordaremos que en (93.27)

$$\varepsilon' = \varepsilon - \omega, \qquad \boldsymbol{p}(t') = \boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{k}.$$

La función clásica $\boldsymbol{p}(t)$, en cambio, viene dada por (93.24). Interpretando $\boldsymbol{p}$ como impulso inicial de la partícula, para un campo de Coulomb ($U = -\nu/r$, $\nu = Z\alpha$) obtendremos:

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p} - \frac{\nu\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\left[\frac{t}{\sqrt{\rho^2 + t^2}} + 1\right].$$

Además,

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\varepsilon} t - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\frac{\nu}{\varepsilon}\left[\sqrt{\rho^2 + t^2} + t\right].$$

Introduciendo la variación del impulso en la dispersión clásica

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{p}(\infty) - \boldsymbol{p}(-\infty) = -\frac{2\boldsymbol{\rho}\,\nu}{\rho^2}, \tag{93.28}$$

escribiremos estas fórmulas como sigue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(t) &= \boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{\Delta}}{2}\left[\frac{t}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} + 1\right], \\ \boldsymbol{r}(t) &= \left(\boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{\Delta}}{2}\right)\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\boldsymbol{\Delta}}{2\varepsilon}\sqrt{t^2 + \rho^2}. \end{aligned} \tag{93.29}$$

Utilizando ahora la fórmula (59.19) para $R(t)$ y las expresiones (93.29) para $\boldsymbol{p}(t)$ y $\boldsymbol{r}(t)$, es posible calcular la integral respecto del tiempo en (93.27). La integración se efectúa cambiando la variable t por

* La posibilidad de proceder así, al igual que en el § 59, viene asegurada por la desigualdad $\omega \gg \omega_0$, donde ω_0 es la frecuencia característica del movimiento. En el caso presente se tiene $\omega_0 \sim \nu/\rho \ll m$, y $\omega \sim \varepsilon$.

$$\xi = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}(t))$$

y aplicando la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-i\xi}\,d\xi}{\sqrt{\chi^2+\xi^2}} = 2i\chi K_1(\chi)$$

(K_1 es la función de McDonald). Sin embargo, de hecho no es necesario efectuar estos cálculos hasta el final. Ello se debe a que lo que se nos pide es la expresión de $a(\boldsymbol{\rho})$ tan sólo para pequeños valores del módulo ($\Delta \ll m$) de la cantidad $\boldsymbol{\Delta}$ (que en el cálculo se considera como un parámetro independiente). Se obtiene entonces para $a(\boldsymbol{\rho})$ una expresión de la forma

$$a(\boldsymbol{\rho}) = w_f^* \mathbf{D} w_i \cdot \boldsymbol{\Delta}\chi K_1(\chi) \tag{93.30}$$

con

$$\chi = \rho\frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon'}(1 - \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}),$$

donde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ y $\mathbf{D}$ es una cierta función de $\boldsymbol{p}$, ε, $\boldsymbol{k}$ (pero ya no de $\boldsymbol{\rho}$); no nos hace falta la forma de esta función *. Dado que en el caso ultrarrelativista el fotón se emite formando un ángulo pequeño θ con la dirección de la velocidad del electrón, se tendrá

$$\chi \approx \rho\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\omega\left(1 - v + \frac{\theta^2}{2}\right)$$

o bien

$$\chi = \rho\frac{\omega m^2}{2\varepsilon\varepsilon'}(1 + \delta^2). \tag{93.31}$$

Dijimos ya que (93.26) es la probabilidad de que se emita un fotón al pasar una sola vez por delante del núcleo con un parámetro de impacto ρ. En cambio, la sección eficaz del proceso de emisión de un fotón con frecuencia y dirección dadas se obtendrá multiplicando por $v^{-1}d\rho_x\,d\rho_y \approx d\rho_x\,d\rho_y \equiv d^2\rho$ e integrando respecto del parámetro de impacto:

$$d\sigma = \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int |a(\boldsymbol{\rho})|^2\,d^2\rho. \tag{93.32}$$

Sin embargo, no hay que pensar que, sin efectuar la integración respecto de $d^2\rho$, esta fórmula daría también la distribución de los electrones finales según sus direcciones. Ello se debe a que la desviación del electrón en su movimiento siguiendo

* Obsérvese que en la integración se pueden considerar como constantes los espinores w_i, w_f, es decir, cabe prescindir del cambio en la polarización ζ del electrón en su movimiento ultrarrelativista clásico. Que así es puede comprobarse basándose en las ecuaciones obtenidas en el § 41.

una trayectoria clásica, que está unívocamente determinada por el campo exterior, en modo alguno coincide con la desviación indeterminada desde el punto de vista de la mecánica cuántica [de modo que tampoco el límite $\boldsymbol{p}'(\infty)$ de la función clásica $\boldsymbol{p}'(t)$ coincide con el impulso final del electrón $\boldsymbol{p}'$]. Por esto, para obtener la distribución angular de los electrones es necesario efectuar el desarrollo de su función de onda en ondas planas, de manera análoga a como se hizo en III, § 127.

De (93.32) se deduce evidentemente que $a(\boldsymbol{\rho})$ es la amplitud de emisión de un fotón cuando el electrón pasa con un parámetro de impacto ρ. Las expresiones (93.26-27) determinan, sin embargo, esta amplitud tan sólo salvo un factor de fase. Se comprende fácilmente que este factor es igual a $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}$. En efecto, del hecho de que en $\boldsymbol{r}(t)$ aparezca una parte independiente del tiempo $\boldsymbol{r}_\perp(-\infty) = \boldsymbol{\rho}$ se sigue que dicho factor constante se tenía ya en la expresión para $V_{fi}(t)$. Este factor se puede sacar fuera de la integral respecto del tiempo, y gracias a que no se trata de un operador no se ve afectado por el proceso de conmutación de los operadores. Así, pues, la amplitud correspondiente al proceso de emisión de radiación es

$$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\, a(\boldsymbol{\rho}), \tag{93.33}$$

donde $a(\boldsymbol{\rho})$ viene dada por (93.30).

Supongamos ahora que el electrón se representa para $z \to -\infty$ por una onda plana con impulso $\boldsymbol{p}$ dirigido a lo largo del eje z. Esto significa que para $z \to -\infty$ la función de onda del electrón en el plano xy se reduce a una constante independiente de $\boldsymbol{\rho}$, constante que se puede hacer igual a la unidad. (Para simplificar, prescindimos de las amplitudes bispinoriales que carecen de importancia en los razonamientos que siguen). Entonces, según III (127.2), la función de onda del electrón que atraviesa el campo será igual, para $z \to \infty$, a *

$$\psi(\infty) = \exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z)\mathrm{d}z\right\} \equiv S(\boldsymbol{\rho}) \tag{93.34}$$

Por el propio sentido de amplitud de transición de (93.33), la función de onda del electrón que atraviesa el campo y emite un cuanto será

$$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\, a(\boldsymbol{\rho})\, S(\boldsymbol{\rho}). \tag{93.35}$$

Entonces la amplitud de emisión del fotón con paso del electrón a un estado con impulso determinado $\boldsymbol{p}'$ vendrá dada por la correspondiente componente de Fourier de (93.35), es decir, según III (127.3-4), por la expresión

$$a(\boldsymbol{q}_\perp) = \int e^{-i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{\rho}}\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\, a(\boldsymbol{\rho})\, S(\boldsymbol{\rho})\, \mathrm{d}^2\rho = \int e^{-i\boldsymbol{q}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}\, a(\boldsymbol{\rho})\, S(\boldsymbol{\rho})\, \mathrm{d}^2\rho, \tag{93.36}$$

---

* Al referirnos a la fórmula III (127.2), tenemos presente la analogía entre la ecuación (39.5) (en la que suponemos $\boldsymbol{p}^2 \approx \varepsilon^2$) y la ecuación no-relativista de Schrödinger (39.5a). Teniendo en cuenta la diferencia en el significado de los coeficientes de dichas ecuaciones, es fácil ver que, en nuestro caso, se cumplen efectivamente las condiciones III (127.1) de aplicabilidad de la fórmula III (127.2). El hecho de que esta fórmula no sea aplicable para valores de z arbitrariamente grandes, carece aquí de importancia por las mismas razones que en III § 127.

en la que $\boldsymbol{q}_\perp$ es la componente normal del impulso transferido por el núcleo. La sección eficaz de dispersión con una transferencia dada $\boldsymbol{q}_\perp$ será

$$d\sigma = |a(\boldsymbol{q}_\perp)|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^2q_\perp}{(2\pi)^2} \tag{93.37}$$

Calculemos ahora $S(\boldsymbol{\rho})$. En el caso que nos interesa, el de un campo de Coulomb, la integral en el exponente diverge (lo que refleja la divergencia de las fases en la dispersión coulombiana). Por ello, hay que calcular la integral primero entre límites finitos:

$$\int_{-R}^{R} U dz = -2\nu \int_0^R \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = -2\nu \left[\ln (R + \sqrt{R^2 + \rho^2}) - \ln \rho\right] \approx$$

$$\approx -2\nu \ln 2R + 2\nu \ln \rho$$

($R \gg \rho$). El primer término constante carece de importancia, de modo que

$$S(\boldsymbol{\rho}) = e^{-2i\nu \ln \rho} = \rho^{-2i\nu}. \tag{93.38}$$

Substituyendo (93.30) y (93.38) en (93.35) y efectuando la integración respecto de las direcciones del vector ρ en el plano xy, obtendremos

$$a(\boldsymbol{q}_\perp) \sim \nu \int_0^\infty \rho^{-2i\nu} \; K_1(\chi) \, J_1(q_\perp \rho) \rho \, d\rho \tag{93.39}$$

(J_1 es una función de Bessel). No se han escrito aquí los factores que no contienen $\nu = Z\alpha$.

Vemos, pues, que la dependencia de la amplitud $a(\boldsymbol{q}_\perp)$ [y por lo mismo también de la sección eficaz (93.37)] con relación a ν queda limitada a un solo factor. Por otra parte, cuando $\nu \to 0$ la sección eficaz debe pasar a ser la correspondiente expresión de Born. De aquí se sigue ya, evidentemente, que la sección eficaz diferirá de la de Born tan sólo en un factor, factor éste que no depende de la polarización del electrón y que, por lo tanto, no modifica los efectos de polarización.

La integral (93.39) se expresa mediante una función hipergeométrica según la fórmula

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_1(ax) J_1(bx) x dx =$$

$$= \frac{b\Gamma(2 - \frac{\lambda}{2}) \Gamma(1 - \frac{\lambda}{2})}{2^2 a^{3-\lambda}} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) F\left(\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2}, 2, \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right).$$

Esto da

$$a(\boldsymbol{q}_\perp) \sim \nu \left(\frac{q}{2}\right)^{2i\nu} (1 - i\nu) \, \Gamma^2(1 - i\nu) \; F(i\nu, 1 - i\nu, 2, z), \tag{93.40}$$

donde

$$z = 1 - \frac{m^4\omega^2}{4q^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1 + \delta^2)^2, \quad \delta = \frac{\varepsilon\theta}{m}. \tag{93.41}$$

Se ha utilizado aquí el hecho de que en la región II de valores de $\boldsymbol{q}_\perp$ la componente de $\boldsymbol{q}$ paralela al vector $\boldsymbol{p}$ es:

$$q_{\parallel}^2 = \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}_\perp^2 \approx \frac{m^4\omega^2}{4\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1 + \delta^2)^2. \tag{93.42}$$

Esta relación se comprueba fácilmente teniendo en cuenta que en dicha región los ángulos entre los impulsos $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ y $\boldsymbol{k}$ satisfacen las condiciones (91.15).

La función hipergeométrica que aparece en (93.40) puede reducirse a la función $F(z)$ de (93.15) mediante la fórmula

$$F(a, b + 1, c + 1, z) = \frac{c}{a - c}F(a, b, c, z) + c\frac{(1 - z)}{b(a - c)}F'(a, b, c, z).$$

En definitiva obtendremos el siguiente resultado final:

$$d\sigma = d\sigma_B\left[F^2(z) + \frac{(1 - z)^2}{\nu^2}F'^2(z)\right]\frac{1}{F^2(1)}, \tag{93.43}$$

donde $d\sigma_B$ es la sección eficaz de Born (91.13). Cuando $q \gg m^2/\varepsilon$, tenemos $z \approx 1$ y todo el factor que multiplica a $d\sigma_B$ se reduce a 1 [en este sentido la fórmula (93.43), deducida para la región II, es aplicable automáticamente para cualesquiera $q \lesssim m$]. Recordemos que para $q \lesssim m^2/\varepsilon$, cuando el factor correctivo en (93.43) es diferente de 1, los vectores $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{k}$ son casi coplanarios y las cantidades δ y δ' son casi iguales, circunstancia que se utilizó ya en (93.42). Teniendo esto en cuenta, el cuadrado q^2 en la expresión (93.41) de z se puede escribir

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta'\cos\varphi + \frac{m^2\omega^2}{4\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1 + \delta^2)^2, \tag{93.44}$$

es decir, cabe hacer $\delta = \delta'$ en el segundo término de (91.14), pero no en el primero, que no contiene el pequeño coeficiente $\sim m^2/\varepsilon^2$.

Para hallar la integral (angular) de la sección eficaz no es necesario efectuar de nuevo la integración. El resultado puede encontrarse por analogía con el problema de la formación de pares, volviendo al elemento de matriz de la transición en la forma (93.23) y aplicando el siguiente razonamiento (*H. Olsen*, 1955). Las diferentes direcciones de $\boldsymbol{p}'$ (para una energía dada ε') corresponden a la degeneración del estado final del electrón. Es evidente que el resultado de la suma respecto de los estados que se refieren a un mismo nivel degenerado, no depende de cuál sea precisamente la forma como se elija el conjunto completo de tales estados. Con vistas a efectuar la suma relativa a las direcciones de $\boldsymbol{p}'$, podemos por ello utilizar el sistema de funciones $\psi^{(+)}_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}$ en vez del sistema $\psi^{(-)}_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}$ (necesario para el cálcu-

lo de la sección eficaz diferencial), es decir, cabe determinar el elemento de matriz de la radiación de frenado mediante la fórmula

$$M_{fi}^{\text{fren}} = \int \psi_{\varepsilon' p'}^{(+)*} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}^*)\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \psi_{\varepsilon p}^{(+)}\, d^3x.$$

Es fácil comprobar que esta integral coincide con la integral $(M_{\text{fi}}^{\text{par}})^*$, si en esta última se substituyen los parámetros de las funciones de onda de acuerdo con

$$\boldsymbol{p}_+,\ p_+,\ \varepsilon_+ \to -\boldsymbol{p},\ -p,\ -\varepsilon; \qquad \boldsymbol{p}_-,\ p_-,\ \varepsilon_- \to \boldsymbol{p}',\ p',\ \varepsilon'; \qquad \boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$$

(y también se efectúa el cambio de variables de integración $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$).

Es claro por esto que la integral (angular) de la sección eficaz de radiación de frenado se puede obtener a partir de la sección total de formación de un par (93.20) multiplicando ésta por

$$\frac{\omega^2}{p_+^2}\frac{d\omega}{d\varepsilon_+} \approx \frac{\omega^2}{\varepsilon_+^2}\frac{d\omega}{d\varepsilon_+}$$

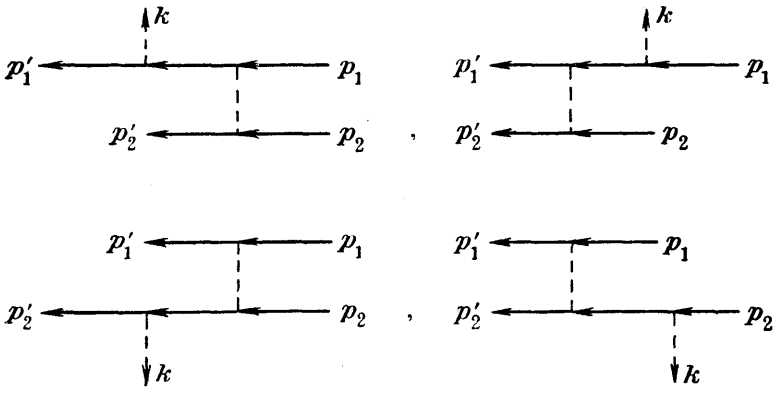
[cf. (92.2)] y substituyendo $\varepsilon_+ \to -\varepsilon$, $\varepsilon_- \to \varepsilon'$. De esta manera, se encuentra

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{2}{3}\right)\left[\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\alpha Z)\right]\frac{d\omega}{\omega}. \tag{93.45}$$

Vemos así que las correcciones a las fórmulas de Born para las secciones eficaces totales de radiación de frenado y de formación de pares vienen dadas por la misma función $f(\alpha Z)$.

§ 94. Radiación de frenado por un electrón que choca con un electrón en el caso ultrarrelativista

La radiación de frenado de un electrón que choca con un electrón se representa por ocho diagramas de Feynman: los cuatro



(94.1 a)

(94.1 b)

diagramas y los cuatro diagramas « de intercambio » que se obtienen a partir de ellos permutando p_1 y p'_2. Presentaremos aquí los resultados de los cálculos para el caso ultrarrelativista *.

En el sistema de referencia del laboratorio (sistema de reposo de uno de los electrones iniciales, digamos, el segundo) la integral respecto de las direcciones del fotón de la sección eficaz de radiación se puede representar en forma de suma $d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$, donde

$$d\sigma^{(1)} = 4\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} + \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon\,(\varepsilon - \omega)}{m\omega} - \frac{1}{2} \right); \quad (94{,}2)$$

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3} \alpha r_e^2 \frac{m d\omega}{\omega^2} \left\{ \left(4 - \frac{m}{\omega} + \frac{m^2}{4\omega^2} \right) \ln \frac{2\varepsilon}{m} - 2 + \frac{2m}{\omega} - \frac{5m^2}{8\omega^2} \right\} \text{ para } \omega \geqslant \frac{m}{2}; \quad (94.3)$$

$$d\sigma^{(3)} = \frac{2}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \left\{ 8 \left(1 - \frac{\omega}{m} + \frac{\omega^2}{m^2} \right) \ln \frac{\varepsilon}{\omega} - \right.$$
$$- \left(1 - \frac{2\omega}{m} \right) \ln \left(1 - \frac{2\omega}{m} \right) \left[\frac{m^3}{4\omega^3} - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{\omega} - 2 + \frac{4\omega}{m} \right] -$$
$$\left. - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{2\omega} - 2 + \frac{2\omega}{m} - \frac{4\omega^2}{m^2} \right\} \text{ para } \omega \leqslant \frac{m}{2} \quad (94.4)$$

(ε es la energía inicial del electrón primero).

La precisión de estas fórmulas alcanza a los términos del orden de m/ε. Dentro de este límite de precisión resulta que las contribuciones a la sección eficaz debidas a los diferentes diagramas no interfieren entre sí y, en este sentido, $d\sigma^{(1)}$ y $d\sigma^{(2)}$ corresponden a la radiación de cada uno de los dos electrones — a saber, al electrón rápido y al electrón de retroceso, respectivamente — [diagramas (94.1 a) y (94.1 b)].

Los diagramas del tipo de intercambio dan la misma contribución a la sección eficaz que los diagramas « directos ». En virtud de la identidad de los electrones, la contribución total de los diagramas directos y de intercambio hay que dividirla por 2; por ello, cabe considerar solamente la contribución de los diagramas directos y no tener en cuenta la identidad de las partículas. En cambio, en la colisión de un electrón con un positón, en vez de los diagramas de intercambio aparecen los de aniquilación. Su contribución, sin embargo, resulta ser de un orden relativo de magnitud m/ε, es decir, cabe prescindir de ella. Por lo tanto, dentro de la precisión indicada, las secciones eficaces de radiación de frenado en las colisiones de un electrón con un electrón y con un positón son las mismas.

Cuando $\omega \gg m$, para la razón $\dfrac{d\sigma^{(2)}}{d\sigma^{(1)}}$ se tiene

* Estos resultados se han obtenido en los trabajos de V. N. Baier, V. M. Galitskii, Zh ETF **49**, 661 (1965); V. N. Baier V. S. Fadin, V. A. Joze, Zh ETF **51**, 1 135 (1966); **53**, 2 194 (1967). En estos artículos hay que prestar atención al método de integración de la sección eficaz diferencial basado en la introducción de variables invariantes; la utilización de este método simplifica los cálculos de manera muy notable.

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\sigma^{(1)}} \sim \frac{m}{\omega} \ll 1,$$

es decir, la radiación por el electrón de retroceso es pequeña comparada con la radiación emitida por el electrón rápido [cuando esta razón llega a ser del orden de m/ε, la fórmula (94.3), claro está, pierde su sentido]. Por el contrario, cuando $\omega \ll m$ ambas partes de la sección eficaz son casi comparables:

$$d\sigma^{(1)} = \frac{16}{3}\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{2\varepsilon^2}{m\omega}, \quad d\sigma^{(2)} = \frac{16}{3}\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{\varepsilon}{\omega}, \quad \omega \ll m. \tag{94.5}$$

Para que las fórmulas (94.2-5) sean válidas, es necesario que por lo menos uno de los electrones siga siendo ultrarrelativista después de emitida la radiación. En otras palabras, la frecuencia del fotón debe encontrarse suficientemente alejada de la bien delimitada frontera del espectro, es decir, de la frecuencia máxima ω_{max} que se puede emitir. La energía final de los electrones será mínima, y la energía del fotón será máxima, cuando los dos electrones se muevan después de emitir la radiación en la dirección del fotón y tengan igual velocidad. De las leyes de conservación se sigue entonces

$$\varepsilon + m = \omega_{max} + 2\varepsilon', \quad |\boldsymbol{p}| = \omega_{max} + 2|\boldsymbol{p}'|.$$

Eliminando entre ellas ε' y $\boldsymbol{p}'$, obtendremos

$$(\varepsilon + m - \omega_{max})^2 - (|\boldsymbol{p}| - \omega_{max})^2 = 4m^2,$$

de donde

$$\omega_{max} = \frac{m(\varepsilon - m)}{m + \varepsilon - |\boldsymbol{p}|}. \tag{94.6}$$

Cuando $\varepsilon \gg m$ tenemos $\omega_{max} \approx \varepsilon$. De esta manera, las fórmulas (94.2-4) son válidas a condición de que

$$\omega_{max} - \omega \sim \varepsilon - \omega \gg m. \tag{94.7}$$

La sección eficaz de radiación por un electrón rápido (94.2) coincide exactamente con la sección eficaz de radiación (91.17) por un electrón que choca con un núcleo para el que $Z = 1$. Esta coincidencia no es casual y sus causas se explican analizando el papel del retroceso en el fenómeno de radiación.

Al deducir la fórmula (91.17) hemos prescindido del retroceso de la partícula en reposo (el núcleo), es decir, la hemos substituido por un campo exterior constante. Esto se reduce a prescindir de la componente temporal del 4-vector de transferencia de impulso $q = p' - p + k$ (energía de retroceso). Demostraremos que en el caso ultrarrelativista cabe prescindir de dicho término no sólo para la radiación emitida por un electrón que choca con un núcleo, sino también para el que choca con otro electrón.

Escribamos q^2 en la forma

$$-q^2 = -(\varepsilon' + \omega - \varepsilon)^2 + (p'_{\parallel} + \omega - p_{\parallel})^2 + (\boldsymbol{p}'_{\perp} - \boldsymbol{p}_{\perp})^2, \tag{94.8}$$

donde los subíndices indican las componentes de los vectores $\boldsymbol{p}'$ y $\boldsymbol{p}$ (impulsos inicial y final del electrón) paralelas y perpendiculares a la dirección del fotón $\boldsymbol{k}$. En el caso ultrarrelativista, los ángulos θ y θ' (formados por $\boldsymbol{k}$ y por $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p}'$, respectivamente) son pequeños: $\theta \lesssim m/\varepsilon$, $\theta' \lesssim m/\varepsilon'$. Por ello,

$$|\boldsymbol{p}_\perp| \sim |\boldsymbol{p}|\,\theta \sim m,$$

$$p_{\parallel} \approx |\boldsymbol{p}| - \frac{\boldsymbol{p}_\perp^2}{2|\boldsymbol{p}|} \approx \varepsilon - \frac{m^2}{2\varepsilon} - \frac{\boldsymbol{p}_\perp^2}{2\varepsilon}, \tag{94.9}$$

y análogamente, para $\boldsymbol{p}'_\perp$, $\boldsymbol{p}'_{\parallel}$.

Si no se tiene en cuenta el retroceso, tenemos $\varepsilon' + \omega - \varepsilon = 0$; la diferencia $p'_{\parallel} + \omega - p_{\parallel} \sim m^2/\varepsilon$, de modo que

$$-q^2 \approx (\boldsymbol{p}'_\perp - \boldsymbol{p}_\perp)^2 \sim m^2. \tag{94.10}$$

La energía de retroceso (del electrón) es:

$$q_0 = \varepsilon' + \omega - \varepsilon \sim \frac{\boldsymbol{q}^2}{2m} \sim m. \tag{94.11}$$

Por otra parte, puede prescindirse de la variación de $\boldsymbol{p}'_\perp$ debida al cambio de ε'. En consecuencia, los dos primeros términos de (94.8) dan la variación de q^2 debida a tener en cuenta el retroceso; designémosla por Δq^2. Aplicando (94.9), se obtendrá

$$\Delta q^2 \approx (\varepsilon' + \omega - \varepsilon)\left(-\frac{m^2}{\varepsilon'} - \frac{\boldsymbol{p}_\perp'^2}{\varepsilon'} + \frac{m^2}{\varepsilon} + \frac{\boldsymbol{p}_\perp^2}{\varepsilon}\right) \sim m^2 \frac{m}{\varepsilon}.$$

Comparando con (94.10), vemos que $\Delta q^2 \ll |q^2|$, con lo cual queda justificado el prescindir del retroceso *.

El hecho de que una partícula rápida emite la radiación dentro de un cono estrecho (de abertura $\sim m/\varepsilon$) en la dirección de su movimiento permite obtener la sección eficaz de radiación en el sistema del centro de masa mediante un simple cálculo a partir de la sección eficaz (94.2) en el sistema del laboratorio **.

En el sistema del centro de masa ambos electrones radian de igual manera, cada uno en la dirección de su movimiento***. La energía E de un electrón ultrarrelativista en el sistema del centro de masa está ligada con su energía ε en el sistema del laboratorio por la relación $2E^2 = m\varepsilon$, mientras que las frecuencias Ω y ω del fotón en dichos sistemas lo están por la relación $\omega/\varepsilon = \Omega/E$ [estas igualdades se obtienen fácilmente comparando los valores de los invariantes $(p_1 p_2)$ y $(p_1 k)$ en ambos sistemas]. Por ello, para la sección eficaz de radiación emitida por cada uno de los electrones en el sistema del centro de masa se encuentra

---

* Es claro que esta conclusión está aún más justificada para la radiación de un electrón que choca con un núcleo, caso éste en que la energía de retroceso $q_0 \approx \boldsymbol{q}^2/2M \sim m^2/M$, donde M es la masa del núcleo.

** En el caso general este cálculo no es posible puesto que la contribución al espectro en un intervalo dado de frecuencias $d\omega$ procede de fotones que son emitidos en direcciones esencialmente diferentes.

*** Obsérvese que esta circunstancia explica intuitivamente la causa de que no exista interferencia entre las radiaciones de una y otra partícula.

$$d\sigma^{(1)} = d\sigma^{(2)} =$$
$$= 4\alpha r_e^2 \frac{d\Omega}{\Omega} \frac{E-\Omega}{E} \left(\frac{E}{E-\Omega} + \frac{E-\Omega}{E} - \frac{2}{3} \right) \left(\ln \frac{4E^2 (E-\Omega)}{m^2 \Omega} - \frac{1}{2} \right) \quad (94.12)$$

(*G. Altarelli, F. Bucella*, 1964).

Para que sea aplicable (94.12) es también necesario que la frecuencia del fotón no esté próxima a la frontera del espectro. Si una partícula es ultrarrelativista, la transformación antes indicada da directamente, partiendo de $\omega_{max} \approx \varepsilon$

$$\Omega_{max} \approx \omega_{max} \frac{E}{\varepsilon} \approx E. \quad (94.13)$$

Así, pues, en el sistema del centro de masa los electrones pueden radiar solamente la mitad de su energía total $2E$. Es fácil efectuar el cálculo directo de Ω_{max} observando que, después de la emisión de un tal fotón, los electrones se moverán (en el mismo sistema) con idénticas velocidades en direcciones opuestas a la dirección del fotón. Se tiene

$$2E = 2E' + \Omega_{max}, \quad 2|\boldsymbol{p}'| = \Omega_{max},$$

de donde

$$\Omega_{max} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{E} = E - \frac{m^2}{E}, \quad (94.14)$$

y en el caso ultrarrelativista encontramos de nuevo (94.13). Por consiguiente, la fórmula (94.12) es aplicable a condición de que

$$\Omega_{max} - \Omega \sim E - \Omega \gg m. \quad (94.15)$$

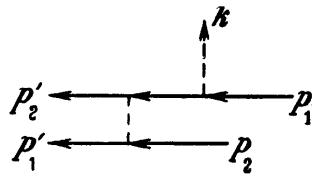
Veamos ahora las fórmulas para la radiación en el sistema del centro de masa en el caso límite opuesto, cerca de la frontera del espectro, cuando *

$$\Omega_{max} - \Omega \ll m. \quad (94.16)$$

Dado que en este caso el retroceso es muy importante, los resultados difieren de los correspondientes al caso de la dispersión por un centro inmóvil y resultan ser diferentes para la dispersión electrón-electrón y electrón-positón.

En el caso de la dispersión electrón-electrón, además de los cuadrados de los diagramas (94.1), contribuyen también a la sección eficaz de radiación cerca del límite del espectro los productos (términos de interferencia) de los diagramas directos y de intercambio, en los cuales radia una y la misma partícula inicial, por ejemplo, el producto del segundo de los diagramas (94.1 a) y el diagrama

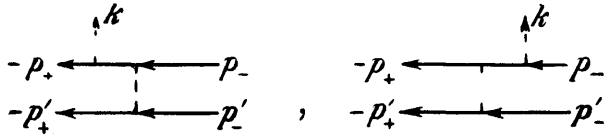
* Claro está, el resultado obtenido en la aproximación de Born es útil, como de ordinario, tan sólo en tanto que la velocidad relativa de los electrones finales sea grande comparada con α. En el caso contrario hay que tener en cuenta la interacción de las partículas en el estado final.



Esto se debe a que, cerca de la frontera, las partículas finales poseen impulsos próximos entre sí y no hay razón alguna para que los términos de intercambio sean pequeños. El resultado definitivo para la sección eficaz es:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \tag{94.17}$$

En la dispersión electrón-positón, aportan una contribución logarítmica grande a la sección eficaz de radiación los cuadrados de los diagramas de aniquilación, en los cuales radian las partículas iniciales:



(94.18)

En la aproximación no-logarítmica cuentan también de manera esencial los cuadrados de los demás diagramas. Los términos de interferencia, en cambio, son pequeños. El resultado final es:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \left(\ln \frac{2E}{m} + 1\right) \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \tag{94.19}$$

Por lo tanto, en la dispersión electrón-positón la radiación emitida es logarítmicamente grande comparada con la radiación en la dispersión electrón-electrón.

§ 95. Emisión de fotones blandos en las colisiones

Sea $d\sigma_0$ la sección eficaz de un cierto proceso de dispersión de partículas cargadas que puede ir acompañado de la emisión de un determinado número de fotones. Junto con este proceso consideraremos también otro que difiere del primero tan sólo en la emisión de un fotón más. Si la frecuencia ω de este fotón es suficientemente pequeña (las correspondientes condiciones se formularán más adelante) la sección eficaz $d\sigma$ del segundo proceso está ligada con $d\sigma_0$ de manera sencilla.

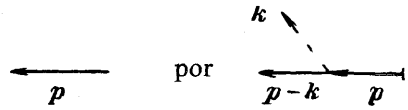
En efecto, para valores ω pequeños se puede prescindir de la influencia de la emisión de este cuanto sobre el propio proceso de dispersión. En otras palabras, la sección eficaz $d\sigma$ puede representarse en forma de producto de dos factores independientes: de la sección eficaz $d\sigma_0$ y de la probabilidad dw de que se emita un

fotón en la colisión. La emisión de un fotón blando es un proceso cuasiclásico; por consiguiente, su probabilidad coincide con el número de cuantos emitidos en la colisión calculado clásicamente, es decir, con la intensidad clásica (energía total) de la radiación dI dividida por $\omega(=\hbar\omega)$. Así, pues,

$$d\sigma = d\sigma_0 \frac{dI}{\omega}. \tag{95.1}$$

Veamos cómo esta fórmula se puede obtener mediante las reglas generales de la técnica de diagramas (*J. M. Jauch, F. Rohrlich*, 1954).

Los diagramas del proceso con emisión de un fotón adicional se obtienen a partir de los diagramas del proceso fundamental añadiendo una línea exterior de fotón « que forma un ramal » a partir de una línea de electrón cualquiera (exterior o interior), es decir, mediante la substitución de



(95.2)

Es fácil ver que el papel fundamental lo representarán los diagramas que se obtienen mediante esta substitución aplicada a las líneas de electrón exteriores. En efecto, si p es el impulso de una línea exterior ($p^2 = m^2$), para valores de k pequeños será también $(p - k^2)^2 \approx m^2$, es decir, el factor $G(p - k)$ que se añade en el diagrama se encontrará próximo a su polo.

Para la línea del electrón inicial p la substitución (95.2) se reduce a substituir en la amplitud de reacción

$$u(p) \to e\sqrt{4\pi}\, G(p-k)\, \hat{e}^* u(p) = e\sqrt{4\pi}\, \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2}\, \hat{e}^* u(p) \approx$$

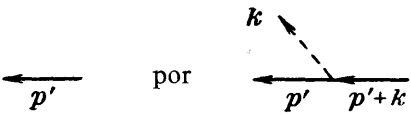
$$\approx -e\sqrt{4\pi}\, \frac{\hat{p}+m}{2(pk)}\, \hat{e}^* u \quad (p)$$

(el primer factor e es la carga).

Observando que $\hat{p}\hat{e}^* = 2pe^* - \hat{e}^*\hat{p}$ y que $\hat{p}u(p) = mu(p)$, se obtendrá la regla de substitución en la forma

$$u(p) \to -e\sqrt{4\pi}\, \frac{(pe^*)}{(pk)}\, u(p). \tag{95.3}$$

De manera análoga, para la línea de electrón p', la substitución en el diagrama



significa que en la amplitud se substituye

$$\bar{u}(p') \to e\sqrt{4\pi}\, \bar{u}(p')\, \frac{(p'e^*)}{(p'k)}. \tag{95.4}$$

En todas las demás partes del diagrama se puede prescindir de manera general de la variación de los impulsos de las líneas vinculadas con la emisión del fotón k. Al proceder así se sobreentiende que la energía del fotón ω es, en cualquier caso, pequeña comparada con las energías de todas las partículas que intervienen en la reacción (en particular, comparada con las energías de los fotones duros emitidos, si los hay).

Supongamos para concretar que la sección eficaz $d\sigma_0$ se refiere a la dispersión de un electrón por un núcleo en reposo (con la posible emisión de fotones duros). La amplitud de este proceso tiene la forma

$$M_{fi}^{(0)} = \bar{u}(p')\, Mu(p).$$

Aplicando a la misma una vez la substitución (95.3), otra la substitución (95.4) y sumando los resultados, obtendremos la amplitud de radiación de frenado correspondiente a aquellos mismos fotones duros y al fotón blando k ★

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} e \sqrt{4\pi} \left(\frac{p'e^*}{p'k} - \frac{pe^*}{pk} \right). \tag{95.5}$$

De acuerdo con esto, para la sección eficaz se tendrá

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot 4\pi e^2 \left| \frac{p'e}{p'k} - \frac{pe}{pk} \right|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega}. \tag{95.6}$$

Sumando respecto de las polarizaciones del fotón k, obtendremos

$$d\sigma = -e^2 \left[\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right]^2 \frac{d^3\boldsymbol{k}}{4\pi^2\omega}\, d\sigma_0 \tag{95.7}$$

Expresada en términos de magnitudes tridimensionales, esta fórmula se escribe★★

$$d\sigma = \alpha \left(\frac{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{n}}{1 - \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{n}} - \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}}{1 - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}} \right)^2 \frac{d\omega\, do_{\boldsymbol{k}}}{4\pi^2\omega}\, d\sigma_0, \tag{95.8}$$

donde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ y $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}'$ son las velocidades inicial y final del electrón. Vemos, así, que la expresión que multiplica a $d\sigma_0$ coincide efectivamente con la intensidad clásica de radiación [cf. II (69.4)] dividida por ω, como se afirmó en la fórmula (95.1)

La condición de aplicabilidad de las fórmulas obtenidas exige que la transferencia de impulso al núcleo $\boldsymbol{q}$ sea grande comparada con la variación $\delta\boldsymbol{q}$ de esta cantidad debida a la emisión del fotón blando. Se tiene

$$\delta\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})|_{\omega=0} = \delta\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{k},$$

con $|\delta\boldsymbol{p}'| \sim \dfrac{\partial|\boldsymbol{p}'|}{\partial\varepsilon}\,\omega \sim \dfrac{\omega}{v}$ y $|\boldsymbol{k}| = \omega$. En el caso no-relativista ($v \ll 1$) obtenemos, por ello, la condición

---

★ Conviene observar el hecho de que la aparición de una diferencia en esta fórmula es un resultado natural de la invariancia de contraste: la amplitud de reacción no debe cambiar al substituir el 4-vector polarización e por e + const k.

★★ Para deducirla, conviene volver a (95.6) haciendo $p = (\varepsilon, \varepsilon\boldsymbol{v}), pk = \varepsilon\omega(1 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}), \ldots, e = (0, \boldsymbol{e})$ y efectuando de nuevo la suma respecto de las polarizaciones utilizando (45.4a).

$$\frac{\omega}{|\boldsymbol{q}|\,v} \ll 1. \tag{95.9}$$

Dado que, por otra parte, $|\boldsymbol{q}| \sim 1/\rho$ (ρ es el parámetro de impacto) esta condición puede presentarse también en la forma $\omega\tau \ll 1$, donde $\tau \sim \rho/v$ es el tiempo característico de colisión.

En el caso ultrarrelativista, los fotones se emiten fundamentalmente en direcciones próximas a $\boldsymbol{v}$ o a $\boldsymbol{v}'$ [como puede verse por la forma de los denominadores de (95.8)]. Si el ángulo θ de dispersión del electrón es pequeño, las direcciones de los tres vectores $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{n}$ son próximas entre sí. Entonces

$$|\delta\boldsymbol{q}| = |\delta\boldsymbol{p}'| - |\boldsymbol{k}| = \omega\left(\frac{1}{v} - 1\right) \sim \frac{\omega m^2}{\varepsilon^2},$$

y dado que $|\boldsymbol{q}| \sim \varepsilon\theta$, obtenemos la condición

$$\theta \gg \frac{\omega}{\varepsilon}\frac{m^2}{\varepsilon^2}. \tag{95.10}$$

Dado el carácter cuasiclásico de las fórmulas (95.5-8), éstas son válidas para la radiación por partículas cargadas cualesquiera (no necesariamente por electrones, para los cuales han sido deducidas). En el caso general, cuando en la reacción participan varias de tales partículas, la fórmula (95.5) debe escribirse en la forma

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} e\sqrt{4\pi}\sum Z\left(\frac{p'e^*}{p'k} - \frac{pe^*}{pk}\right), \tag{95.11}$$

donde la suma se extiende a todas las partículas (con cargas Ze); de manera análoga se modifican también las fórmulas (95.6-8).

En particular, en el caso no-relativista

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)}\frac{e\sqrt{4\pi}}{\omega}\sum Z(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}^*. \tag{95.12}$$

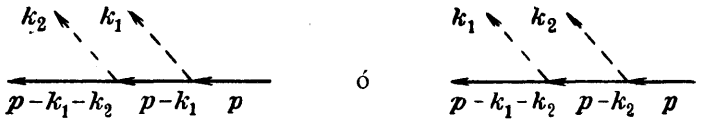
Para dos partículas esta fórmula se escribe

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)}\frac{\sqrt{4\pi}}{\omega}\left(\frac{Z_1 e}{m_1} - \frac{Z_2 e}{m_2}\right)\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{e}^*, \tag{95.13}$$

$$\boldsymbol{q} = m(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}), \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

donde $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}'$ son la velocidad relativa de la partícula antes y después de la colisión.

Los resultados obtenidos se generalizan al caso de radiación simultánea de un cierto número de fotones blandos. Para cada uno de éstos, en la amplitud M_{fi} se añade el correspondiente factor, de la misma forma que el que aparece como factor de $M_{fi}^{(0)}$ en (95.5). Es fácil cerciorarse de que así es directamente, digamos, en el ejemplo de dos fotones. Las líneas de los dos fotones emitidos deben añadirse a líneas exteriores de electrón, precisamente en dos sucesiones diferentes, es decir, el diagrama con una línea exterior p se substituye por dos diagramas con las líneas



Cada uno de ellos contiene un factor (denominadores de los propagadores de electrón)

$$\frac{1}{2(pk_1+pk_2)}\frac{1}{2pk_1} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2(pk_1+pk_2)}\frac{1}{2pk_2}.$$

Su suma es igual a

$$\frac{1}{2pk_1}\frac{1}{2pk_2},$$

es decir, contiene el producto de dos factores independientes que corresponden al primer fotón y al segundo. Hecho esto, en la suma de todos los diagramas los términos se agrupan (en virtud de la invariancia de contraste) en el producto de diferencias

$$\left(\frac{p'e_1^*}{p'k_1}-\frac{pe_1^*}{pk_1}\right)\left(\frac{p'e_2^*}{p'k_2}-\frac{pe_2^*}{pk_2}\right).$$

De acuerdo con la factorización de la amplitud, se descompone también en factores la sección eficaz del proceso. Así, pues, los fotones blandos se emiten independientemente. La sección eficaz de un proceso en el que se emiten n fotones blandos puede representarse en la forma

$$d\sigma = d\sigma_0 dw_1 \ldots dw_n, \tag{95.14}$$

donde $dw_1, dw_2, \ldots$ son las probabilidades de emisión de los fotones $k_1, k_2, \ldots$ por separado. Al integrar esta fórmula en el intervalo de valores finales de las variables (frecuencias y direcciones), que es el mismo para todos los cuantos, hay que introducir el factor $1/n!$ que tiene en cuenta la identidad de los fotones.

Si se integra la sección eficaz de radiación (95.1) respecto de la frecuencia en un cierto intervalo finito desde ω_1 a ω_2, obtendremos una expresión de la forma

$$d\sigma \sim \alpha \ln\frac{\omega_2}{\omega_1} d\sigma_0 \tag{95.15}$$

[cf. (95.8)]. Se supone aquí que ambas frecuencias son pequeñas, de modo que los valores posibles de ω_2 están limitados por la condición de aplicabilidad del método. Con precisión logarítmica, sin embargo, se puede hacer $\omega_2 \sim \varepsilon$, donde ε es la energía inicial de la partícula que radia. Los valores de ω_1, en cambio, no están en modo alguno limitados inferiormente. Pero haciendo tender $\omega_1 \to 0$ resulta que la sección eficaz de radiación de todos los cuantos blandos posibles tiende a infinito. Veamos cuál es el sentido de esta situación — de la llamada *catástrofe en el infrarrojo* — (*F. Bloch, A. Nordsieck*, 1937).

Cuando

$$\alpha \ln \frac{\varepsilon}{\omega_1} \gtrsim 1 \tag{95.16}$$

se tendrá: $d\sigma \gtrsim d\sigma^0$. Pero esto significa que la teoría de perturbaciones no es aplicable, es decir, que es imposible calcular $d\sigma$ como una cantidad de orden de pequeñez más elevado que $d\sigma_0$. En otras palabras, en este caso debe considerarse como parámetro pequeño no α, sino el producto $\alpha \ln (\varepsilon/\omega_1)$.

De esta manera, la deducción de las fórmulas (95.5-8) basada en la teoría de perturbaciones resulta ser incorrecta para frecuencias suficientemente pequeñas. Pór otra parte, la fórmula clásica para la intensidad dI [II (69.4)] es aplicable en grado tanto mayor cuanto menor es ω. Por ello la fórmula (95.1) sigue siendo válida si se modifica un tanto su sentido, orientándolo hacia un carácter más clásico. En (95.1) se supuso precisamente que se emitía un solo fotón; entonces la energía que pierde la partícula al emitirlo coincide con ω y la « sección eficaz de pérdida relativa de energía » viene dada por la expresión $\omega d\sigma/\varepsilon$, o bien

$$d\sigma_0 \frac{dI}{\varepsilon}. \tag{95.17}$$

En realidad, sin embargo, para valores suficientemente pequeños de ω la probabilidad de emisión no es pequeña, y la probabilidad de que se emitan dos y más fotones no es menor, sino mayor que la probabilidad de que se emita un solo fotón. En estas condiciones, la expresión (95.17) conserva su validez, pero la intensidad clásica dI determinará no la probabilidad de que se emita un fotón, sino el número medio de fotones radiados

$$d\bar{n} = \frac{dI}{\omega}, \tag{95.18}$$

o bien, en un intervalo finito de frecuencias,

$$\bar{n} = \int\limits_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \frac{dI}{\omega}. \tag{95.19}$$

Dado que los fotones blandos se emiten con independencia estadística (esto es correcto en todas las aproximaciones de la teoría de perturbaciones), al proceso de emisión múltiple se puede aplicar la fórmula de Poisson: la probabilidad $w(n)$ de que se emitan n fotones se expresa en función del valor medio $\bar{n}$ por la fórmula

$$w(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}. \tag{95.20}$$

Representemos la sección eficaz del proceso de dispersión acompañada de emisión de fotones en la forma

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot w(n). \tag{95.21}$$

Dado que $\sum w(n) = 1$, $d\sigma_0$ es la sección eficaz total de dispersión acompañada de radiación blanda cualquiera. Esta circunstancia es evidente por consideraciones

clásicas; la teoría de perturbaciones, en cambio, ve en $d\sigma_0$ la sección eficaz del proceso de pura dispersión elástica. Pero la teoría de perturbaciones es inaplicable aquí. El hecho es que $d\sigma_0$, calculado según la teoría de perturbaciones como sección eficaz de dispersión elástica, tiene en cuenta en realidad la radiación de un número arbitrario de fotones blandos. En lo que concierne a la sección eficaz de dispersión elástica pura, ésta en realidad resulta igual a cero: cuando $\omega_1 \to 0$, el número medio $\bar{n} \to \infty$ y según (95.20) tiende a cero la probabilidad de emisión de un número cualquiera finito de fotones *

PROBLEMAS**

1. Hallar la distribución espectral de la radiación de frenado de cuantos blandos emitidos por un electrón ultrarrelativista que choca con un núcleo.

Solución. La integración de la fórmula (95.8) respecto de do_k da

$$d\sigma = \alpha K(\xi) \frac{d\omega}{\omega} d\sigma_0, \tag{1}$$

donde

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}} \ln(\xi+\sqrt{\xi^2+1}) - 1\right], \quad \xi = \frac{|\boldsymbol{p}|}{m} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

(p es el impulso y θ el ángulo de dispersión del electrón). En el caso ultrarrelativista el papel más importante lo representa el intervalo de ángulos en que

$$\frac{m^2\omega}{\varepsilon^3} \ll \theta \ll \frac{m}{\varepsilon} \tag{3}$$

[el límite inferior, es la condición (95.10); acerca del límite superior, véase más adelante]. En estas condiciones $\xi \approx \varepsilon\theta/2m \ll 1$, de modo que

$$K(\xi) \approx \frac{8}{3\pi}\xi^2,$$

y la sección eficaz de dispersión elástica del electrón por el núcleo [véase (81.10)] es

$$d\sigma_0 \approx 4Z^2 r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{do}{\theta^4}. \tag{4}$$

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\int \frac{d\theta}{\theta}$$

La integral diverge logarítmicamente; se la corta inferiormente para ángulos $\theta \sim m^2\omega/\varepsilon^3$; el límite superior se fija en $\xi \sim 1$, es decir, para ángulos $\theta \sim m/\varepsilon$ (cuando $\xi \to \infty$

$$K \approx \frac{4}{\pi} \ln \xi,$$

de modo que la integral converge). De esta manera, con precisión logarítmica encontramos

---

* Volveremos a considerar esta situación con mayor detenimiento en la segunda parte de este libro en relación con el estudio de las correcciones por radiación.

** Las aplicaciones de la fórmula (95.7) presentadas a continuación se deben a *V. N. Baier* y *V. M. Galitskii* (1964).

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{\varepsilon^2}{m\omega} \tag{5}$$

de acuerdo con la parte logarítmica de la fórmula (91.17) (en la cual haya que hacer $\varepsilon \approx \varepsilon'$). Es posible alcanzar una precisión no logarítmica únicamente yendo más allá de los límites que fija el carácter cuasiclásico.

2. Para el choque de dos electrones ultrarrelativistas, determinar (en el sistema del centro de masa) la sección eficaz de emisión simultánea de dos fotones blandos, en sentidos opuestos y formando ángulos pequeños con el impulso de los electrones.

Solución. Los fotones que se separan en sentidos opuestos son emitidos por electrones diferentes, cada uno en el sentido de su movimiento. La sección eficaz de emisión simultánea es

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot \alpha K(\xi) \frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdot \alpha K(\xi) \frac{d\omega_2}{\omega_2}, \quad \xi = \frac{\varepsilon}{m} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \tag{6}$$

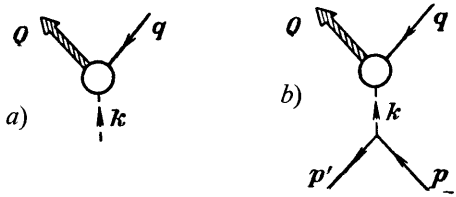
donde ε es la energía de cada uno de los electrones y θ el ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa, el mismo para ambos electrones (dado que los fotones se emiten en sentidos opuestos, no hay necesidad de introducir en la sección eficaz el factor 1/2). La sección eficaz de dispersión elástica de los electrones a ángulos pequeños en el sistema del centro de masa coincide con (4) en el caso ultrarrelativista [cf. (82.11)]. En contraste con (1), la sección eficaz (6) se comporta como $\theta d\theta$ para $\theta \to 0$, de modo que la integral converge. De una parte, esta circunstancia permite llevar la integración hasta $\theta = 0$ (sin preocuparse por la posible violación de la condición de aplicabilidad del método). Por otra parte, la contribución fundamental a la sección eficaz integral se debe ahora a la región en que $\theta \sim m/\varepsilon$ (y no en la que $\theta \ll m/\varepsilon$), de forma que es necesario utilizar la expresión exacta (2). El resultado de la integración de la sección eficaz respecto de los ángulos de dispersión es:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{2}{\pi}\left[5 + \frac{7}{2}\zeta(3)\right] r_e^2 \alpha^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} = 5{,}9\, r_e^2 \alpha^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2}$$

[ζ es la función de Rieman; $\zeta(3) = 1{,}202$].

§ 96. Método de los fotones equivalentes

Comparemos los dos procesos descritos por los diagramas



(96.1)

(los círculos representan por convenio toda la parte interior del diagrama). El diagrama *a*) representa la colisión de un fotón $k(k^2 = 0)$ con cierta partícula cuyo 4-impulso es q (y de masa m; $q^2 = m^2$). Como resultado de la colisión se forma un sistema (una partícula o un grupo de partículas) con 4-impulso total Q. El diagrama *b*) representa la colisión de la misma partícula q con otra partícula, cuyo 4-impulso es p y la masa de la cual es $M(p^2 = M^2)$. Como consecuencia de la colisión esta última partícula adquiere el 4-impulso p' y se forma el mismo sistema Q.

El segundo proceso puede considerarse como colisión de la partícula q con un fotón virtual emitido por la partícula p, fotón cuyo impulso es $k = p - p'$ ($k^2 < 0$). Si además $|k^2|$ es pequeño, el fotón virtual difiere poco de un fotón real. Es evidente que podemos encontrarnos con una situación tal en las colisiones de partículas muy rápidas: el campo electromagnético de una partícula cargada que se mueve con velocidad $v \approx 1$ es casi transversal y, por ello, semejante por sus propiedades al campo de una onda luminosa. En estas condiciones, la sección eficaz del proceso *b*) puede expresarse por medio de la sección eficaz del proceso *a*) *.

Así, pues, consideraremos que la partícula M es ultrarrelativista: su energía (en el sistema de reposo de la partícula m) es $\varepsilon \gg M$. Si las masas m y M de las partículas que chocan son diferentes, para concretar supondremos que es $m < M$.

La amplitud del proceso *a*) (en el que participa un fotón real) se puede representar en la forma

$$M_{fi}^{(r)} = -e\sqrt{4\pi}\,(e_\mu J^\mu), \tag{96.2}$$

donde e_μ es el 4-vector polarización del fotón, y J^μ la corriente de transición que corresponde al vértice (círculo) del diagrama. En cambio, la amplitud del proceso *b*) es

$$M_{fi} = Ze^2\frac{4\pi}{k^2}(j_\mu J^\mu), \tag{96.3}$$

donde j_μ es la corriente de transición de la partícula m (vértice inferior del diagrama); Ze es la carga de esta partícula. La corriente J es función de $k = Q - q$ y, en consecuencia, diferente en un caso y en otro: $k^2 = 0$ en (96.2) y $k^2 \neq 0$ en (96.3). Pero si en el segundo caso se tiene

$$|k^2| \ll m^2, \tag{96.4}$$

también entonces se puede tomar para J el valor correspondiente a $k^2 = 0$.

La variación del impulso de la partícula M cuando se emite el fotón virtual, $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{k}$, es pequeña comparada con su impulso inicial $|\boldsymbol{p}| \approx \varepsilon$; por ello, en la corriente de transición j se puede hacer $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$. En otras palabras, consideramos el movimiento de la partícula M como rectilíneo y uniforme. Dado que este movimiento es cuasiclásico, la correspondiente corriente no depende del spin de la partícula **:

$$j^\mu = 2p^\mu. \tag{96.5}$$

---

* El método que se expone a continuación fue ideado por *K. Weizsäcker, E. J. Williams*, 1934; la idea fundamental de este método había sido expuesta ya antes por *E. Fermi*, 1924.

** En la normalización de las funciones de onda a razón de una partícula por unidad de volumen, la corriente es $j^\mu = (1, \boldsymbol{v})$, donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad. Pero convinimos (§ 65) en prescindir en las funciones de onda del factor de normalización $1/\sqrt{2\varepsilon}$. De acuerdo con esto, es necesario introducir en j^μ un factor suplementario 2ε, con lo que pasamos a la expresión (96.5).

La condición de transversalidad de la corriente ($jk = 0$) da ahora $\varepsilon\omega - p_x k_x = 0$, donde el eje x se ha elegido en la dirección de $\boldsymbol{p}$. De aquí se sigue

$$\omega = v k_x, \tag{96.6}$$

donde $v = p_x/\varepsilon$ es la velocidad de la partícula M. Dado que

$$-k^2 = -\omega^2 + k_x^2 + \boldsymbol{k}_\perp^2 \approx \omega^2(1 - v^2) + \boldsymbol{k}_\perp^2 \tag{96.7}$$

($\boldsymbol{k}_\perp$ es el componente del vector $\boldsymbol{k}$ perpendicular al eje x), la condición (96.4) es equivalente a la desigualdad $|\boldsymbol{k}_\perp| \ll m$ y a la desigualdad considerablemente más débil para ω: $\omega \ll m/\sqrt{1 - v^2}$.

Además, de la condición de transversalidad de la corriente J ($Jk = 0$), se sigue utilizando (96.6),

$$J_0 = \frac{J_x}{v} + \frac{\boldsymbol{J}_\perp \cdot \boldsymbol{k}_\perp}{\omega}.$$

Por lo tanto, para el producto escalar jJ se obtendrá

$$jJ = 2(J_0\varepsilon - J_x p_x) \approx 2\frac{\varepsilon}{\omega}\left(\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{J}_\perp + \frac{\omega M^2}{\varepsilon^2} J_x\right). \tag{96.8}$$

En cuanto al producto Je en (96.2), escribámoslo explícitamente eligiendo el 4-vector polarización del fotón real en el contraste transversal en tres dimensiones: $ek = -\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{k} = 0$, de donde $e_x \approx -\boldsymbol{e}_\perp \cdot \boldsymbol{k}_\perp/\omega$. Entonces

$$Je = -\boldsymbol{e}_\perp \cdot \left(\boldsymbol{J}_\perp - \frac{\boldsymbol{k}_\perp}{\omega} J_x\right). \tag{96.9}$$

Comparemos las expresiones (96.8) y (96.9). Éstas resultarán proporcionales una a otra si es posible prescindir de los segundos términos en los paréntesis. Dado que la corriente J corresponde al nudo superior del diagrama (96.16), no está ligada con la dirección de $\boldsymbol{p}$; por lo tanto, J_x y $J_\perp$ se han de considerar como cantidades del mismo orden. En consecuencia, el que sea admisible prescindir de aquellos términos exige que se cumplan las condiciones $|\boldsymbol{k}_\perp| \ll \omega$ y $\omega \ll \varepsilon^2 |\boldsymbol{k}_\perp|/M^2$; éstas no están en contradicción con las condiciones anteriores, ya impuestas a $\boldsymbol{k}_\perp$ y ω.

Admitiendo que en (96.9) el fotón está polarizado en el plano x, $\boldsymbol{k}$ (de modo que $\boldsymbol{e}_\perp \| \boldsymbol{k}_\perp$) y observando que, en virtud de las condiciones impuestas, es $\boldsymbol{e}^2{}_\perp \approx \boldsymbol{e}^2 = 1$, obtendremos ahora

$$M_{fi} = M_{fi}^{(r)} \frac{Ze\sqrt{4\pi}}{-k^2} \frac{2\varepsilon}{\omega} |\boldsymbol{k}_\perp|. \tag{96.10}$$

De acuerdo con lo dicho antes, se supone en todo eso que quedan satisfechas las condiciones

$$|\boldsymbol{k}_\perp| \ll \omega \ll m\gamma, \tag{96.11}$$

$$\frac{\omega}{\gamma^2} \ll |\boldsymbol{k}_\perp| \ll m, \tag{96.12}$$

donde para abreviar se ha hecho

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{M} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

A partir de aquí es posible hallar la relación entre las correspondientes secciones eficaces. Según la fórmula general (65.18), tenemos (en el sistema de reposo de la partícula m)

$$d\sigma_r = |M_{fi}^{(r)}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{4m\omega} d\rho_Q,$$

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{4m\varepsilon} \frac{d^3p'}{2\varepsilon(2\pi)^3} d\rho_Q,$$

donde $d\rho_Q$ es el peso estadístico de la partícula Q. Utilizando (96.10) y (96.7) obtendremos

$$d\sigma = d\sigma_r \cdot n(\boldsymbol{k})\, d^3p', \tag{96.13}$$

donde

$$n(\boldsymbol{k}) = \frac{Z^2e^2}{\pi^2} \frac{\boldsymbol{k}_\perp^2}{\omega\left(\boldsymbol{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2}. \tag{96.14}$$

Recordaremos que $d\sigma_r$ es la sección eficaz del proceso *a*) provocado por la colisión de un fotón real con una partícula en reposo, colisión en la que se forma el sistema de partículas Q en determinados intervalos para sus impulsos. En cambio, la sección eficaz $d\sigma$ se refiere al proceso *b*) de formación del mismo sistema Q en la colisión de una partícula rápida (de masa M) con la misma partícula en reposo, colisión en la que la partícula rápida pierde el impulso $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{k}$ quedando en el intervalo d^3p' de valores de $\boldsymbol{p}'$. El factor $n(\boldsymbol{k})$ en (96.13) se puede interpretar como densidad (en el espacio-k) del número de fotones al que es equivalente el campo electromagnético de la partícula rápida.

Integrar con relación a d^3p' es lo mismo que integrar respecto de $d^3k = d\omega d^2k_\perp$. Efectuando la integración respecto de $d^2k_\perp$, obtendremos la sección eficaz del proceso en que la energía total E del sistema de partículas Q se encuentra en el intervalo dado $dE = d\omega$ ($E - m = \varepsilon - \varepsilon' = \omega$, donde ε y ε' son las energías inicial y final de la partícula M). Integrar con relación a las direcciones de $\boldsymbol{k}_\perp$ significa promediar respecto de las direcciones de la polarización del fotón incidente (junto con la multiplicación por 2π). Hecho esto se obtiene

$$d\sigma = n(\omega)\, d\sigma_r d\omega, \tag{96.15}$$

donde

$$n(\omega) = \int n(\boldsymbol{k})\, 2\pi k_\perp dk_\perp = \frac{2Z^2e^2}{\pi\omega} \int \frac{k_\perp^3\, dk_\perp}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2}.$$

La integral respecto de $dk_\perp$ diverge para grandes valores de $k_\perp$. Sin embargo, la divergencia es tan solo logarítmica. Esta circunstancia permite (dentro de los límites de aplicabilidad del método expuesto) obtener el resultado en la aproximación logarítmica: se supone que no sólo es grande el argumento del logaritmo, sino también el propio logaritmo. Con esta precisión, basta tomar para el límite superior de integración $k_{\perp\max} \sim m$, es decir, el límite superior de la desigualdad (96.12). Efectuando la integración, obtendremos para la distribución espectral de los fotones equivalentes (en unidades ordinarias)

$$n(\omega)\, d\omega = \frac{2}{\pi} Z\alpha \ln \frac{\gamma mc^2}{\hbar\omega} \frac{d\omega}{\omega}. \tag{96.16}$$

La aproximación adoptada implica que queda sin determinar el coeficiente numérico del argumento del logaritmo: la introducción de dicho coeficiente significaría sumar a un logaritmo que es grande una cantidad relativamente pequeña (~ 1) y representaría un aumento de la precisión admitida.

PROBLEMAS

1. Hallar la sección eficaz de radiación de frenado en la colisión de un electrón con un núcleo partiendo de la sección eficaz de dispersión de fotones por un electrón.

Solución. En el sistema de referencia K_1 en el que el electrón se encuentra en reposo antes del choque, el proceso se puede considerar como dispersión de los fotones equivalentes al campo del núcleo por el electrón*. Según (86.10) la sección eficaz de dispersión del fotón por el electrón en el sistema K_1 es

$$d\sigma_{\text{dis}}\,(\omega_1,\ \omega_1') = \pi r_e^2 \frac{m\, d\omega_1'}{\omega_1^2}\left[\frac{\omega_1}{\omega_1'} + \frac{\omega_1'}{\omega_1} + \left(\frac{m}{\omega_1'} - \frac{m}{\omega_1}\right)^2 - 2m\left(\frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1}\right)\right], \tag{1}$$

donde ω_1 y ω_1' son las energías inicial y final del fotón en este sistema. La sección eficaz de radiación de frenado en el sistema K_1 se escribe

$$d\sigma_{\text{rad}}(\omega_1') = \int d\omega_1 \cdot n(\omega_1)\, d\sigma_{\text{dis}}\,(\omega_1,\ \omega_1'), \tag{2}$$

donde $n(\omega_1)$ es la función (96.16). Dada la invariancia de la sección eficaz, el paso al sistema de referencia K en el que se encuentra en reposo el núcleo se reduce a un cambio de la frecuencia ω_1'. Las frecuencias ω_1' y ω' en los sistemas K_1 y K están ligadas por la fórmula de Lorentz

$$\omega' = \gamma\omega_1'(1 - v\cos\theta_1), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{3}$$

donde θ_1 es el ángulo de dispersión en el sistema K_1. Este mismo ángulo liga entre sí ω_1' y ω_1 de acuerdo con (86.8):

$$\frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta_1). \tag{4}$$

De (3) y (4) se deduce

$$\omega_1' = \omega_1 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \tag{5}$$

* En cambio, se excluye la dispersión de los fotones virtuales por el núcleo (en el sistema de reposo de éste) debido a la gran masa del mismo: la sección eficaz de dispersión tiende a cero al tender a infinito la masa de la partícula que dispersa.

donde $\varepsilon = m\gamma$ y ε' son las energías inicial y final del electrón en el sistema $K(\varepsilon - \varepsilon' = \omega')$. Substituyendo (5) en (1) se obtendrá

$$d\sigma_{\text{dis}} = \pi r_e^2 \frac{m\, d\omega'}{\varepsilon\omega_1}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{m^2\omega'^2}{\varepsilon'^2\omega_1^2} - \frac{2m\omega'}{\omega_1\varepsilon'}\right).$$

Esta expresión hay que substituirla en (2) e integrar respecto de $d\omega_1$ para ω' dado (es decir, ε' dada) entre los límites

$$\omega_{1\,\max} = \frac{2\varepsilon\omega'}{m}, \quad \omega_{1\,\min} = \frac{m\omega'}{2\varepsilon'}$$

[estos valores se obtienen de (3) — (4) para $\theta_1 = 0$ y $\theta_1 = \pi$]. Dada la rápida convergencia de la integral para grandes valores de ω_1, la mayor contribución a la misma procede de la región de valores de ω_1 próximos al límite inferior (es decir, se puede hacer $\omega_{1\max} \to \infty$). Calculando la integral con precisión logarítmica★, se obtiene

$$d\sigma_{\text{rad}} = 4r_e^2\alpha Z \frac{d\omega'}{\omega'}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\right)\ln\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega'}.$$

Para que este resultado sea correcto, junto con la condición $\varepsilon \gg m$ (electrón ultrarrelativista) debe quedar satisfecha la condición (96.11): las frecuencias $\omega_1 \sim \omega_{1\min}$ que importan en la integración deben ser $\ll \varepsilon$. De aquí se sigue $\varepsilon - \varepsilon' = \omega' \ll \varepsilon\varepsilon'/m$. En estas condiciones, el resultado obtenido, como debía ser, coincide con (91.17) dentro de la precisión logarítmica.

2. Lo mismo para la radiación de frenado de un electrón por un electrón.

Solución. En este caso el fotón virtual puede ser dispersado bien por el electrón rápido, bien por el electrón de retroceso; los fotones equivalentes al campo de un electrón son dispersados por el otro, y recíprocamente. La dispersión de fotones virtuales por un electrón rápido da la sección eficaz $d\sigma_{\text{rad}}^{(1)}$ que coincide con la sección eficaz de radiación del electrón que choca con un núcleo para el que $Z = 1$.

La dispersión de los fotones virtuales por el electrón de retroceso, en cambio, da la sección eficaz de radiación

$$d\sigma_{\text{rad}}^{(2)} = \int d\omega \cdot n(\omega)\, d\sigma_{\text{dis}}(\omega, \omega')$$

donde $d\sigma_{\text{dis}}(\omega, \omega')$ viene dada por (1) (con el correspondiente cambio en la manera de designar las frecuencias). En el intervalo de valores que toma ω para ω' dado, tenemos [cf. (4)]

$$\omega' \leqslant \omega \leqslant \infty \quad \text{para} \quad \omega' > \frac{m}{2};$$

$$\omega' \leqslant \omega \leqslant \frac{\omega'}{m - 2\omega'} \quad \text{para} \quad \omega' < \frac{m}{2}.$$

Cuando $\omega' < m/2$ la integración respecto de $d\omega$ da

$$d\sigma_{\text{rad}}^{(2)} = \frac{16}{3}\alpha r_e^2 \frac{d\omega'}{\omega'}\left(1 - \frac{\omega'}{m} + \frac{\omega'^2}{m^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{\omega'}$$

de acuerdo con (94.4). Pero si $\omega' > m/2$, hay que distinguir los casos $\omega' \sim m$ y $\omega' \sim \varepsilon \gg m$. En el primero de ellos se obtiene

$$d\sigma_{\text{rad}}^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha r_e^2 \frac{m\, d\omega'}{\omega'^2}\left(4 - \frac{m}{\omega'} + \frac{m^2}{4\omega'^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{m}$$

de acuerdo con (94.3) (en el argumento del logaritmo hemos substituido ε/ω' por ε/m, manteniéndonos dentro de la precisión exigida). En cambio, cuando $\omega' \sim \varepsilon$ el método de los fotones equi-

★ Esto significa que mediante una sola integración por partes se separa el término que contiene el logaritmo, que es grande, y se prescinde de los demás términos. Esta operación se reduce a sacar fuera del símbolo de integral el logaritmo $\ln(\varepsilon/\omega_1)$ para el valor $\omega_1 = \omega_{1\min}$.

valentes es, en general, implicable para el cálculo de $d\sigma_{\text{rad}}^{(2)}$. La frecuencia de los fotones virtuales ω toma valores a partir de ω' y cuando $\omega = \omega' \sim \varepsilon$, por consiguiente, no se cumple la condición (96.11).

3. Determinar la sección eficaz total de formación de un par en el choque de un fotón con un núcleo partiendo de la sección eficaz de formación de un par en la colisión de dos fotones.

Solución. La energía del fotón en el sistema de reposo del núcleo (sistema K) es $\omega = m\gamma$, $\gamma \gg 1$. Pasemos al sistema de referencia K_0 en el que el núcleo se mueve hacia el fotón con velocidad v_0 tal que

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} = \frac{\gamma}{2}.$$

En este sistema la energía del fotón vale

$$\omega_0 = \omega \frac{1-v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} \approx \frac{\omega}{2}\sqrt{1-v_0^2} = m.$$

La sección eficaz buscada σ se calcula en el sistema K_0 como sección eficaz de formación de un par en las colisiones del fotón incidente ω_0 con los fotones equivalentes del núcleo, cuya energía designaremos por ω':

$$\sigma = \int \sigma_{\gamma\gamma} n(\omega')\, d\omega',$$

donde $\sigma_{\gamma\gamma}$ es la sección eficaz de formación de un par por dos fotones; ésta viene dada por la fórmula (1) obtenida en el problema del § 88, fórmula en la que hay que hacer

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0 \omega'}} = \sqrt{1 - \frac{m}{\omega'}}.$$

Pasando de la variable ω' a la variable v, tenemos

$$\sigma = 2r_e^2 \alpha Z \int_0^1 v \ln\left[\gamma(1-v^2)\right] \left\{(3-v^4)\ln\frac{1+v}{1-v} - 2v(2-v^2)\right\} dv.$$

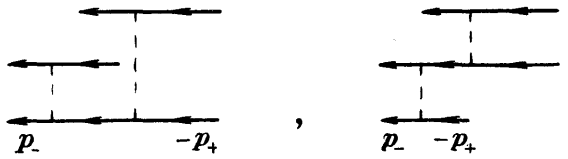
Si se tiene en cuenta la convergencia de la integral en el límite superior, la integración se extiende a todo el intervalo desde el umbral de la reacción $\omega' = m$ ($v = 0$) hasta $\omega' = \infty$ ($v = 1$) y se efectúa con precisión logarítmica (es decir, el logaritmo $\ln[\gamma(1-v^2)]$ se substituye por su valor en $v = 0$ y se saca fuera del signo de integral). En definitiva obtendremos

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 r_e^2 \ln\gamma$$

de acuerdo con (92.8); la fórmula es correcta para $\ln\gamma \gg 1$.

§ 97. Formación de pares en las colisiones de partículas

La formación de un par electrón-positón en la colisión de dos partículas cargadas se representa por diagramas de dos tipos:



a) b) (97.1)

Las dos líneas de trazo continuo superiores corresponden a las partículas que chocan, la inferior, al par que se crea.

Consideremos en el caso ultrarrelativista el choque de dos partículas pesadas (de dos núcleos). Se puede prescindir del cambio de estado de movimiento de las propias partículas en un tal choque, es decir, cabe considerarlas como fuentes de un campo exterior. A esto corresponden dos diagramas del primer tipo

(97.2)

donde $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ son los « impulsos » componente de Fourier de los campos de las dos partículas.

La sección eficaz de formación de un par se puede determinar en este caso siguiendo el método de los fotones equivalentes y partiendo de la sección eficaz de formación de un par por un fotón que choca con un núcleo, que ya conocemos. La substitución del campo de una de las partículas (digamos, de la primera) por el espectro de fotones equivalentes significa que en los diagramas (97.2) las líneas $q^{(1)}$ se consideran como líneas de fotones reales. El conjunto de estos diagramas pasa entonces a coincidir con el conjunto de diagramas correspondientes a la formación de un par por un fotón que choca con el núcleo 2. Cuando ε_+, $\varepsilon_- \gg m$, la sección eficaz de este último proceso viene dada por la fórmula (92.7). Multiplicando esta expresión por el espectro (96.16) de los fotones equivalentes del primer núcleo, obtendremos (con precisión logarítmica) la sección eficaz diferencial de formación de un par en el choque de las partículas:

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \frac{d\varepsilon_+ d\varepsilon_-}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^4} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right) \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \ln \frac{m\gamma}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}, \tag{97.3}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2} \gg 1$.

Se ha supuesto aquí que

$$m \ll \varepsilon_+, \ \varepsilon_- \ll m\gamma; \tag{97.4}$$

la desigualdad anterior es la condición de aplicabilidad del método de los fotones equivalentes. Al mismo tiempo la región determinada por las desigualdades (97.4) coincide con el intervalo de valores de las energías del electrón y del positón que más cuentan en la integración de la expresión (97.3). Al integrar respecto de $d\varepsilon_+$ o de $d\varepsilon_-$ para un valor dado de la suma $\varepsilon \equiv \varepsilon_+ + \varepsilon_- (\gg m)$, es esencial la región próxima al límite superior; prescindiendo de los términos que no contienen el logaritmo, que es grande, se obtendrá

$$d\sigma = \frac{56}{9\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln\frac{\varepsilon}{m} \ln\frac{m\gamma}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

La integral respecto de $d\varepsilon$ extendida al dominio (97.4) diverge como el cubo del logaritmo y en las fronteras del mismo tan sólo como el cuadrado del mismo. En la aproximación logarítmica ($\ln \gamma \gg 1$), por consiguiente, la región (97.4) es, efectivamente, la fundamental y cabe extender la integral entre los límites m y $m\gamma$. Se tiene

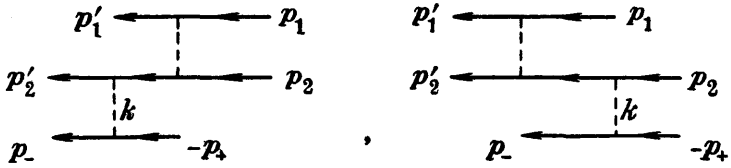
$$\int_1^\gamma \ln \xi \,(\ln \gamma - \ln \xi)\, \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{6} \ln^3 \gamma,$$

de modo que la sección eficaz total de formación de un par es

$$\sigma = \frac{28}{27\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln^3 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{97.5}$$

(*L. D. Landau, E. M. Lifshits*, 1934).

Consideremos ahora el caso en que las velocidades de los núcleos que chocan son no-relativistas. En este caso pasa a cobrar importancia la variación en el movimiento de los núcleos bajo la influencia de su interacción y la contribución fundamental a la sección eficaz de formación de un par la proporcionan los diagramas del segundo tipo en (97.1). Cuatro son los diagramas que se tienen del mismo: los dos diagramas



(97.6)

y otros dos más, análogos, en los que el fotón virtual k (que crea al par) se emite no por el segundo núcleo, sino por el primero *

Supondremos que la energía del par es pequeña comparada con la energía cinética del movimiento relativo de los núcleos en el sistema de su centro de masa:

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- \ll \frac{Mv^2}{2} \tag{97.7}$$

[v es la velocidad relativa inicial, y $M = M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ es la masa reducida de los núcleos]. Es entonces posible prescindir de la influencia de la formación del par sobre el movimiento de los núcleos. Si en los diagramas (97.6) se suprime la línea electrón-positón, las partes que quedan representarán la emisión de un fotón virtual de baja frecuencia ($\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-$) por las partículas que chocan. Volvemos así a la situación considerada en el § 95 correspondiente a la emisión de un fotón

* Obsérvese que a la formación de un par en la colisión de dos electrones corresponden en total 36 diagramas: 2! 3! = 12 diagramas del tipo *a*), que se obtienen uno de otro permutando dos electrones iniciales y tres finales, más 2·2! 3! = 24 diagramas del tipo *b*) que resultan de la misma manera a partir de los dos diagramas (97.6).

real blando y podemos utilizar la fórmula (95.13) obtenida allí para el caso no-relativista (con la diferencia de que en vez de la amplitud $\sqrt{4\pi}\,e^*$ del fotón real aparecerá el propagador del fotón virtual*). De esta manera, la amplitud de todo el proceso de creación del par se escribirá en la forma

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} \frac{1}{\omega}\left(\frac{Z_1 e}{M_1} - \frac{Z_2 e}{M_2}\right) q^\lambda D_{\lambda\mu}(k)\,[-ie(\bar{u}_-\gamma^\mu u_+)], \tag{97.8}$$

donde $q = (0, \boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{q} = M(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})$.

Como de ordinario, en el caso no-relativista el propagador de fotón hay que elegirlo de acuerdo con el contraste (77.14). Según la amplitud (97.8), se encuentra para la sección eficaz del proceso:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{dis}} \cdot e^4\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \frac{d^3p_+ d^3p_-}{2\varepsilon_+ 2\varepsilon_- (2\pi)^6 \omega^2 (\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)^2}(4\pi)^2\,|\,\bar{u}_-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{Q}u_+\,|^2, \tag{97.9}$$

donde

$$\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-,\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_-,\ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} - \frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k});$$

$d\sigma_{\text{dis}}$ es la sección eficaz de dispersión elástica de un núcleo por el otro (en el sistema de su centro de masa). Esta sección eficaz viene dada por la fórmula de Rutherford**

$$d\sigma_{\text{dis}} = 4(Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{M^2 do}{q^4} \approx 4(Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{dq_y dq_z}{v^2 q^4} \tag{97.10}$$

(la última igualdad supone que los núcleos se desvían muy poco respecto de la dirección inicial del movimiento, el eje x). Substituyendo esta expresión en (97.9) y efectuando de la manera ordinaria la suma respecto de las polarizaciones del par, obtendremos

$$d\sigma = (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \mathrm{Tr}\,\{(\hat{p}_- + m)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{Q})(\hat{p}_+ - m)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{Q})\} \times \\ \times \frac{d^3p_+ d^3p_- dq_y dq_z}{4\pi^4 \varepsilon_+ \varepsilon_- q^4 (\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)^2 \omega^2}. \tag{97.11}$$

A partir de aquí el cálculo se efectúa en la aproximación en la que todos los logaritmos que resultan de la integración se consideran cantidades grandes. Veremos que con esta precisión el papel fundamental lo representan las energías del par ε_+, $\varepsilon_- \gg m$ y los ángulos θ entre $\boldsymbol{p}_+$ y $\boldsymbol{p}_-$ tales que

---

* En el caso no-relativista el impulso del fotón es pequeño comparado con la variación del impulso de las partículas que radian ($|\delta\boldsymbol{p}| \sim \omega/v$) y, por ello, se puede prescindir del mismo (en comparación con $\delta\boldsymbol{p}$) incluso allí donde no se prescinde de la energía del fotón. En el presente caso, esto se refiere sobre todo al fotón virtual, para el cual el cuadrado cuadridimensional $k^2 = (p_+ + p_-)^2 > 0$, de modo que $|\boldsymbol{k}| < \omega$. La diferencia entre un fotón real y uno virtual se desvanece en estas condiciones, con lo cual queda justificada la utilización de la fórmula (95.15).

** Los diagramas (97.6) se han representado en el supuesto de que la aproximación de Born es válida para la dispersión de los núcleos. Sin embargo, dado que la fórmula de Rutherford es exacta (para la interacción coulombiana), el que los resultados obtenidos sean correctos no exige, en realidad, que se cumpla la condición de aplicabilidad de dicha aproximación.

$$\frac{m}{\varepsilon} \ll \theta \ll 1. \tag{97.12}$$

El cálculo de la traza en (97.11), prescindiendo de los términos que corresponde, da

$$\mathrm{Tr}\{\ldots\} = 16\left[(\varepsilon_+\varepsilon_- - \boldsymbol{p}_+\cdot\boldsymbol{p}_-)\left(\boldsymbol{q}^2 - \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{\omega^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 2(\boldsymbol{p}_+\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}_-\cdot\boldsymbol{q}) + \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^2}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2 - \frac{2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega}(\varepsilon_+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}_- + \varepsilon_-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}_+)\right],$$

pudiéndose además hacer $|\boldsymbol{p}_+| = \varepsilon_+$, $|\boldsymbol{p}_-| = \varepsilon$. En el denominador, en cambio,

$$\omega^2 - \boldsymbol{k}^2 \approx \varepsilon_+\varepsilon_-\theta^2 + m^2\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}.$$

Efectuando la integración respecto de las direcciones de $\boldsymbol{p}_+$ y $\boldsymbol{p}_-$ para un valor dado del ángulo formado por ellos, se obtendrá

$$d\sigma = \frac{32}{3\pi^2}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2)\,d\varepsilon_+\,d\varepsilon_- \times$$
$$\times \frac{\theta^3 d\theta}{\left[\theta^2 + \dfrac{m^2(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}\right]^2}\frac{dq_y dq_z}{\boldsymbol{q}^2}. \tag{97.13}$$

La forma de la dependencia con relación a θ confirma la hipótesis (97.12), y la integración respecto de $d\theta$ da $\ln\dfrac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}$. En cuanto a la integración del último factor en (97.13), ésta se efectúa entre los límites $q_y = q_z = 0$ y $\sqrt{q_y^2 + q_z^2} \sim 1/R$, donde R es una cantidad del orden del radio del núcleo (este valor corresponde a los parámetros de impacto mínimos, véase más adelante); esta integración da

$$\pi\ln(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\,|\approx 2\pi\ln\frac{1}{Rq_x}.$$

Por otra parte, la energía total del par, igual a la variación de energía de los núcleos, es

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_+ + \varepsilon_-) = \frac{M}{2}(\boldsymbol{v}'^2 - \boldsymbol{v}^2) \approx Mv(v_x' - v_x) = vq_x,$$

de donde $q_x = \varepsilon/v$. De esta manera se encuentra que

$$d\sigma = \frac{64}{3\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2} - \frac{Z_1}{M_1}\right)^2\frac{\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2}{\varepsilon^4}\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\varepsilon}\,d\varepsilon_+ d\varepsilon_-,$$

y después de integrar respecto de $d\varepsilon_+$ y de $d\varepsilon_-$ para un valor dado de la suma ε:

$$d\sigma = \frac{2^7}{9\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^3}\left(\frac{Z_2}{M_2} - \frac{Z_1}{M_1}\right)^2\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon}{m}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{97.14}$$

La energía ε puede expresarse mediante el parámetro de impacto $\rho \sim v/\varepsilon$ (la energía del par es del orden de magnitud de la frecuencia que corresponde al tiempo de colisión). Por ello, la divergencia logarítmica al integrar respecto de $d\varepsilon$ en (97.14) trae consigo la misma divergencia respecto de los parámetros de impacto. Esto significa que lo que cuentan son los grandes valores de ρ [con ello, a la vez, queda justificado el uso de la sección eficaz de dispersión (97.10) en el campo puramente coulombiano del núcleo]. De acuerdo con esto, la región de energías que más influye es tal que $m \ll \varepsilon \ll v/R$. La integral de (97.14) da la sección eficaz total de formación de un par; en definitiva se obtiene (en unidades ordinarias)

$$\sigma = \frac{64}{27\pi}(Z_1 Z_2 \alpha)^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left(\frac{Z_2 m}{M_2} - \frac{Z_1 m}{M_1}\right)^2 \ln^3 \frac{\hbar v}{mc^2 R} \tag{97.15}$$

(*E. M. Lifshits*, 1935).

PROBLEMA

Escribir la expresión de la sección eficaz de formación de un par en la colisión de dos núcleos rápidos que corresponde a los diagramas (97.2).

Solución. La amplitud de reacción es

$$M_{fi} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_-) \hat{A}^{(1)}(p_- - p) G(p) \hat{A}^{(2)}(p_+ + p) u(-p_+) + (1 \longleftrightarrow 2),$$

donde $A^{(1)}(q)$, $A^{(2)}(q)$ son los campos exteriores creados por el primer núcleo y por el segundo; el término que no se ha escrito se obtiene a partir del primero permutando los números que caracterizan a los núcleos.

El potencial $A^\mu = (A_0, \boldsymbol{A})$ creado por una partícula clásica que se mueve uniformemente con velocidad $\boldsymbol{v}$ satisface las ecuaciones

$$\Box A_0 = -4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t - \boldsymbol{r}_0),$$
$$\Box \boldsymbol{A} = -4\pi Ze\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t - \boldsymbol{r}_0).$$

Sus componentes de Fourier son

$$A_0(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{8\pi^2 Ze}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0} \delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}),$$

y análogamente para $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, \omega)$. En forma cuadridimensional

$$A^\mu(q) = -\frac{8\pi^2 Ze}{q^2} e^{iqx_0} U^\mu \delta(Uq),$$

donde U es la 4-velocidad de la partícula y $x_0 = (0, \boldsymbol{r}_0)$. Si el núcleo *1* se encuentra en reposo en el origen de coordenadas ($\boldsymbol{r}_0^{(1)} = 0$), $\rho \equiv \boldsymbol{r}_0^{(2)}$ es el vector correspondiente al parámetro de impacto (en el plano perpendicular a la dirección del movimiento del núcleo *2*).

La amplitud es ahora

$$M_{fi} = 4Z_1 Z_2 e^4 \bar{u}(p_-) Qu(-p_+),$$
$$Q = \hat{U}^{(1)}(\hat{I} + I_m)\hat{u}^{(2)} + \hat{U}^{(2)}(\hat{I}' + I'_m)\hat{U}^{(1)},$$
$$\bar{Q} = \hat{U}^{(2)}(\hat{I}^* + I_m^*)\hat{u}^{(1)} + \hat{U}^{(1)}(\hat{I}'^* + I_m'^*)\hat{U}^{(2)},$$

donde I, I' son las integrales 4-vectoriales

$$I = \int p \frac{e^{-i(p_+ + p)\rho}\, \delta[U^{(1)}(p_- - p)]\, \delta[U^{(2)}(p_+ + p)]}{(p_- - p)^2 (p^2 + m^2)(p_+ + p)^2} d^4p,$$

$$I' = \int p \frac{e^{-i(p_- - p)\rho}\, \delta[U^{(1)}(p_+ + p)]\, \delta[U^{(2)}(p_- - p)]}{(p_- - p)^2 (p^2 + m^2)(p_+ + p)^2} d^4p,$$

e I_m, I'_m se obtienen substituyendo en el integrando p por m.

La probabilidad de que se forme un par en la colisión con un parámetro de impacto dado es

$$dw = \frac{|M_{fi}|^2}{2\varepsilon_+ 2\varepsilon_-} \frac{d^3p_+}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_-}{(2\pi)^3},$$

y después de sumar respecto de las polarizaciones del par se obtiene

$$dw = \frac{(Z_1 Z_2 e^4)^2}{(2\pi)^4 \varepsilon_+ \varepsilon_-} \operatorname{Tr}\{(\hat{p}_- + m) Q (\hat{p}_+ - m) \bar{Q}\}\, d^3p_+ d^3p_-.$$

En cuanto a la sección eficaz, ésta se obtiene integrando dw respecto de $d^2\rho$ *.

§ 98. Emisión de un fotón por un electrón en el campo de una onda electromagnética intensa

La aplicabilidad de la teoría de perturbaciones a los procesos de interacción de un electrón con el campo de radiación supone, no sólo que la constante de interacción α sea pequeña, sino también que dicho campo sea suficientemente débil. Si a es la amplitud del 4-potencial clásico del campo de la onda electromagnética, una cantidad característica en este sentido lo es la razón invariante sin dimensiones

$$\xi = \frac{e\sqrt{-a^2}}{m}. \tag{98.1}$$

En este párrafo estudiaremos los procesos de radiación que se producen en la interacción de un electrón con el campo de una onda electromagnética intensa, para la cual ξ puede tener un valor cualquiera. El método aplicado se basa en tener en cuenta esta interacción de manera exacta; en cambio, la interacción del electrón con los nuevos fotones emitidos se puede considerar, al igual que antes, como una pequeña perturbación **.

Consideremos una onda plana monocromática, que, para concretar, supondremos polarizada circularmente. Su 4-potencial lo escribiremos en la forma

$$A = a_1 \cos\varphi + a_2 \operatorname{sen}\varphi, \qquad \varphi = kx, \tag{98.2}$$

donde $k^\mu = (\omega, \boldsymbol{k})$ es el 4-vector de la onda ($k^2 = 0$) y las 4-amplitudes a_1 y a_2 son iguales en módulo y ortogonales entre sí:

---

* Cómo realizar los cálculos puede verse en L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITS, Phys. Zs. Sowjet, **6**, 244 (1934).

** Un análisis sistemático de los diferentes procesos cuánticos en el campo de una intensa onda electromagnética plana se presenta en los trabajos siguientes: A. I. NIKISHOV, V. I. RITUS, Zh ETF **46**, 776, 1 768 (1964); **47**, 1 130 (1964); **52**, 1 707 (1967); L. B. NAROZHNYI, A. I. NIKISHOV, V. I. RITUS, Zh ETF **47**, 930 (1964). En estos trabajos (que seguimos en nuestra exposición) se consideran, en particular, la radiación de un fotón y la formación de pares en el campo de la onda plana con diferentes polarizaciones.

$$a_1^2 = a_2^2 \equiv a^2, \quad a_1 a_2 = 0.$$

Supondremos que el potencial se ajusta al contraste que fija la condición de Lorentz, de modo que $a_1 k = a_2 k = 0$.

La función de onda exacta del electrón en el campo de una onda electromagnética plana cualquiera se encontró en el § 40 y viene dada por las fórmulas (40.7-8). Cambiaremos, sin embargo, su normalización: impondremos la condición de que ψ_p corresponda a una densidad espacial media del número de partículas igual a la unidad, de manera análoga a como normalizamos las funciones de onda de las partículas libres a razón de « una partícula por unidad de volumen ». Dado que para la función (40.7) la densidad media es igual a $\bar{J}_0 = q_0/p_0$, para conseguir la normalización impuesta hay que multiplicarla por $\sqrt{p_0/q_0}$, es decir, en (40.7) hay que substituir el factor $1/\sqrt{2p_0}$ por $1/\sqrt{2q_0}$. Para una onda con el 4-potencial (98.2) obtendremos

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e}{2(kp)} (\hat{k}\hat{a}_1 \cos\varphi + \hat{k}\hat{a}_2 \operatorname{sen}\varphi)\right] \frac{u(p)}{\sqrt{2q_0}} \times$$

$$\times \exp\left\{-ie\frac{(a_1 p)}{(kp)} \operatorname{sen}\varphi + ie\frac{(a_2 p)}{(kp)} \cos\varphi - iqx\right\}, \quad (98.3)$$

donde

$$q^\mu = p^\mu - e^2 \frac{a^2}{2(kp)} k^\mu. \quad (98.4)$$

Según (40.14) el 4-vector q es el 4-impulso cinético medio del electrón; lo llamaremos cuasi-impulso.

El elemento de matriz S para la transición del electrón del estado ψ_p al estado $\psi_{p'}$ acompañada de emisión de un fotón con 4-impulso $k^{\mu'} = (\omega', \boldsymbol{k}')$ y 4-vector polarización e' es

$$S_{fi} = -ie \int (\bar{\psi}_{p'} \hat{e}' \psi_p) \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\omega'}} d^4x. \quad (98.5)$$

El integrando en (98.5) es combinación lineal de las cantidades

$$e^{-i\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi},$$
$$\cos\varphi\, e^{-i\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi},$$
$$\operatorname{sen}\varphi\, e^{-i\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi},$$

donde

$$\alpha_1 = e\left(\frac{a_1 p}{kp} - \frac{a_1 p'}{kp'}\right), \qquad \alpha_2 = e\left(\frac{a_2 p}{kp} - \frac{a_2 p'}{kp'}\right). \quad (98.6)$$

Junto con el factor $\exp[i(k' + p' - p)x]$, en estas cantidades se incluye toda la dependencia del integrando con relación a x.

Desarrollémoslas en serie de Fourier, designando los coeficientes del desarrollo por B_s, B_{1s}, B_{2s}, respectivamente, por ejemplo:

$$e^{-i\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi} = e^{-i\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} B_s e^{-is\varphi}.$$

Estos coeficientes se expresan mediante funciones de Bessel según las fórmulas:

$$B_s = J_s(z)\, e^{is\varphi_0},$$
$$B_{1s} = \frac{1}{2}\left[J_{s+1}(z)\, e^{i(s+1)\varphi_0} + J_{s-1}(z)\, e^{i(s-1)\varphi_0}\right], \tag{98.7}$$
$$B_{2s} = \frac{1}{2i}\left[J_{s+1}(z)\, e^{i(s+1)\varphi_0} - J_{s-1}(z)\, e^{i(s-1)\varphi_0}\right],$$

donde

$$z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},\ \cos\varphi_0 = \frac{\alpha_1}{z},\ \operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{\alpha_2}{z}.$$

Las funciones B_s, B_{1s}, B_{2s} están ligadas entre sí por la relación

$$\alpha_1 B_{1s} + \alpha_2 B_{2s} = sB_s, \tag{98.8}$$

que es consecuencia de la conocida relación entre funciones de Bessel:

$$J_{s-1}(z) + J_{s+1}(z) = 2s\, J_s(z)/z.$$

En definitiva, el elemento de matriz (98.5) toma la forma

$$S_{fi} = \frac{1}{(2\omega' 2q_0 2q_0')^{1/2}} \sum_s M_{fi}^{(s)} (2\pi)^4 i\delta^{(4)}(sk + q - q' - k'), \tag{98.9}$$

donde

$$M_{fi}^{(s)} = -e\sqrt{4\pi}\,\bar{u}(p')\left\{\left(\hat{e}' - e^2\frac{a^2(ke')\,\hat{k}}{2(kp)(kp')}\right)B_s + \right.$$
$$\left. + e\left(\frac{\hat{a}_1\hat{k}\hat{e}'}{2(kp')} + \frac{\hat{e}'\hat{k}\hat{a}_1}{2(kp)}\right)B_{1s} + e\left(\frac{\hat{a}_2\hat{k}\hat{e}'}{2(kp')} + \frac{\hat{e}'\hat{k}\hat{a}_2}{2(kp)}\right)B_{2s}\right\} u(p). \tag{98.10}$$

Así, pues, el elemento de matriz S_{fi} es una suma de infinitos términos, a cada uno de los cuales corresponde la ley de conservación

$$sk + q = q' + k'. \tag{98.11}$$

Dado que

$$q^2 = q'^2 = m^2(1 + \xi^2) \equiv m_*^2 \tag{98.12}$$

[cf. (40.15)] y que $k^2 = k'^2 = 0$, la igualdad (98.11) es sólo posible para $s \geq 1$. El término s de la suma representa la emisión de un fotón k' a expensas de la absorción de s fotones constituyentes de la onda con 4-impulsos k. Por la forma de la igualdad (98.11) es evidente que todas las relaciones cinemáticas que valen para el efecto Compton son aplicables a los procesos considerados si se substituyen los impulsos del electrón por los cuasi-impulsos q, y el impulso del fotón incidente, por el 4-vector sk. En particular, para la frecuencia del fotón emitido, en el sistema de referencia en que el electrón se encuentra inmóvil en promedio ($\boldsymbol{q} = 0$, $q_0 = m_*$), tenemos

$$\omega' = \frac{s\omega}{1 + \frac{s\omega}{m_*}(1 - \cos\theta)}, \tag{98.13}$$

donde θ es el ángulo formado por $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{k}'$ [cf. (86.8)]. Cabe decir que las frecuencias ω' son armónicos de la frecuencia ω.

Según las notaciones que hemos adoptado (§ 65), la amplitud del proceso de emisión del armónico de orden s coincide con $M_{fi}^{(s)}$, y la expresión

$$dW_s = |M_{fi}^{(s)}|^2 \frac{d^3k'd^3q'}{(2\pi)^6 2\omega' 2q_0 2q_0'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \tag{98.14}$$

da la correspondiente probabilidad diferencial (referida a la unidad de volumen y a la unidad de tiempo) *.

La estructura de las amplitudes (98.10) es análoga a la estructura de las amplitudes de dispersión con ondas planas. Por ello, también las operaciones de suma respecto de las polarizaciones de las partículas se efectúa de la manera ordinaria. Después de sumar respecto de las polarizaciones del electrón y del fotón finales y de promediar con relación a la polarización del electrón inicial, se obtiene

$$dW_s = \frac{e^2m^2}{4\pi} \frac{d^3k'd^3q'}{q_0q_0'\omega'} \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \times$$
$$\times \left\{ -2J_s^2(z) + \xi^2 \left(1 + \frac{(kk')^2}{2(kp)(kp')}\right)(J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \right\}. \tag{98.15}$$

Con vistas a la integración de la expresión (98.15) haremos observar que, dada la simetría axil del campo de la onda polarizada circularmente, la probabilidad diferencial es independiente del ángulo acimutal común φ en torno de la dirección de $\boldsymbol{k}$. Junto con la presencia de una función-δ, esta circunstancia hace posible efectuar la integración respecto de todas las variables, salvo una; para ésta eligiremos la cantidad invariante $u = (kk')/(kp')$. Entonces, después de integrar respecto de $d^3k d\varphi d(q_0' + \omega')$, se tiene

$$\delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \frac{d^3q'd^3k'}{q_0'\omega'} \to \frac{2\pi du}{(1+u)^2}.$$

En efecto, en el sistema del centro de masa (el sistema en el cual $s\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}' = 0$) dicha integración da $2\pi|\boldsymbol{q}'|d\cos\theta/E_s$, donde $E_s = s\omega + q_0 = \omega' + q_0'$ y θ es el ángulo formado por $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{q}'$ [cf. la transformación (65.12)]. Por otra parte, en este mismo sistema

$$u = \frac{E_s}{q_0' - |\boldsymbol{q}'|\cos\theta} - 1, \quad d\cos\theta = \frac{E_s du}{|\boldsymbol{q}'|(1+u)^2}.$$

Al intervalo $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ corresponde el intervalo

$$0 \leqslant u \leqslant u_s \equiv \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1 = \frac{2s(kp)}{m_*^2}$$

(al efectuar las transformaciones hay que recordar que $kp = kq$).

* Hay que hacer observar que la normalización de las funciones ψ_p a densidad unidad corresponde a la normalización respecto de la función-δ « relativa a la escala $\boldsymbol{q}$ » [cf. (40.17), donde el factor q_0/p_0 no existirá ahora en el segundo miembro de la igualdad]. Precisamente por esto el número de estados finales del electrón debe medirse por el elemento d^3q'.

De esta manera, la probabilidad total de radiación por unidad de volumen y unidad de tiempo valdrá *

$$W=\sum_{s=1}^{\infty} W_s=\frac{e^2m^2}{4q_0}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{u_s}\frac{du}{(1+u)^2}\left\{-4J_s^2(z)+\right.$$
$$\left.+\xi^2\left(2+\frac{u^2}{1+u}\right)(J_{s+1}^2+J_{s-1}^2-2J_s^2)\right\}, \quad (98.16)$$

donde **

$$u=\frac{(kk')}{(kp')}, \quad u_s=2s\frac{(kp)}{m_*^2}, \quad z=2sm^2\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\sqrt{\frac{u}{u_s}\left(1-\frac{u}{u_s}\right)}. \quad (98.17)$$

Cuando $\xi \ll 1$ (condición de aplicabilidad de la teoría de perturbaciones), los integrandos en (98.16) se pueden desarrollar en serie de potencias de ξ. Así, para el primer término del desarrollo de W_1 se encuentra

$$W_1=\frac{e^2m^2}{4p_0}\xi^2\int_0^{u_1}\left[2+\frac{u^2}{1+u}-4\frac{u}{u_1}\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\right]du=$$
$$=\frac{e^2m^2}{4p_0}\xi^2\left[\left(1-\frac{4}{u_1}-\frac{8}{u_1^2}\right)\ln(1+u_1)+\frac{1}{2}+\frac{8}{u_1}-\frac{1}{2(1+u_1)^2}\right], \quad (98.18)$$

expresión en la cual $u_1 \approx 2(kp)/m^2$. Como debía ocurrir, este resultado coincide con la fórmula de Klein-Nishina para la dispersión de un fotón por un electrón: haciendo en (98.18) $-a^2=4\pi/\omega$, $\xi^2=4\pi e^2/m^2\omega$ y dividiendo por la densidad de flujo incidente (65.14), volvemos a (86.16) (la sección eficaz integral de dispersión no depende de la polarización inicial del fotón) *** .

Escribamos también la expresión para la probabilidad de emisión del 2 ° armónico (primer término del desarrollo de W_2 para $\xi \ll 1$):

$$W_2=\frac{e^2m^2\xi^4}{p_0}\int_0^{u_2}\frac{du}{(1+u)^2}\frac{u}{u_2}\left(1-\frac{u}{u_2}\right)\left[2+\frac{u^2}{1+u}-4\frac{u}{u_2}\left(1-\frac{u}{u_2}\right)\right]=$$
$$=\frac{e^2m^2\xi^4}{p_0}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3u_1}-\frac{4}{u_1^2}-\frac{2}{u_1^3}-\frac{1}{2(1+2u_1)}-\left(\frac{1}{2u_1}-\frac{3}{2u_1^2}-\frac{3}{u_1^3}-\frac{1}{u_1^4}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\ln(1+2u_1)\right]. \quad (98.19)$$

En general, el término fundamental en W_s (para valores de s no demasiado grandes) es proporcional a ξ^{2s}.

---

* Esta fórmula fue obtenida también por *I. I. Gol'dman* (1964).

** Para el cálculo de z hay que tener antes en cuenta que $z^2=(a_1Q)^2+(a_2Q)^2=a^2Q^2$, donde $Q=q/(kq)-q'/(kq')$. Es fácil comprobar esta igualdad eligiendo el sistema de referencia en que $(a_1)_0=(a_2)_0=0$ y los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{k}$ están dirigidos según los ejes x^1, x^2, x^3, y observando que, en virtud de $kQ=0$, será $Q_0=Q_3$.

*** El valor indicado de a^2 corresponde a la normalización del 4-potencial a razón de « un fotón por unidad de volumen ». Para determinarlo hay que igualar ω a la energía del campo clásico con el 4-potencial real (98.2).

Consideremos ahora el caso opuesto: $\xi \gg 1$. El parámetro ξ puede aumentarse, por ejemplo, disminuyendo la frecuencia ω manteniendo fija la intensidad del campo (es evidente que $\xi = eF/m\omega$, donde F es la amplitud de dicha intensidad). Es claro por ello que el caso $\xi \gg 1$ se reduce en esencia al de los procesos que ocurren en un campo homogéneo constante, cuyas intensidades $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son perpendiculares entre sí e iguales en módulo (como es costumbre, llamaremos a un campo de estas características campo en cruz). La probabilidad de radiación en este campo se puede obtener pasando al límite para $\xi \to \infty$, pero es más sencillo efectuar los cálculos directamente para un campo constante, tomando el 4-potencial en la forma

$$A^\mu = a^\mu \varphi, \quad \varphi = kx, \quad (ak) = 0 \tag{98.20}$$

(de modo que $F_{\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu = \text{const}$). La función de onda exacta del electrón en este campo se obtiene substituyendo (98.20) en (40.7-8):

$$\psi_p = \left[1 + e\frac{\hat{k}\hat{a}}{2(kp)}\varphi\right]\frac{u(p)}{\sqrt{2p_0}} \times \\ \times \exp\left\{-ie\frac{(ap)}{2(kp)}\varphi^2 + ie^2\frac{a^2}{6(kp)}\varphi^3 - ipx\right\}. \tag{98.21}$$

El resultado que se obtiene mediante esta fórmula es exacto para la emisión de la radiación por un electrón en un campo en cruz, cualquiera que sea la energía del electrón. Sin embargo, es notable que, en el caso ultrarrelativista, este resultado (en la forma en que lo hemos presentado, véase más adelante) corresponde a la radiación por un electrón no sólo en un campo en cruz, sino también en cualquier campo electromagnético homogéneo constante, en particular en un campo magnético constante (caso que se estudió en el § 59).

Para expresar en fórmulas lo que acabamos de decir, observemos que el estado de una partícula en un campo homogéneo constante arbitrario se determina por tantos números cuánticos cuantos son necesarios para fijar el estado de una partícula libre y que estos números cuánticos se pueden siempre elegir de manera que al desconectar el campo se transformen en los números cuánticos de una partícula libre, es decir, en su 4-impulso $p^\mu (p^2 = m^2)$. De esta manera, el estado de una partícula en un campo constante se representará por un 4-vector constante p.

La intensidad total de la radiación, que es una cantidad invariante, depende solamente de los invariantes que se pueden formar a partir del 4-tensor $F_{\mu\nu}$ y del 4-vector p^μ, ambos constantes*. Teniendo también en cuenta que $F_{\mu\nu}$ debe figurar en la intensidad únicamente junto con la carga e, obtendremos tres invariantes sin dimensiones

$$\chi^2 = -\frac{e^2}{m^6}(F_{\mu\nu}p^\nu)^2 = -\frac{e^2}{m^6}a^2(kp)^2, \quad f = \frac{e^2(F_{\mu\nu})^2}{m^4}, \tag{98.22}$$
$$g = \frac{e^2}{m^4}e_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}F^{\nu\rho}.$$

* Razonamientos análogos pueden aplicarse también a la intensidad diferencial.

En un campo en cruz es $f = g \equiv 0$, mientras que en el caso general son diferentes de cero los tres invariantes. Pero si el electrón es ultrarrelativista ($p_0 \gg m$) y el vector $\boldsymbol{p}$ forma con los campos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ ángulos tales que $\theta \gg m/p_0$, se tendrá $\chi^2 \gg f, g$ (en otras palabras, si una partícula es ultrarrelativista, para casi todas las direcciones de $\boldsymbol{p}$ un campo constante arbitrario se comporta como un campo en cruz). Si, además, las intensidades del campo $|\boldsymbol{E}|, |\boldsymbol{H}| \ll m^2/e$ ($= m^2c^3/e\hbar$), se tendrá $|f|, |g| \ll 1$ *. En estas condiciones, la intensidad calculada para el campo en cruz y expresada en función del invariante χ valdrá también para la radiación en cualquier campo constante.

El invariante χ a su vez se expresa en función de las intensidades $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, mediante la relación

$$\chi^2 = \frac{e^2}{m^6}\{(|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H}| + p_0\boldsymbol{E})^2 - (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})^2\}.$$

Para un campo magnético constante χ coincide con la magnitud (59.3) introducida en el § 59, de modo que las consideraciones aquí expuestas proporcionan otro método para obtener los resultados del § 59 **.

* Obsérvese que, en todo esto, en la cantidad $(F_{\mu\nu}p^\nu)^2$, y sin perder precisión, se puede considerar p como 4-impulso cinético ordinario de la partícula.

** Cómo se efectúan los cálculos siguiendo este método, puede verse en: A. I. NIKISHOV, V. I. RITUS, Zh ETF **46**, 1.769 (1964).

APÉNDICE *

§ a. El operador de las rotaciones finitas

Los operadores $\mathbf{j}^2$ — el cuadrado del momento cinético — y j_z — la proyección de dicho momento sobre el eje de coordenadas z — conmutan no solamente entre sí, sino también con el operador $\mathrm{j}_\zeta = \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{n}$, proyección del momento cinético sobre una dirección dada $\boldsymbol{n}$ (eje ζ) en el espacio. Esta circunstancia se comprueba fácilmente mediante un cálculo directo, pero es también evidente a priori. El operador momento cinético está vinculado con el operador de una rotación infinitesimal, y el producto escalar de dos vectores $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}$ es invariante respecto de cualquier rotación del sistema de coordenadas.

De esta manera, son posibles estados con determinados valores de los números $j, j_z = m$ y $j_\zeta = m'$ y surge la cuestión de cómo hallar las correspondientes funciones de onda — funciones propias comunes a los operadores $\mathbf{j}^2$, j_z, j_ζ. Recordemos que tales estados los encontramos ya, en particular, al cuantificar la rotación de un sistema que posee simetría axil, considerado como un sólido (trompo simétrico); en este caso la dirección $\boldsymbol{n}$ es el eje del trompo (III, § 103).

El problema es hallar las funciones $\psi_{jmm'}$ está íntimamente ligado desde el punto de vista matemático con la cuestión de cómo se transforman las funciones propias del momento cinético en las rotaciones de ángulo finito.

Introduzcamos dos sistemas de coordenadas (ambos directos): el sistema fijo xyz y el sistema «móvil» $\xi\eta\zeta$, de eje ζ dirigido según el versor arbitrario $\boldsymbol{n}$(variable). Fijaremos la rotación del sistema $\xi\eta\zeta$ respecto del xyz mediante los tres ángulos de Euler α, β, γ, definidos de la siguiente manera: 1) rotación de ángulo α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$) en torno del eje z, 2) rotación de ángulo β ($0 \leqslant \beta \leqslant \pi$) en torno de la nueva posición (y') del eje y, 3) rotación de ángulo γ ($0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$) en torno de la posición

---

* Los dos párrafos de este apéndice son continuación del capítulo 14 de la *Mecánica cuántica* y deben seguir a III, § 109.

final (ζ) que se obtiene para el eje z*. Es evidente que los ángulos α, β coinciden con los ángulos esféricos φ y θ del nuevo eje ζ respecto de los ejes xyz:

$$\alpha = \varphi, \qquad \beta = \theta.$$

Sean ψ_{jm} ($m = -j, \ldots, j$) las funciones que en el sistema de coordenadas xyz representa un estado con un valor determinado de j y $\psi_{jm'}$, el mismo estado referido a los ejes $\xi\eta\zeta$; en el primer caso m es el valor de j_z, y en el segundo, $m' = j_\zeta$. Las funciones del primer grupo y las del segundo están ligadas entre sí por relaciones lineales que escribiremos en la forma

$$\psi_{jm} = \sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)\,\psi_{jm'}. \tag{a.1}$$

Los coeficientes $D^{(j)}_{m'm}$ constituyen (con relación a los índices $m'm$) una matriz de orden $(2j + 1)$ — *una matriz de rotaciones finitas* —. Sus elementos son funciones de los ángulos α, β, γ.

Si imaginamos los ejes $\xi\eta\zeta$ « rígidamente » ligados con el sistema físico, las cantidades $\psi_{jm'}$ tendrán valores determinados que no dependen de la orientación del sistema (designémoslos por $\psi^{(0)}_{jm}$). Por su parte, las fórmulas (a.1) darán la dependencia angular de las funciones ψ_{jm}. Supongamos ahora que el estado jm posee también un valor determinado m' de la proyección del momento cinético sobre el eje ζ. Esto significa que de todas las cantidades $\psi^{(0)}_{jm}$ sólo una será diferente de cero — la que posee el valor dado m' —. Entonces la suma que figura en (a.1) se reduce a un sólo término:

$$\psi_{jmm'} = \psi^{(0)}_{jm'} D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{a.2}$$

Vemos así que los elementos de matriz $D^{(j)}_{m'm}$ determinan la dependencia angular de las funciones $\psi_{jmm'}$. A la vez queda establecida así la relación antes citada entre los elementos de matriz de las rotaciones finitas y las funciones de onda $\psi_{jmm'}$.

La construcción efectiva de la matriz $D^{(j)}$ se puede llevar a cabo mediante la representación espinorial de las funciones ψ_{jm}. Con vistas a esto, recordemos las fórmulas de transformación de los espinores (véase III, § 58), escribiéndolas de acuerdo con la definición de los ángulos de Euler que hemos adoptado aquí. Las componentes de un espinor contravariante (ψ^1, ψ^2) en el sistema xyz están ligadas con las componentes ($\psi^{1'}$, $\psi^{2'}$) en el sistema $\xi\eta\zeta$, obtenido a partir del xyz mediante la rotación de ángulos $\alpha\beta\gamma$, por las fórmulas de transformación

---

* Esta definición de los ángulos de Euler difiere de la utilizada en I (§ 35) y III (§ 58) en que la segunda rotación tiene lugar en torno del eje y', y no en torno del eje x'. Los ángulos α, β, γ están ligados con los ángulos φ, θ, ψ de I y III (¡no se confundan con los ángulos esféricos φ, θ!) por las igualdades:

$$\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \beta, \qquad \psi = \gamma - \frac{\pi}{2}.$$

En esta definición de α, β, γ seguimos a *Edmonds* (A. R. EDMONDS, *Angular momentum in quantum mechanics*, Princeton, 1957.

$$\psi^1 = \psi^{1'} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\frac{\beta}{2} - \psi^{2'} e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \operatorname{sen}\frac{\beta}{2},$$

$$\psi^2 = \psi^{1'} e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} + \psi^{2'} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\frac{\beta}{2}. \qquad \text{(a.3)}$$

En cuanto a las componentes covariantes de un espinor (ψ_1, ψ_2), éstas se transforman según la ley conjugado-compleja.

Para $j = 1/2$ las dos funciones $\psi_{1/2m}$ ($m = \pm 1/2$) constituyen precisamente un espinor covariante de primer orden (véase III, § 58). Esto permite escribir sin más la matriz de la transformación (a.1):

$$D^{(1/2)}_{m'm} = e^{im'\gamma} d^{(1/2)}_{m'm}(\beta)\, e^{im\alpha},$$

donde la matriz

$$d^{(1/2)}_{m'm} = \begin{cases} m' \backslash m & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & \cos\frac{\beta}{2} & \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \\ -1/2 & -\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{cases} . \qquad \text{(a.4)}$$

Para j arbitrario, se puede establecer una correspondencia entre las funciones ψ_{jm} ($m = j, j-1, \ldots, -j$) y las componentes de un espinor simétrico de orden $2j$ según la fórmula III (58.1):

$$\psi_{jm} = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}} \psi_{\underbrace{1/2\ 1/2\ \ldots}_{j+m}\ \underbrace{-1/2\ -1/2\ \ldots}_{j-m}}.$$

La matriz de transformación de las componentes de un espinor de orden $2j$ es el producto de $2j$ matrices $D^{(1/2)}$, cada una de las cuales actúa sobre uno de los índices espinoriales. Efectuando el producto y pasando de nuevo a las funciones ψ_{jm}, obtendremos la transformación de estas últimas en la forma

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\gamma} d^{(j)}_{m'm}(\beta)\, e^{im\alpha} \qquad \text{(a.5)}$$

con determinadas funciones $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ *. (No escribiremos aquí el resultado que se obtiene de esta manera, ya que una expresión más conveniente en el caso de las funciones $d^{(j)}_{m'm}$ puede obtenerse basándose en otras consideraciones — véase más adelante.)

La matriz $D^{(j)}_{m'm}$ — en tanto que matriz correspondiente a una rotación — es unitaria. A la vez lo es también la matriz $d^{(j)}_{m'm}$. Además, esta última es real [conforme se sigue de (a.4) y de su generalización para j arbitrario]. Dado que la trans-

* Véase el libro antes citado de *Edmonds* [la definición adoptada por nosotros para las funciones $D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$ difiere de la definición de *Edmonds* en la permutación de α y γ].

formación inversa se obtiene cambiando de signo $\alpha\beta\gamma$, la condición de unitariedad nos da

$$d^{(j)}_{m'm}(-\beta) = d^{(j)}_{mm'}(\beta). \tag{a.6}$$

Además, son válidas las siguientes igualdades:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = d^{(j)}_{-m,-m'}(\beta), \tag{a.7}$$

$$d^{(j)}_{m'm}(\pi) = (-1)^{j+m}\,\delta_{m',-m}, \quad d^{(j)}_{m'm}(-\pi) = (-1)^{j-m}\,\delta_{m',-m}, \tag{a.8}$$

$$d^{(j)}_{m'm}(0) = \delta_{m'm}.$$

Éstas son evidentes para $j = 1/2$ teniendo en cuenta (a.4), y también lo es su generalización al caso de valores arbitrarios cualesquiera de j en virtud del método antes descrito para construir la matriz de la transformación.

Efectuemos un giro de ángulo $\pi - \beta$ considerado como resultado de dos rotaciones sucesivas de ángulos π y $-\beta$:

$$d^{(j)}_{m'm}(\pi - \beta) = \sum_{m''} d^{(j)}_{m'm''}(\pi)\, d^{(j)}_{m''m}(-\beta) = (-1)^{j-m'}\, d^{(j)}_{-m'm}(-\beta),$$

o bien, aplicando (a.6),

$$d^{(j)}_{m'm}(\pi - \beta) = (-1)^{j-m'}\, d_{m,-m'}(\beta). \tag{a.9}$$

El resultado de dos rotaciones en torno de un mismo eje es independiente del orden en que se suceden. Por lo tanto, hemos de obtener el mismo resultado efectuando las rotaciones de ángulos $-\beta$ y π en orden inverso. Haciéndolo así y comparando con (a.9) el resultado a que se llega, se obtendrá la relación

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = (-1)^{m'-m} d^{(j)}_{-m',-m}(\beta). \tag{a.10}$$

De (a.10) y (a.7) se sigue que

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = (-1)^{m'-m}\, d^{(j)}_{mm'}(\beta). \tag{a.11}$$

Tomando (a.6-11) como base, se pueden escribir diferentes propiedades de simetría de los elementos de matriz $D^{(j)}_{m'm}$. Observemos, en particular, la expresión del elemento conjugado-complejo:

$$D^{(j)*}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = D^{(j)}_{m'm}(-\alpha, \beta, -\gamma) = (-1)^{m'-m} D^{(j)}_{-m',-m}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{a.12}$$

Desde el punto de vista matemático, las matrices $D^{(j)}$ constituyen una representación unitaria irreducible del grupo de las rotaciones de dimensión $2j + 1$. De aquí se siguen, sin más, las relaciones de ortogonalidad y de normalización para estas matrices:

$$\int D^{(j_1)*}_{m'_1 m_1}(\alpha, \beta, \gamma)\; D^{(j_2)}_{m'_2 m_2}(\alpha, \beta, \gamma)\frac{d\omega}{8\pi^2} = \delta_{j_1 j_2}\delta_{m_1 m_2}\delta_{m'_1 m'_2}\frac{1}{2j_1+1}, \qquad \text{(a.13)}$$

donde $d\omega = \operatorname{sen}\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$, de modo que $\int d\omega = 8\pi^2$ *.

La ortogonalidad de las funciones respecto de los índices m y m' queda asegurada por el factor $e^{i(m\alpha+m'\gamma)}$. En cambio, la ortogonalidad con relación al índice j está ligada con las funciones $d^{(j)}_{m'm}$, para las cuales tenemos

$$\int_0^\pi d^{(j_1)}_{m'm}\, d^{(j_2)}_{m'm}\frac{\operatorname{sen}\beta\, d\beta}{2} = \frac{1}{2j+1}\delta_{j_1 j_2}\,. \qquad \text{(a.14)}$$

Al principio de este párrafo se recordó que el problema de los estados con valores determinados jmm' fue considerado ya en la cuantificación del movimiento del trompo simétrico. La dependencia angular de las funciones de onda de estos estados se determinó por la fórmula III (103.10). Utilizando este resultado y cambiando como corresponde la notación de las variables y la normalización de las funciones, obtendremos

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = (-1)^{j-m'}\left[\frac{(j+m')!}{2^{2j}(j-m')!\,(j+m)!\,(j-m)!}\right]^{1/2}(1+\cos\beta)^{-\frac{m'+m}{2}}\times$$

$$\times(1-\cos\beta)^{-\frac{m'-m}{2}}\left(\frac{d}{d\cos\beta}\right)^{j-m'}[(1+\cos\beta)^{j+m}(1-\cos\beta)^{j-m}]. \qquad \text{(a.15)}$$

Si bien al deducir esta fórmula en el problema del trompo se consideraban valores de j enteros, en realidad expresaba, sin embargo, propiedades generales de las representaciones continuas del grupo de rotaciones y es válida para valores j cualesquiera.

En particular, para $j = 1$ se obtendrá

$$d^{(1)}_{11} = d^{(1)}_{-1-1} = \frac{1}{2}(1+\cos\beta),\quad d^{(1)}_{00} = \cos\beta,$$

$$d^{(1)}_{1-1} = d^{(1)}_{-11} = \frac{1}{2}(1-\cos\beta),\quad d^{(1)}_{10} = -d^{(1)}_{01} = d^{(1)}_{0-1} =$$

$$= -d^{(1)}_{-10} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta. \qquad \text{(a.16)}$$

Para $j = l$ y $m' = 0$ la fórmula (a.15) se transforma en

---

* Esta relación para las representaciones de un grupo continuo constituye una generalización inmediata de las relaciones de ortogonalidad para las representaciones de los grupos finitos,

$$\frac{1}{g}\sum_G G^{(\alpha)}_{ik}\, G^{(\beta)}_{lm} = \frac{1}{f_\alpha}\delta_{il}\delta_{km}\delta_{\alpha\beta}$$

[véase III (94.9); α y β son los números de las representaciones, f_α su dimensión y g el orden del grupo)·

La integración respecto de $d\omega$ es la llamada integración invariante en el grupo; el elemento de integración se elige de manera que aplicándole todos los elementos del grupo se obtiene de nuevo el elemento de integración.

$$d^{(l)}_{0m}(\beta) = (-1)^m \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P^m_l(\cos\beta). \tag{a.17}$$

Es fácil reconocer el origen de esta fórmula en la definición de partida (a.1). Sea ψ_{jm} una función propia del momento orbital, es decir, un armónico esférico $Y_{lm}(\beta, \alpha)$ (función de los ángulos esféricos, $\varphi \equiv \alpha$, $\theta \equiv \beta$); refiramos al eje ζ los valores de $Y_{lm'}$ en el segundo miembro de la igualdad (a.1). Teniendo en cuenta (7.2 a), de (a.1) se deduce

$$Y_{lm}(\beta, \alpha) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, D^{(l)}_{0m}(\alpha, \beta, \gamma), \tag{a.18}$$

lo que equivale a (a.17).

Una expresión simple para las funciones $d^{(l)}_{\pm 1 m}$ se obtuvo en el § 16 [véase (16.24)].

§ b. Elementos de matriz para el trompo

El operador de la transformación del producto de dos funciones propias del momento cinético $(\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2})$ que corresponde a una rotación es el producto de las matrices $D^{(j_1)} D^{(j_2)}$. Por otra parte, según la fórmula de composición de los momentos

$$\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} = \sum_j C^{jm}_{m_1 m_2} \psi_{jm} \equiv C\psi_{jm}$$

($C^{jm}_{m_1 m_2}$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan; $m = m_1 + m_2$) estos productos están ligados por una matriz unitaria C con las funciones ψ_{jm}, que se transforman en una rotación según la matriz $D^{(j)}$. De aquí se sigue que

$$D^{(j_1)} D^{(j_2)} = C^+ D^{(j)} C,$$

o en forma explícita

$$D^{(j_1)}_{m'_1 m_1}(\omega)\, D^{(j_2)}_{m'_2 m_2}(\omega) = \sum_j C^{jm'}_{m'_1 m'_2}\, D^{(j)}_{m' m}(\omega)\, C^{jm}_{m_1 m_2} \tag{b.1}$$

(donde $m = m_1 + m_2$, $m' = m'_1 + m'_2$ y ω designa, para abreviar, el conjunto de los ángulos α, β, γ). Expresada en términos de los símbolos-3j, esta fórmula toma la forma

$$D^{(j_1)}_{m'_1 m_1}(\omega)\, D^{(j_2)}_{m'_2 m_2}(\omega) =$$

$$= \sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m'_2 & -m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} D^{(j)*}_{-m', -m}(\omega) \tag{b.2}$$

[aquí se ha utilizado también (a.12)].

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $D^{(J)}_{-m',-m}(\omega)$ e integrando respecto de $d\omega$ mediante la fórmula (a.13), obtendremos

$$\int D^{(j_1)}_{m'_1 m_1}(\omega)\, D^{(j_2)}_{m'_2 m_2}(\omega)\, D^{(j_3)}_{m'_3 m_3}(\omega)\, \frac{d\omega}{8\pi^2} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(b.3)}$$

(para conseguir una mayor simetría, hemos efectuado aquí un cambio evidente en la designación de los índices) *.

Esta fórmula es fundamental para el cálculo de elementos de matriz de las magnitudes físicas que caracterizan un sistema del tipo del trompo simétrico.

Sea $\bar{f}_{kq'}$ un tensor esférico de orden k que caracteriza a un trompo en el sistema de ejes de coordenadas $\xi\eta\zeta$ ligados al mismo (el eje ζ coincide con el eje del trompo); uno de estos tensores es, por ejemplo, el tensor momento eléctrico o magnético multipolar. Sean f_{kq} las componentes de este mismo tensor respecto del sistema de coordenadas en reposo xyz. Las cantidades $\bar{f}_{kq'}$ son constantes que no dependen de la rotación del trompo, mientras que las cantidades f_{kq} son funciones de los ángulos α, β, γ, que determinan la orientación del mismo. La relación entre unas y otras viene determinada por una matriz de rotaciones finitas de acuerdo con

$$f_{kq} = \sum_{q'} D^{(k)}_{q'q}(\omega)\, \bar{f}_{kq'}. \qquad \text{(b.4)}$$

Las funciones de onda de un trompo difieren de las funciones $D^{(J)}_{\Omega M}(\omega)$ únicamente en la normalización (J es el momento cinético total del trompo, Ω su proyección sobre el eje del mismo y M su proyección sobre el eje inmóvil z) **:

$$\psi_{JM\Omega}(\omega) = i^{J-\Omega} \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\, D^{(J)}_{\Omega M}(\omega). \qquad \text{(b.5)}$$

Calculando para estas funciones el elemento de matriz de la cantidad (b.4), la fórmula (b.3) conduce a

$$(J'\Omega'M' \mid f_{kq} \mid J\Omega M) = i^{J+J'-\Omega-\Omega'} (-)^{J'-M'} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \times \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -M' & q & M \end{pmatrix} \bar{f}_{kq'}$$

(con $q' = \Omega' - \Omega$, $q = M' - M$).

---

* Para valores $j_1 = l_1$, $j_2 = l_2$, $j_3 = l_3$ enteros y $m'_1 = m'_2 = m'_3 = 0$, las funciones $D^{(l)}_{0m}$ se reducen, de acuerdo con (a.18), a armónicos esféricos y la fórmula (b.3) da una expresión para la integral del producto de tres de tales armónicos que coincide con III (107.13-16).

** El factor de fase se ha elegido de manera que para $\Omega = 0$ la función (b.5) se transforma en la función de onda del momento cinético libre J (entero) con proyección M [cf. (a.18)].

La fórmula (b.6) resuelve el problema planteado y determina la dependencia de los elementos de matriz respecto de los momentos J, J' y sus proyecciones M, M'. En lo que concierne a los números cuánticos Ω, Ω', la dependencia con relación a los mismos sigue siendo indeterminada, como es natural: los valores de estos números están vinculados con el estado « interno » del trompo y las cantidades $\bar{f}_{kq'}$, dependen, en general, de los mismos. La dependencia de los elementos de matriz respecto de los números M, M', claro está, es exactamente la misma que para un sistema cualquiera con un momento cinético total dado [cf. III (107.6)].

El cuadrado del módulo del elemento de matriz (b.6), sumado respecto de todos los valores del número final M' (y respecto de $q = M' - M$) para M dado, no depende del valor de M y es igual a

$$\sum_{qM'} |(J'\Omega'M'|f_{kq}|J\Omega M)|^2 = (2J'+1)\begin{pmatrix} J' & k & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{pmatrix}^2 |\bar{f}_{kq'}|^2 \qquad \text{(b.7)}$$

[la suma se efectúa aplicando la regla III (107.11)].

La fórmula (b.6) es también aplicable (con alguna variación en el significado de los símbolos) a sistemas con simetría axil, tales como una molécula diatómica o un núcleo no esférico (axil). En contraste con el caso del trompo, la rotación de estos sistemas se define por dos ángulos solamente ($\alpha \equiv \varphi$, $\beta \equiv \theta$), los que determinan la dirección del eje del sistema. La función de onda de rotación difiere de (b.5) en que en ella no aparece el factor $e^{i\Omega\gamma}/\sqrt{2\pi}$. Sin embargo, esta diferencia no se refleja en los elementos de matriz: dado que la dependencia de las funciones $D^{(J)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$ respecto de γ se reduce al factor $e^{im'\gamma}$, la fórmula (b.3) puede escribirse también en la forma

$$\delta_{m'0}\int D^{(J_1)}_{m_1'm_1}(\alpha, \beta, 0)\, D^{(J_2)}_{m_2'm_2}(\alpha, \beta, 0)\, D^{(J_3)}_{m_3'm_3}(\alpha, \beta, 0)\frac{\operatorname{sen}\beta\, d\alpha\, d\beta}{4\pi} = \\ = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix}$$

(donde $m' = m_1' + m_2' + m_3'$) y el resultado del cálculo de la integral no cambia. En este caso, además, la regla de selección relativa a la proyección del momento cinético sobre el eje conserva su forma primitiva ($\Omega' - \Omega = q'$) y es consecuencia de la ortogonalidad de las funciones de onda electrónicas. En la fórmula (b.6) hay que entender ahora por $\bar{f}_{kq'}$ los elementos de matriz de la magnitud f respecto de los estados electrónicos para núcleos en reposo (en el sistema de coordenadas $\xi\eta\zeta$ ligado con el eje de la molécula).

SUPLEMENTO A LA PARTE I

§ 82a. Pérdidas de energía de las partículas rápidas por ionización

Consideremos los choques de una partícula rápida relativista con un átomo acompañados de excitación o ionización de este último. En el caso no relativista estas colisiones inelásticas se estudiaron en III, §§ 145, 146; generalizaremos aquí las fórmulas allí obtenidas *(H. A. Bethe*, 1933).

La velocidad de la partícula que incide sobre el átomo se supone que es grande comparada con las velocidades de los electrones atómicos (por lo que, en cualquier caso, se supone que $Z\alpha \ll 1$, es decir, que el número atómico no es demasiado grande). Esta condición asegura la aplicabilidad de la aproximación de Born al proceso considerado. La solución del problema es un tanto diferente según se trate de una partícula rápida ligera (electrón, positón) o pesada (mesón, protón, partícula-α, etc.). Estudiaremos aquí el último caso, que es más simple.

Sean $p = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$ y $p' = (\varepsilon', \boldsymbol{p}')$ los impulsos inicial y final de la partícula rápida en el sistema de referencia del laboratorio, sistema respecto del cual el átomo se encontraba en reposo antes del choque; la diferencia $q = p' - p$ da la energía y el impulso transferidos por la partícula al átomo. Descompongamos el intervalo de valores posibles del impulso cedido en dos regiones:

$$\text{I)}\ \frac{\boldsymbol{q}^2}{m} \ll m, \quad \text{II)}\ \frac{\boldsymbol{q}^2}{m} \gg I, \tag{82a.1}$$

donde m es la masa del electrón, e I, una cierta energía atómica media (potencial de ionización del átomo). Estas dos regiones se solapan cuando $I \ll \boldsymbol{q}^2/m \ll m$; esta circunstancia permite llevar a cabo un empalme exacto de los resultados que se obtienen para cada una de ellas. Llamaremos a los valores $\boldsymbol{q}$ de la primera región y de la segunda, respectivamente, transferencias de impulso pequeñas y grandes.

Pequeñas transferencias de impulso

En esta región se pueden considerar los electrones atómicos como no relativistas, tanto en el estado inicial del átomo como en el final.

La amplitud del proceso viene dada por la expresión

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^{\mu}(-q)\, J_{p'p}^{\nu}(q)\, D_{\mu\nu}(q), \tag{82a.2}$$

donde J_{n0} es la 4-corriente de transición del átomo desde el estado inicial (0) al final (n), y $J_{p'p}$ es la 4-corriente de transición de la partícula rápida; estas corrientes substituyen aquí las expresiones $(u'\gamma u)$ que aparecerían, por ejemplo, en la amplitud de dispersión de dos partículas «elementales», el electrón y el muón (74.17) [cf. también (140.3)]. Las corrientes de transición se toman en la representación de impulsos [véase (43.11)]. La sección eficaz del proceso en el sistema de referencia del laboratorio se escribe:

$$d\sigma_n = 2\pi\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega_{n0}) \left| M_{fi}^{(n)} \right|^2 \frac{d^3p'}{2\,|\,\boldsymbol{p}\,|\,2\varepsilon'(2\pi)^3}, \tag{82a.3}$$

donde $\omega_{n0} = E_n - E_0$ es la frecuencia de transición entre estados del átomo.

El estado final puede pertenecer tanto al espectro discreto como al continuo; el primer caso corresponde a la excitación del átomo, el segundo, a su ionización. En la ley de conservación de la energía [que se tiene en cuenta mediante la función δ en (82a.3)] se prescinde de la energía de retroceso del átomo, lo que evidentemente es admisible para pequeñas transferencias de impulso.

Conviene elegir el propagador de fotón en este caso adoptando el contraste (77.14), en el cual son diferentes de cero sólo sus componentes espaciales

$$D_{ik}(q) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - q^2}\left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\omega^2}\right). \tag{82a.4}$$

Entonces, también para las 4-corrientes de transición en (88a.2) son necesarias solamente sus componentes espaciales.

La corriente atómica de transición $\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q})$ es en el presente caso la componente de Fourier de la expresión no relativista ordinaria:

$$\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q}) = \frac{i}{2m}\int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}(\psi_0 \nabla\psi_n^* - \psi_n^* \nabla\psi_0)\, d^3x, \tag{82a.5}$$

donde ψ_0, ψ_n son las funciones de onda atómicas (además, para simplificar la notación, hemos suprimido aquí y en lo que sigue el signo de suma respecto de los electrones del átomo, es decir, hemos escrito la fórmula como si en él hubiera tan sólo un electrón). Integrando el primer término por partes, esta expresión puede escribirse en forma de elemento de matriz:

$$\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} + e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\mathbf{v})_{n0}, \tag{82a.6}$$

donde $\boldsymbol{v} = -\dfrac{i}{m}\nabla$ — es el operador velocidad del electrón.

En cuanto a la corriente de transición de la partícula dispersada, teniendo en cuenta que el impulso que pierde es relativamente pequeño ($|\boldsymbol{q}| \ll |\boldsymbol{p}|$), cabe substituirla simplemente por el elemento diagonal

$$J_{pp}(0) = 2pz, \tag{82a.7}$$

que corresponde al movimiento rectilíneo clásico [cf. (96.5)]; aquí se ha introducido también el factor z, que tiene en cuenta la posible diferencia de la carga de la partícula (ze) respecto de la carga del electrón.

Que $\boldsymbol{q}$ sea pequeño significa que también lo será el ángulo de desviación de la partícula ϑ. En estas condiciones, las componentes de $\boldsymbol{q}$ longitudinal y transversal (respecto de $\boldsymbol{p}$) son iguales a

$$-q_{\parallel} \approx \frac{dp}{d\varepsilon}\omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}, \quad q_{\perp} \approx |\boldsymbol{p}|\vartheta, \tag{82a.8}$$

de modo que $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p} \approx -\varepsilon\omega_{n0}$.

La substitución de (82a.4-8) en (82a.2) da

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi ze^2}{q^2}\langle n \,|\, \frac{\varepsilon}{\omega_{n0}}(\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} + e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{v}) + (\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} + e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{v}) \,|\, 0\rangle.$$

Observemos que en el primer término

$$\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{v}f + f\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{v} = 2i\dot{f},$$

donde $f \equiv e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$ (véase III, pág. 671); por ello, el elemento de matriz de este operador coincide con el elemento de matriz $2i(f)_{n0} = 2\omega_{n0}f_{n0}$. En cuanto al segundo término, basta substituir, al ser $\boldsymbol{q}$ pequeño, $e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$ por la unidad. Entonces

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi ze^2}{q^2}\{\varepsilon\,(e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}})_{n0} - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_{n0}\omega_{n0}\}.$$

El cuadrado del módulo de esta expresión vale:

$$|M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{64\pi^2(ze^2)^2}{(q^2)^2}\{\varepsilon^2|(e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}})_{n0}|^2 + 2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_{n0})(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_{n0})\varepsilon\omega_{n0} + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_{n0})^2\omega_{n0}^2\} \tag{82a.9}$$

(en el segundo término se ha hecho aquí $e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \cong 1 - i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}$; no es posible hacer esto en el primero por la razón que se verá más adelante — véase la nota en la pág. 292).

La pérdida de energía de la partícula rápida como resultado de sus colisiones inelásticas con los átomos * viene determinada por la cantidad

* Estas pérdidas se llaman a menudo pérdidas por ionización, a pesar de que están ligadas no solamente con la ionización, sino también con la excitación de los átomos.

$$\varkappa = \sum_n \int \omega_{n0}\, d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2} \sum_n \int \omega_{n0} \left| M_{fi}^{(n)} \right|^2 do', \tag{82a.10}$$

donde la suma se extiende a todos los estados finales posibles del átomo, y la integración, a las direcciones de la partícula dispersada; llamaremos a esta cantidad *frenado efectivo* (se le llama también *sección eficaz de pérdida de energía*).

La integración en (82a.10) puede efectuarse en dos etapas: primero como promedio respecto del acimut de la dirección de $\boldsymbol{p}'$ respecto de $\boldsymbol{p}$ y, luego, como integración respecto de $do' \cong 2\pi\vartheta d\vartheta$, donde ϑ es el ángulo de dispersión, que es pequeño. La primera operación substituye $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_{n0}$ por

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_{n0} \to q_{\parallel} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0},$$

donde x_{n0} es el elemento de matriz de una de las coordenadas cartesianas de los electrones atómicos *. A su vez, la integración respecto de $d\vartheta$ se puede substituir por una integración respecto de q^2, observando que

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + \boldsymbol{q}^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + p^2\vartheta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{p^2} + p^2\vartheta^2 \tag{82a.11}$$

y, por esto, $2\vartheta d\vartheta = d\,|\,q^2\,|/p^2$ (M es la masa de la partícula rápida). Obtenemos en definitiva

$$\varkappa = 4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ |\,(e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}})_{n0}|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 \,|\, x_{n0} \,|^2 \left(\frac{M^2}{p^2} + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \frac{d\,|\,q^2\,|}{|\,q^2\,|^2}. \tag{82a.12}$$

El límite inferior de integración respecto de q^2 es

$$|\,q^2\,|_{\min} = \frac{M^2}{p^2}\omega_{n0}^2. \tag{82a.13}$$

En cuanto al límite superior, para él eligiremos un cierto valor $|\,q^2\,|_1$ tal que

$$I \ll \frac{|\,q^2\,|_1}{m} \ll m, \tag{82a.14}$$

es decir, un valor que se encuentra en la región en que se solapan los dominios I y II (82a.1).

La integración y la suma en (82a.12) se lleva a cabo de manera análoga a como

* No importa cuál: después de la suma respecto de las direcciones del momento cinético del átomo, que se introduce más adelante, en el estado final, el elemento de matriz x_{n0} no depende ya de la dirección del eje x.

se procedió en III, § 146 para el caso no relativista. Se descompone el intervalo de integración en dos partes: a) de $|q^2|_{\min}$ a $|q^2|_0$ y b) de $|q^2|_0$ a $|q^2|_1$, donde el valor $|q^2|_0$ se elige de modo que

$$\frac{IM}{|p|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll m\alpha \tag{82a.15}$$

(la cantidad $m\alpha$, que aparece a la derecha es del orden de magnitud de los impulsos de los electrones atómicos). En la región a) se puede hacer $e^{-iq\cdot r} \cong 1 - iq\cdot r$ y la contribución de la misma a $\varkappa$ toma la forma

$$4\pi(ze^2)^2 \sum_n \int_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} \left\{ \frac{1}{v^2}\omega_{n0}|x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|} - \frac{M^2}{p^2}\omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|^2} \right\} d|q^2| \approx$$

$$\approx \frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2} \sum_n \omega_{n0}|x_{n0}|^2 \left[\ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2\omega_{n0}^2} - v^2 \right].$$

(La integral en el segundo término se puede extender hasta el infinito.)
La suma se efectúa aplicando la fórmula

$$\sum_n \omega_{n0}|x_{n0}|^2 = \frac{1}{2m} Z, \tag{82a.16}$$

donde Z es el número de electrones en el átomo [véase III, (146.10)]. El resultado lo escribiremos en la forma

$$\frac{2\pi(ze^2)^2 Z}{mv^2}\left[\ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 I^2} - v^2\right], \tag{82a.17}$$

donde I es una cierta energía media determinada por la fórmula

$$\ln I = \frac{\sum_n \omega_{n0}|x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}}{\sum_n \omega_{n0}|x_{n0}|^2} = \frac{2m}{Z}\sum_n \omega_{n0}|x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}. \tag{82a.18}$$

En el dominio b), en cambio, tenemos según (82a.11) $|q^2| \approx p^2 \vartheta^2$, es decir, $|q^2|$ no depende del número n del estado final del átomo; tampoco dependen de n los límites de integración. En consecuencia, la suma respecto de n en (82a.12) puede efectuarse bajo el signo de integral. En el primer término, se calcula mediante la fórmula

$$\sum_n |(e^{-iq\cdot r})_{n0}|^2 \omega_{n0} = \frac{Z}{2m} q^2 \tag{82a.19}$$

[véase III, (146.5)] y su integral es igual a *

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}.$$

La integral del segundo término en (82a.12), en cambio, da en este dominio una contribución insignificante a $\varkappa$.

Sumando la última fórmula con (82a.17) se encuentra para la contribución a $\varkappa$ debida a todo el dominio de transferencias pequeñas:

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_1 p^2}{M^2 I^2} - v^2\right]. \tag{82a.20}$$

Grandes transferencias de impulso

Pasemos a considerar las colisiones en las que el impulso transferido es grande comparado con el impulso de los electrones atómicos ($q^2 \gg mI$). En esta región, evidentemente, se puede prescindir del hecho de que los electrones estén ligados al átomo, es decir, cabe considerarlos como libres. De acuerdo con esto, el choque de la partícula rápida con el átomo equivaldrá a la dispersión elástica por cada uno de los Z electrones atómicos. Además, dado que la velocidad de la partícula es grande, podemos suponer que los electrones atómicos se encuentran inicialmente en reposo.

Designemos por $m\Delta$ la energía que la partícula rápida cede a un electrón atómico y sea $d\sigma_\Delta$ la sección eficaz de dispersión elástica correspondiente a la misma. El frenado efectivo diferencial para todo el átomo será entonces

$$d\varkappa = Zm\Delta\, d\sigma_\Delta. \tag{82a.21}$$

La energía máxima que se puede transferir a un electrón en reposo por la partícula de masa $M \gg m$ que choca con él es igual a

$$m\Delta_{max} = \frac{2mp^2}{m^2 + M^2 + 2m\varepsilon} \approx \frac{2mp^2}{M^2 + 2m\varepsilon},$$

donde ε y p son la energía y el impulso de la partícula incidente [véase II, (13.13)].

* La divergencia logarítmica de la integral en el límite superior es precisamente la causa por la que, en el primer término de (82a.12), fue imposible desarrollar $e^{-iq\cdot r}$ en potencias de q.

Admitiremos, además, que aunque la energía ε puede ser ultrarrelativista ($\varepsilon \gg M$), se tiene a la vez, sin embargo,

$$\varepsilon \ll \frac{M^2}{m}. \tag{82a.22}$$

Entonces, incluso la energía máxima transferida

$$m\Delta_{\max} \approx \frac{2mp^2}{M^2} = 2mv^2\gamma^2 \qquad (\gamma = \varepsilon/M = 1/\sqrt{1-v^2}) \tag{82a.23}$$

se mantiene aún pequeña comparada con la energía cinética inicial de la partícula incidente ($m\Delta_{\max} \ll \varepsilon - M$). Según esto, también el impulso cedido $\boldsymbol{q}$ será siempre pequeño en comparación con el impulso inicial de la partícula, $\boldsymbol{p}$. Esta circunstancia permite considerar que el movimiento de esta última no varía en el choque, es decir, suponer que la partícula incidente es infinitamente pesada. Entonces la sección eficaz de dispersión se obtiene, simplemente, refiriendo la sección eficaz de dispersión del electrón por un centro inmóvil (81.7) al sistema de referencia del laboratorio, sistema en el que el electrón se encontraba inicialmente en reposo. Esto se hace fácilmente, observando que, dentro de la aproximación indicada,

$$-q^2 \approx q^2 = 4p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}, \qquad d\sigma' = \frac{\pi d|q^2|}{p^2},$$

y que la velocidad relativa en ambos sistemas es la misma, v. La fórmula (81.7) toma la forma

$$d\sigma = \frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2}\left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2}\right)\frac{d|q^2|}{|q^2|}.$$

La energía cedida Δ se expresa en función del mismo invariante q^2 de acuerdo con $-q^2 = 2m^2\Delta$. Tenemos así *

$$d\sigma_\Delta = \frac{2\pi(ze^2)^2}{m^2v^2}\left(1 - v^2\frac{\Delta^2}{\Delta_{\max}^2}\right)\frac{d\Delta}{\Delta^2}. \tag{82a.24}$$

La contribución al frenado efectivo debida a la región de transferencias de impulso que estamos considerando, se obtendrá integrando (82a.21) entre el límite antes introducido $|q^2|_1$ y $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$. Dicha contribución es igual a

* En esta fórmula no se tienen en cuenta, naturalmente, los efectos específicos de las interacciones fuertes, si la partícula pesada es un hadrón. Estos efectos (factor de forma hadrónico), sin embargo, sólo cobran importancia cuando $|q^2| \infty 1/M^2$, y en las condiciones (82a.22) tales transferencias de impulso quedan excluidas.

$$\frac{2\pi (ze^2)^2 Z}{mv^2}\left(\ln^2 \frac{2\Delta_{\max} m^2}{|q^2|_1} - v^2\right). \tag{82a.25}$$

Finalmente, sumando las contribuciones (82a.20) y (82a.25), obtendremos el siguiente resultado para la pérdida total de energía de una partícula pesada rápida por ionización:

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mv^2}\left(\ln \frac{2mv^2}{I\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{82a.26}$$

(en unidades ordinarias). En el caso no relativista se sigue de aquí la fórmula ya conocida III, (147.10):

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{I}, \tag{82a.27}$$

y en el caso ultrarrelativista

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)}{mc^2}\left(\ln \frac{2mc^2}{I\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - 1\right). \tag{82a.28}$$

El frenado depende tan sólo de la velocidad de la partícula rápida (pero no de su masa). La disminución del frenado al aumentar la velocidad, tal como se sigue de (82a.27), se transforma en la región ultrarrelativista en un crecimiento lento (logarítmico).

PROBLEMAS

1. Determinar el frenado eficaz de un electrón relativista.

Solución. La contribución debida a la región de pequeñas transferencias de impulso viene dada, como antes, por (82a.20). En la región de transferencias de impulso grandes, en vez de (82a.24) hay que aplicar la fórmula (82.14) que tiene en cuenta los efectos de intercambio. Integrando $\Delta d\sigma_\Delta$ respecto de $d\Delta$ desde $|q^2|_1/2m^2$ a $(\gamma - 1)/2$ y sumando con (82a.20), resulta

$$\varkappa = \frac{2\pi Z e^4}{mv^2}\left[\ln \frac{m^2(\gamma^2-1)(\gamma-1)c^4}{2I^2} - \left(\frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{(\gamma-1)^2}{8\gamma^2}\right], \tag{1}$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

En el caso no relativista obtenemos la fórmula del problema III, § 146, y en el ultrarrelativista ($\gamma \gg 1$)

$$\varkappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{m^2c^4\gamma^3}{2I^2} + \frac{1}{8}\right). \tag{2}$$

2. El mismo problema para el positón.

Solución. Para $d\sigma_\Delta$ hay que utilizar, en la región de transferencias grandes, la fórmula (82.23), tomando como límite superior respecto de $d\Delta$ el valor $\gamma - 1$. La solución en el caso ultrarrelativista es:

$$\varkappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{2m^2c^4\gamma^3}{I^2} - \frac{23}{12}\right).$$

ÍNDICE ALFABÉTICO

Alternancia de las intensidades, 211
Aniquilación de un par en tres fotones, 397
Aproximación logarítmica, 414, 416, 451
Arista o cabeza de una banda, 211
Átomos, reglas de selección en los, 191

Banda, arista o cabeza de una, 211
Bispinor, 76

Campo escalar, propagador de un, 326
— exterior, reglas de selección en un, 200
— magnético, precesión del spin en un, 160, 164
— vectorial, propagador de un, 330
Canales de reacción, 281, 338
Captura radiativa de un protón por un neutrón, 229
Carga efectiva del protón, 215
Coeficientes de Einstein, 172
Compton, efecto, 377
— — doble, 397
Condición de «carácter completo» de las matrices de Dirac, 110
— — — — de Pauli, 110
Conjugación de carga, 50, 100
Conmutación, reglas para operadores-ψ, 323
Constante de estructura fina, 167
Contracción de operadores, 314
Contraste de Landau, 330
— grupo de, 48
— transversal en cuatro dimensiones, 16, 330
— — tres dimensiones, 16, 330
Corrección relativista a la función de onda, 155
Corriente de transición, 168
Corrimiento de fase, 138, 148
— — en el caso ultrarrelativista, 151
— — en la fotoproducción de piones, 307
— — en un campo de Coulomb, 146
Coulomb, integral del movimiento de, 135

Densidad de corriente de las partículas escalares, 41
— — de los electrones, 177
Diagrama, líneas exteriores de un, 317, 322
— — interiores de un, 322
— vértice de un, 316
Diagramas polares, 341
Dirac, función conjugada de, 83
— matrices en la representación espinorial, 81
— — — típica, 84
Dispersión antisimétrica, 250
— coherente, 245, 268
— combinatoria, 241
— de Rayleigh, 241
— de la luz por un electrón, 254
— de un electrón por un muón, 356, 357
— forzada, 248
— reglas de selección en la, 251, 258, 259
— simétrica, 250

Ecuación de Klein-Fok, 39
— de Pauli, 131
— de segundo orden para un electrón en un campo, 127
Efecto Compton, 377
— — doble, 397
— Stark en los niveles de estructura fina, 205
Efectos de polarización en la dispersión de un electrón por un electrón, 353, 355
— — — — por un muón, 357
— — — de un fotón por un electrón, 382
— — en la radiación de frenado, 414
Electrones, densidad de corriente de los, 177
Emisión de dos cuantos, 247
— forzada, 171
Espinores esféricos, 94
Estados de helicidad esféricos, 62
Estructura fina, constante de, 167
— — efecto Stark en los niveles de, 205

Factor de Thomas, 133
Feynman, reglas de, 325
Foldy-Wouthuysen, representación de, 101
Fotón eléctrico, 22
— magnético, 22
Frank-London, principio de, 212
Función conjugada de Dirac, 83
— de onda, corrección relativista a la, 155
— propagación, 314, 321
Furry, teorema de, 343

Grupo de contraste, 48

Heisenberg, representación de, 232, 310
Helicidad, 29, 60
— conservación en el caso ultrarrelativista de la, 149, 349
— estados esféricos de, 62

Índices puntados, 68
Infrarrojo, catástrofe en el, 444
Integral del movimiento de Coulomb, 135
Intensidad de las rayas de transición, 191
Intensidades, alternancia de las, 211
Interacción de aniquilación, 364
— representación de, 310
— spin-órbita, 133, 363
— spin-spin, 363
Inversión, 20, 49, 73, 74
— combinada, 52
— cuadridimensional, 43
— del tiempo, 31, 48, 102

Klein-Fok, ecuación de, 39

Lagrangiano de la interacción electromagnética, 167
— de un campo escalar, 40
— — espinorial, 100
Landau, contraste de, *véase* Contraste de Landau
Lorentz, grupo propio, ampliado, 49
— transformación de un bispinor, 85
— — de un espinor, 72

Majorana, representación de, 86, 105
Mandelstam, plano de, 284
Matriz densidad de polarización del electrón, 120
— — — del fotón, 30
— — — del neutrino, 120
Matrices de Dirac, condición de «carácter completo» de las, 110
— — en la representación espinorial, 81
— — — típica, 84
— de Pauli, condición de «carácter completo» de las, 110
Moléculas, reglas de selección en las, 207, 208, 211, 213
Momento eléctrico de una transición, 180
— magnético anómalo, 160
— — de una transición, 176
Momentos de polarización de los núcleos, 187
Multiplete, rayas principales de un, 193

Niveles de energía de un electrón en un campo de Coulomb, 135, 143
— — en un campo magnético, 129

Operadores, contracción de, 314

Parámetros de Stokes, 31
Paridad de carga, 51
— — de un sistema partícula-antipartícula, 55
— — del fotón, 55
— — del positonio, 107
— de los estados esféricos de un electrón, 94, 95
— de un fotón, 21
— intrínseca, 49
— relativa, 105
— — de una partícula y de una antipartícula, 55, 105
Partículas escalares, 37, 39
— — densidad de corriente de las, 41
— vectoriales, 55
Pauli, ecuación de, 131
Pauli-Fierz, transformación de las formas biliniales, 110, 111
Pérdida de energía, sección eficaz de, 407, 418
Plano de Mandelstam, 284
Positonio, efecto Zeeman en el, 367
— orto-, para-, 366
Precesión del spin en un campo magnético, 160, 164
Principio de correspondencia, 174
— de Frank-London, 212
Producto normal, 13, 331
Propagador, 314, 321
— de un campo escalar, 326

Propagador de un campo vectorial, 330
Protón, carga efectiva del, 215

Radiación de frenado, cálculo según Weiszacker-Williams de la, 448
— — cuadripolar, 406
— — de cuantos blandos, 446
— — dipolar, 405
— — efecto de polarización de la, 414
— — — del apantallamiento en la, 416
— — en la emisión de una partícula, 407
— — en la reflexión por una pared de potencial, 408
— — papel del retroceso en la, 437
— — pérdida de energía en la, 417
— multipolar, reglas de selección, 178, 181
— regla de las sumas en la, 204
Rayas de transición, intensidad de las, 191
— satélite, 193
Rayleigh, dispersión de, 241
Recombinación radiativa, 221
Regla de las sumas en la radiación, 204
Reglas de conmutación para operadores-ψ, 323
— de Feynman, 325
— de selección de la radiación multipolar, 178, 181
— — en la dispersión, 251, 258, 259
— — en las moléculas, 207, 208, 211, 213
— — en los átomos, 191
— — en un campo exterior, 200
— — según el spin isotópico, 214
Representación de Foldy-Wouthuysen, 101
— de Heisenberg, 232, 310
— de interacción, 310
— de Majorana, 86, 105
Residuo en un polo de la amplitud de dispersión, 139, 147
Resonancia paramagnética, 200

Sección eficaz de pérdida de energía, 407, 418
Spin isotópico, reglas de selección según el, 214
Stokes, parámetros de, 31

Tensor de dispersión, 243
— de polarizabilidad, 247
Tensores irreducibles, 78
Teorema de Furry, 343
— de Wick, 331
— óptico, 266, 305
Thomas, factor de, 133
Transformación de contraste de la matriz densidad de un fotón, 31
— — del propagador de fotón, 327
— de dos fotones en un par electrón-positón, 394, 395
— de Lorentz de un bispinor, 85
— — de un espinor, 72
— de Pauli-Fierz de las formas biliniales, 110, 111
— de un par electrón-positón en un par muónico, 357

Vectores esféricos, 23

Weiszacker-Williams, cálculo de la radiación de frenado según, 448
— — método de, 448
Wick, teorema de, 331